جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان ــ كلية التربية

بحث تخرج

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى وتطبيقاتها

بحث تخرج مقدم الى

قسم الرياضيات ـ كلية التربية ــ جامعة ميسان

كجزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس

اعداد الطالب

حسن علي سلمان

أشراف

أ.م. د. محمد جبار حواس

1446 هـ

2025 م

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَقُلْ رَبِّ زِدْنِيْ عِلْمَاً)

صدق الله العلي العظيم

الاهداء

الى من به نقتدي في الصبر والعلم وكان مثلا للكل

خاتم النبيين والمرسلين **محمد**(ﷺ)

والى من جعل الله ﷻ
الجنة تحت قدميها وبها وصى الرسول (ﷺ)

ثلاثا وذهب النوم عن عينيها رافعة الكفين في تهجد الليل وتسال الباري ان نكون

لها صدقه جارية

امهاتنا اطال الله بأعمارهن ورزقهن الصحة والعافية .....

والى من سبَّب في وجودنا اباءنا حفظهم الله من كل مكروه .....

والى جميع اخوتنا واخواتنا الذين لا يعلم فضلهم علينا إلا الله (ﷻ)

الذين كلما تعثرت اقدامنا في المسير شجعونا على الاستمرار وكانوا لنا خير سند

اسال الله ـ سبحانه ـ ان يجزيهم عنا خير الجزاء

والى كل مسلم يحارب هوى النفس من اجل اتباع الحق

نهدي اليوم ثمرة جهدنا

شكر وتقدير

الحمد لله الذي بفضله وكرمه تتم الصالحات احمده سبحانه وتعالى ان وفقني للشروع في هذه الدراسة
ثم وفقني واعانني على اكمالها. وانطلاقا من قول الرسول الكريم محمد (ﷺ)

(من لا يشكر الناس لا يشكر الله) واعترافا بالفضل لأهله وحفظاً لنعمة ربي، واتباع لسنة النبي (ﷺ)

اتوجه بخالص شكري وتقديري لمن كان لهم الفضل في خروج هذه الدراسة
وأول من أتقدم لهم بالشكر والدي الكريمان على ما بذلاه حتى وصلت لهذه المرحلة من العمر والتعليم فأسال الله تعالى ان يطيل بعمرهما على الطاعة وان يمتعهما بالصحة والعافية وان يجعل عاقبتهما جنة عرضها السماوات والأرض.

وبعد انجاز هذا البحث لا يسعني الا ان اوجه خالص شكر وتقدير وعظيم امتناني الى أ.م. د محمد جبار حواس، عارف لما ابدى من حسن ورعاية ورحابة صدر وروح علمية مخلصة وما قدمه لي من توجيهات ونصائح سديدة وملاحظات قيمة ومستمرة فدعائي له بالخير والعافية والتوفيق.

كما اتقدم بجزيل الشكر والتقدير الى عمادة كلية التربية على عملها الدائم وسعيها الدؤوب لخدمة مسيرة العلم والعطاء واتوجه بجزيل الشكر الى رئيس قسم الرياضيات والى اساتذتي الافاضل في قسم الرياضيات ولا يفوتني ان أقدم الشكر والتقدير الى رئيس لجنة المناقشة لما سيدونه من ملاحظات قيمة في اقسام البحث.

والى جميع أهلي وأصدقائي والى كل من شد ازري وكل من ساندني في عملي جزاهم الله خير الجزاء
فهذا ما من الله عليَّ بهِ وأعانني عليه فإن كان صوابا فمن الله الكريم وان يكن فيه خطا او نقص فتلك حال ابن ادم والكمال لله وحده وحسبي أني قد حاولت التسديد والمقاربة وبذلت الجهد ما استطعت بتوفيق من الله.

هذا وصلي وسلم على سيدنا محمد وعلى آل وصحبه وسلم تسليما كثيرا.

خلاصة البحث

يتناول البحث المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها وتطبيقاتها، في الفصل الاول من هذا البحث درسنا المفاهيم الاساسية التي كان الهدف منها

التعرف على مفهوم المعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها وبعض انواع المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبعض طرق حلها والتي من ضمنها

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية وتكوين المعادلة التفاضلية وحل المعادلة.

وفي الفصل الثاني فقد تناولنا بعض طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى والدرجة الأولى مثل المعادلات مفصولة المتغيرات والمعادلة المتجانسة والمعادلة ذات المعاملات الخطية والمعادلة التامة.

وفي الفصل الثالث فقد تناولنا أهمية المعادلات التفاضلية واستخدامها في العلوم التطبيقية مثل مجال الكيمياء، في الحجم المولي الجزئي وفي معادلة{ ريدليش كيستر}وفي مسائل الخلط ومسائل البرود.

المقدمة [1]

بسم الله والصلاة على سيد الخلق سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى أله وصحبه والتابعين ومن تبعهم بأحاسنك يوم الدين

تكتسب المعادلات التفاضلية أهمية كبرة علوم الرياضيات والفيزياء والكيمياء والهندسة فبواسطه المعادلات التفاضلية أمكن فهم الكثير من الظواهر المعقدة في حياتنا اليومية أبرزها ظاهرة الكهرومغناطيسية لذلك فهي تخبرنا عما جرى سابقا وعما سيجري لاحقاً واصفة تلك الحادثة بمتحولات ترمز للزمان والمكان وعوامل تؤثر في الحادثة نفسها لذلك ما من تخصص يعمل في حقل العلوم التطبيقية الا ويجد نفسه أمام معادلة تفاضلية أو أكثر وعليه حلها لان حل كل معادلة هو وصف أوضح من المعادلة نفسها للحادثة التي تمثلها تلك المعادلة.

وما زالت العلوم التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسة والحيوية بالإضافة الى مساهمتها في دراسة التحليل وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها.

إن المعادلات التفاضلية أساسية لفهم كثير من المسائل الفيزيائية والرياضية المهمة لقد أدرك ذلك أسحاق نيوتن في القرن السابع عشر اذ استخدم المعادلات في دراسته لحركة الجسيمات والأجرام السماوية. تعتبر المعادلات التفاضلية من المواضيع المهمة الرياضيات البحثية والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسة، فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والميكانيكية والانشائية من أنواع المعادلات التفاضلية.

لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية، وهناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضلية.

وتمثل المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية والمتجانسة وغير المتجانسة ومعادلات تفاضلية اعتيادية ومعادلات تفاضلية جزئية وكذلك نستطيع تصنيف المعادلات الاعتيادية حسب رتبة المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى أو من الرتب العليا فقد اختص هذا البحث على المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية للمعادلة التفاضلية [1]:

تعريف [1]: المعادلة التفاضلية: هي علاقة بين المتغير التابع (المتغيرات) والمتغير المستقل (المستقلة) تدخل فيها

المشتقات او التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية العادية إذا كان المتغير التابع دالة في نتغير مستقل واحد وبالتالي لا

تحتوي الا على مشتقات عادية. الصيغة العامة لها

$$F(x, y', y'', \dots.) = 0$$

مثال [1]: ليكن x المتغير المستقل و yالمتغير التابع فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية.

1. $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

2. $x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\,sin\,x)\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

4. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$

5. $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$

ملاحظة [1]: كثير ما نستخدم الشرطة المائلة للدلالة على المشتقة العادية فمثلا:

المشتقة الأولى للمتغير y بالنسبة الى x هي $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية تكتب على الصورة $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

والمشتقات العليا يصعب تكرار الشرطة فتكتب المشتقة على الصورة $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

رتبة المعادلة التفاضلية [1]:

تعريف (1) إذا كانت المشتقة النونية y^n هي اعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية العادية قيل

ان هذه المعادلة من الرتبة n .تحدد رتبة المعادلة التفاضلية بأعلى مشتقة داخلة فيها.

مثال [1]: جد رتبة كلآ من المعادلات التفاضلية التالية.

1. $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

2. $x\frac{d^3y}{dx^3} + (2sinx)\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

الحل:

1.المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

2.المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة

3.المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

درجة المعادلة التفاضلية [1]:

تعريف [1]: هي درجة (قوة) اعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط ان تكون جميع المعاملات التفاضلية
خالية من القوى الكسرية

مثال [1]: جد درجة كلا من المعاملات التفاضلية التالية.

1. $\left[\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\right]^3 = k^2\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية

2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{d^2y}{dx^2}\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - x^2\ y = \sin(x)$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة

3. $\frac{dy}{dx} + xy = x^2$

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية الجزئية [1]:

تعريف [1]:هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع دالة لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية

الصيغة العامة لها تكون من المرتبة الثانية بالشكل: -

$$\mathrm{Au_{xx}} + \mathrm{Bu_{xy}} + \mathrm{Cu_{yy}} + Du_x + Eu_y + F(u) = G(x,y)$$

مثال [1]: ليكن u المتغير التابع و x, y, z المتغيرات المستقلة. فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z)$

3. $x^2\ \frac{\partial^2 u}{dxdy} + 3\mathrm{y}\frac{du}{dx} + (\mathrm{x} - y^2)u = 0$

حل المعادلة التفاضلية [1]:

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$ إذا كانت

1.قابلة للاشتقاق n من المرات

2.تحقق المعادلة التفاضلية أي:

مثال [1]: اثبت ان $y(x) = c\ sin(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت.

الحل:

$$y(x) = c\ sin(x \Rightarrow y'(x) = c\ cos(x) \Rightarrow y''(x) = -c\ sin(x)$$

وعلى ذلك نجد ان:

$$y''(x) + y(x) = -c\ cin(x) + c\ cin(x) = 0$$

∴ تمثل حلاً للمعادلة

الحل العام والحل الخاص [2]:

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق

المعادلة التفاضلية:

اما الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل

عليه أحيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محدده.

مثلا المعادلة $y'' - 5y' + 6y = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ حيث ان

c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

ونجد ان بعض الحلول الخاصة على الصور:

$$y = e^{2x} + e^{3x},\ y = 3 + 5e^{2x},\ y = 5 - 2e^{3x}$$

تعريف [2]: الحل العام: هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت n الاختيارية ويكون مساويا للعدد

الذي يمثل رتبة المعادلة التفاضلية:

مثال [2]: اثبت ان $y(x) = c_1\ cos(2x) + c_2\ sin(2x)$

يمثل الحل العام للمعادلة $y'' + 4y = 0$

الحل: نشتق العلاقة مرتين

$$y' = -2c_1\ sin(2x) + 2c_2\ cos(2x)$$

$$y''(x) = -4c_1 cos(2x) - 4c_2\ sin(2x)$$

$$y'' + 4y = (-4c_1\ cos\ (2x) - 4c_2\ sin(2x) + 4(c_1\ cos(2x) + c_2\ sin(2x))$$

$$= 0$$

ومن ثم فأن الدالة $y = c_1\ cos(2x) + c_2\ sin(2x)$ تكون حلاً حيث ان الحل يحتوي على ثابتين

اختيارين ويكون مساويا لعدد رتبة المعادلة التفاضلية إذا فانه يمثل الحل العام.

مثال [2]: بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ يمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y' - 6y = 0$$

الحل:

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \Longrightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$\Longrightarrow y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$y'' + y' - 6y = (4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x}) = 0$$

$y'' + y' - 6y = 0$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y = e^{2x} + e^{-3x}$ ∴ الدالة

تعرف [2]: الحل الخاص: هو حل نحصل عليه م الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم معينة فمثلاً الحلول $y = \frac{8}{3} e^x$, $y = 2e^x$, $y = \frac{dy}{dx}$ حلول خاصة للمعادلة $y = e^x$

بينما $y = ce^x$ يمثل حلاً عاما لأن c ثابت اختياري.

والحل الخاص يمكن ان نحصل عليه عندما تكون هناك شروط ابتدائية موضوعة على الحل نفسه.

فمثلاً الحل للمعادلة $2x = \frac{dy}{dx}$ بحيث ان $y = 1$ عند $x = 0$ نجد ان الحل لعام $y = x^2 +$ 1 حلاً

يحقق المعادلة التفاضلية وفي نفس الوقت يحقق الشرط الموضوع على الحل وبالتالي فان هذا الحل

يكون حلاً خاصاً.

ملاحظة [2]:

أ – القيم الابتدائية فيها تكون قيمة المتغير المستقل مساوية للصفر.

ب – القيم الحدية فيها تكون قيم المتغير المستقل غير مساوية للصفر.

مثال [2]: اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'' = 6x + 2$ مع الشروط الحدية.

$$y(0) = 2, y = (2) = 8$$

الحل:

$$y'' = 6x + 2$$

$$y' = 3x^2 + 2x + A$$

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

وبالتعويض من الشروط الحدية نحصل على.

$$y(0) = 2 \Rightarrow B = 2$$

$$y(2) = 8 \Rightarrow 8 = 8 + 4 + 2A + 2$$
$$\Rightarrow A = -3$$

فيكون الحل المطلوب هو.

$$y = x^3 + x^2 + 2$$

تكوين المعادلات التفاضلية من الحل العام [2]:

تعريف [2]: إذا اعطينا الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n. نجد ان ذلك الحل يعتمد على n

من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة.

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots\dots, c_n) = 0 \dots\dots (1)$$

حيث ان $c_1, c_2, \dots\dots, c_n$ ثوابت اختيارية. وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجري n

من المشتقات للمعادلة (1)

يكون لدينا n + 1 من المعادلات عبارة عن المعادلة (1) بالإضافة الى n معادلة من العمليات التفاضلية

التي عددها n. وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة.

مثال [2]: اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = csin(x)$

الحل:

$y = csin(x) \dots\dots (1)$

$y' = ccos(x) \dots\dots (2)$

نشتق حسب عدد الثوابت

$$c = \frac{y'}{cos(x)} \dots\dots (3)$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$$y = \frac{y' sin(x)}{cos(x)}$$

$y =$ المعادلة التفاضلية∴

$y' tan(x)$

مثال [2]: اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = asin(3x) + bcos(3x)$$

الحل:

$$y' = 3asin(3x) - 3bsin(3x) \Rightarrow y'' = -9asin(3x) - 9bcos(3x)$$

$$y'' = -9\big(asin(3x) + bcos(3x)\big)$$

$$y'' = -9y \Rightarrow$$ المعادلة التفاضلية

$$y'' + 9y = 0$$

مثال [2]: اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x}$$

الحل: نشتق حسب عدد الثوابت

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$c_1 e^{2x} = \frac{y' - 3c_2\, e^{3x}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

نعوض معادلة (4) في (1) فنحصل على.

$$c_2 e^{3x} = y' - 2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

نعوض معادلة (5) في (4) فنحصل على.

$$c_1 e^{2x} = 3y - y' \dots\dots\dots (6)$$

نعوض معادلة (5) و (6) في معادلة (3) فنحصل على.

$$y'' = 4(3y - y') + 9(y' - 2y)$$

$$y'' = 12y - 4y' + 9y' - 18y$$

$$y'' = 5y' - 6y$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

المعادلة التفاضلية الخطية [2]:

تعريف [2]: تسمى المعادلة التفاضلية خطية إذا كان:
1- كل متغير تابع وكل مشتقاته من الدرجة الأولى.

2 – لا تحتوي المعادلة التفاضلية على حاصل ضرب للمتغير التابع مع مشتقاته او حاصل ضرب مشتقات مع بعضها.

وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية فأنها تسمى غير خطية.

الصور العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي.

$$\mathrm{P}_n(x)y^n + \mathrm{P}_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots \dots + \mathrm{P}_1(x)y' + \mathrm{P}_0(x)y = Q(x)$$

مثال [2]:

1-المعادلة التفاضلية $x^3y' + 3xy = \frac{\ln(x)}{x+1}$ هي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى

2- المعادلة التفاضلية $x^2\sqrt{y''} - e^{-2x}y' - 3\big(tan(x)\big)y = 0$ هي معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الثانية وذلك لوجود $\sqrt{y''}$

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى [3]:

المقدمة [3]:

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل أي يقوم على عمليات التكامل ومن المعروف

انه لا يمكن إيجاد عكس التفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة. فلا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية

حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة. ومن ذلك فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى أنواع

متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام. يمكن كتابة هذا النوع من المعادلات التفاضلية بإحدى

الاشكال الاتية:

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

او

$$g(x,y)dx + h(x,y) = 0$$

او

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

حيث ان $f.g.h$ لا تحتوي على المشتقة y'
ومع ان هذا النوع هو من المعادلات التفاضلية التي تبدو بسيطة. الا انه ليس من الممكن إيجاد حل

عام لاي منها بصورة عامه. ولا توجد طريقة عامه للحل.

طريقة فصل المتغيرات [3]:

تعريف [3]: إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

حيث ان $f(x)$ دالة في x فقط و$g(y)$ دالة في y فقط وبذلك فان عملية فصل المتغيرات تكون تحققت

ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ونستخدم التكامل المباشر فيكون الحل:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

حيث c ثابت اختياري؛ ويسمى ذلك بالحل العام؛ ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة

حسب متطلبات تبسيط الحل العام:

وإذا علم الشرط الابتدائي؛ نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلاً خاصاً.

مثال [3]: اوجد الحل العام والمنحني الخاص الذي يمر بالنقطة $(0, 0)$ للمعادلة التفاضلية

$$e^x \cos(y)\, dx + (1 + e^x) \sin(y)\, dy = 0$$

الحل: بفصل المتغيرات. وذلك بقسمة طرفي المعادلة المعطاة على $\cos(y)\ (1 + e^x)$

فنحصل على: $\frac{e^x}{1+ e^x}\, dx + \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = 0$

بالتكامل المباشر

$$\int \frac{e^x}{1+\ e^x}\ dx + \int \frac{\sin(y)}{\cos(y)} dy = 0$$

$$\ln(1+\ e^x)\ - \ln(\cos(y)) = \ \ln c$$

$$\ln \frac{1+\ e^x}{\cos(y)} = \ \ln c$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو: - $1+\ e^x = c(\cos(y))$

بالتعويض عن $y = 0$ و $x = 0$

$$1 + 1 = c \ \Rightarrow c = 2$$

ويكون الحل الخاص

$$1+\ e^x = 2\cos(y)$$

مثال [3]: جد حل المعادلة التفاضلية

$$xy\ dy\ - \frac{1+\ y^2}{1+\ x^2} dx = 0$$

الحل: - بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{y}{1+\ y^2} dy\ - \frac{dx}{x(x^2+1)} = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية ليكن $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{1+x^2}$

بمساواة الحد المطلق في الطرفين نحصل على $A = 1$

وبمساواة معامل x^2 في الطرفين نحصل على $A + B = 0 \ \Rightarrow B = \ -1$

وبمساواة معامل x في الطرفين نحصل على: $c = 0$

أي ان

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+\ x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx = 0$$

بالتكامل المباشر نحصل على

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln c$$

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = c \Rightarrow (1+y^2)(1+x^2) = cx^2$$

المعادلة التفاضلية المتجانسة [3]:

تعريف [3]: يقال ان المعادلة التفاضلية $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ متجانسة إذا كان كل

$f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا كان:

$$f(\lambda_x, \lambda_y) = \lambda^n f(x,y), y \in R$$

مثال [3]: اختبر الدالة $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

الحل: $\Rightarrow f(\lambda_x, \lambda_y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$

$\therefore f(x,y)$ متجانسة من الدرجة 2

أي المعادلة على صورة $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ تكون معادلة متجانسة

في هذه الحالة نستخدم التعويض $v = \frac{y}{x}$ أي $y = vx$ وبالتالي

$dy = xdv + vdx$ ثم تتحول المعادلة الى معادلة يمكن فصل متغيراتها. ثم تحل كما سبق

مثال [3]: اوجد الحل العام للمعادلة $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

الحل: من الواضح ان المعادلة متجانسة

∴ نستخدم التعويض $y = vx \Leftarrow dy = vdx + xdv$

$\therefore (x^2 + v^2x^2)dx - 2x^2v(vdx + xdv) = 0$

∴ بالقسمة على x^2 نحصل على

$(1 + v^2)dx - 2v(vdx + xdv)$

أي ان

$[1 + v^2 - 2v^2]dx - 2vxdv = 0$

$\therefore (1 + v^2)dx - 2vxdv = 0$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{1}{x}dx - \frac{2v}{1 - v^2}dv = 0$$

∴ بالتكامل المباشر

$\ln x + \ln(1 + v^2) = 0$

حيث $v = \frac{y}{x}$

$$\therefore x\left[1 - \frac{y^2}{x^2}\right] = c$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية $x^2 - y^2 = cx$

مثال [3]: اوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\left(x + \sin\frac{y}{x}\right)dx \; - \sin\frac{y}{x}\; dy = 0$$

الحل: من الواضح ان المعادلة متجانسة

$\therefore$ نستخدم التعويض $\quad v = \frac{y}{x} \Leftarrow \; dy = vdx + xdv$

$$\therefore (x + vx\sin v)dx \; - x\sin v \; (xdv + vdx) = 0$$

$$xdx + vx\sin v \; dx \; - \; x^2\sin v \; dv \; - xv\sin v \; dx = 0$$

نقسم على x^2 فنحصل على: - $\qquad xdx - \; x^2\sin v \; dv = 0$

بالتكامل المباشر $\qquad \frac{dx}{x} \; - \sin v \; dv = 0$

حيث ان $\quad v = \frac{y}{x} \qquad \ln x + \cos v = c$

الحل العام للمعادلة التفاضلية $\qquad \ln x + \cos\frac{y}{x} = c$

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية [4]:

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ذات معاملات خطية تأخذ الصورة

$$(ax + by + c)dx + (a_1x + \; b_1y + \; c_1)dy = 0$$

حيث ان $a\;, a_1, b\;, b_1, c, c_1$ ثوابت

ويكون هناك احتمالين.

الحالة الأولى [4]:

إذا كان المستقيمان متقاطعان أي ان

$$ab_1 + a_1b$$

ثم نجد نقطة التقاطع للمستقيمين والتي هي (h, k) ثم نفرض ان

$$x = x_1 + h \Rightarrow dx = dx_1$$

$$y = y_1 + k \Rightarrow dy = dy_1$$

نعوض عن x , y , dx , dy في المعادلة الاصلية فتتحول الى معادلة تفاضلية متجانسة وتحل بطريقة

المعادلات التفاضلية المتجانسة في نهاية الحل ونعوض عن كل

$$x_1 = x - h \quad , \quad y_1 = y - k$$

لإيجاد الحل بالمتغيرات x , y

مثال [4]: حل المعادلة التفاضلية $(2y - x - 5)dy - (3x + y + 1)dx = 0$

الحل:

$a = -1 , b = 2$
$a_1 = 3 , \ b_1 = 1$

$ab_1 \neq a_1b$

معاملات المعادلة أعلاه هي معاملات خطين مستقيمين متوازيين نجد نقطة تقاطعهما وذلك بحل المعادلتين أنيا.

$$2y - x - 5 = 0 \qquad 6y - 3x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$y + 3x + 1 = 0 \qquad y + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore y = 2\,,\ x = -1$$

$$x = x_1 - 1 \Rightarrow dx = dx_1$$

$$y = y_1 + 2 \Rightarrow dy = dy_1$$

نعوض القيم أعلاه في المعادلة الاصلية

$$[2(y_1 + 2) - (x_1 - 1) - 5]dy_1 = [3(x_1 - 1) + y_1 + 2 + 1]dx_1$$

$$(2y_1 - x_1)dy_1 = (3x_1 + y_1)dx_1$$

المعادلة أعلاه معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الأولى.

$$y_1 = vx_1$$

$$dy_1 = vdx_1 + x_1dv$$

$$(2vx_1 - x_1)(vdx_1 + x_1dv) = (3x_1 + vx_1)dx_1$$

$$[v(2v - 1) - (3 + v)]dx_1 + x_1(2v - 1)dv = 0$$

$$(2v^2 - 2v - 3)dx_1 + x_1(2v - 1)dv = 0$$

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{2v - 1}{2v^2 - 2v - 3}dv = 0$$

بالتكامل المباشر

$$\ln x_1 + \frac{1}{2}\ln(2v^2 - 2v - 3) = \frac{1}{2}\ln c$$

$$\ln x_1^2 + \ln(2v^2 - 2v - 3) = \ln c$$

$$\ln x^2 (2v^2 - 2v - 3) = \ln c \Rightarrow x^2(2v^2 - 2v - 3) = c$$

$$\because v = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\Rightarrow 2y_1^2 - 2x_1y_1 - 3x_1^2 = c$$

$$\because x_1 = x + 1 \ , \qquad y_1 = y - 2$$

$$2(y - 2)^2 - 2(x + 1)(y - 2) - 3(x + 1)^2 = c$$

الحالة الثانية [4]:

إذا كان المستقيمان متوازيان أي ان

$$ab_1 = a_1b$$

نفرض ان $z = ax + by$

نعوض قيمه $z,$ و dy بما يساويهما في المعادلة التفاضلية حيث المعادلة تتحول الى معادلة قابلة لفصل

متغيراتها. نجد الحل بدلالة z, x ثم نعوض قيمة z بدلالة x, y لإيجاد الحل العام.

مثال [4]: جد حل المعادلة التفاضلية

$$(6x - 8y - 5)dy = (3x - 4y - 2)dx$$

الحل:

$$(2(3x - 4y) - 5)dy = \big((3x - 4y) - 2\big)dx$$

∴ نفرض

$$z = 3x - 4y$$

$$\Rightarrow dz = 3dx - 4dy \Rightarrow dy = \frac{1}{4}(3dx - dz)$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية تتحول الى.

$$(2z - 5).\frac{1}{4}(3dx - dz) = (z - 2)dx$$

$$(6z - 15)dx - (2z - 5)dz = (4z - 8)dx$$

$$(2z - 7)dx - (2z - 5)dz = 0$$

بفصل المتغيرات نحصل على

$$dx\frac{2z - 5}{2z - 7}dz = 0$$

$$dx\frac{2z - 5 - 2 + 2}{2z - 7}dz = 0$$

$$dx - dz - \frac{2}{2z - 7}dz = 0$$

بالتكامل المباشر

$$x - z - \ln(2z - 7) = c$$

$$\because z = 3x - 4y$$

$$x - 3x + 4y - \ln(6x - 8y - 7) = c$$

$$2x - 4y + \ln(6x - 8y - 7) = c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية التامة [4]:

تعريف [4]: إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة على مجال التعريف لها فان التفاضل الكلي (التفاضل التام)

لهذه الدالة بـــــ $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

حيث:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

عكسيا $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ تمثل تفاضل تام للدالة $f(x,y)$ إذا تحقق شرطين.

1. $df = M(x.y)dx + N(x,y)dy$
2. $M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$

وفي هذه الحالة $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ يعطي $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

تعريف [4]: نقول ان المعادلة $M(x,y)dx + N(x.y)dy$ بأنها معادلة تفاضلية تامه إذا تحقق الشرط

اللازم والكافي.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ملاحظة [4]: من الممكن ان توجد الدالة f عن طريق حساب التكامل بالنسبة للمتغير y ونضع ثابت

التكامل كدالة في المتغيرx ولتعين ثابت التكامل نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير x .

ولإيجاد الدالة f نجري تكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة في y ولتعين ثابت التكامل، نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y .

مثال [4]: حل المعادلة التفاضلية $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$

الحل:

$M = 2xy \quad , \quad N = x^2 - 1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2X \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2X$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

∴ المعادلة التفاضلية تامة

∴ يوجد دالة f تحقق $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$

حيث $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

والحل العام لها $f = c$

ولإيجاد الدالة f نجري التكامل بالنسبة للمتغير x ونضع ثابت التكامل كدالة للمتغير y .

$$f = \int 2xydx = x^2y + \emptyset(y)$$

ولتعين ثابت التكامل $\emptyset(y)$ نفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير y .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \emptyset'(y)$$

$$x^2 - 1 = x^2 + \emptyset'(y) \Rightarrow \emptyset'(y) = -1 \Rightarrow \emptyset(y) = -y$$

∴ الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y - y = c$$

الفصل الثالث

أهمية المعادلات التفاضلية واستخدامها في مجال الكيمياء:

مقدمة:[5]:

في مجال الكيمياء والهندسة، يتم تحديد العديد من العمليات والوظائف الصناعية بواسطة المعادلات التفاضلية. قد تختلف فائدة وملائمة هذه المعادلات في مواضيع مختلفة وتحتوي على العديد من المعلمات.

في هذا الموضوع سوف نبين أهمية استخدام المعادلات التفاضلية لتحديد الديناميكا الحرارية المختلفة الخصائص الفيزيائية للمخاليط الثنائية مثل الحجم المولي والزائد، الانضغاط المتساوي، الحجم المولي الجزئي، المقاومة الصوتية، الطول الحر الجزئي، الانحراف في سرعة الصوت بالموجات فوق الصوتية وما إلى ذلك .
استخدمت الرياضيات كأداة قوية لحل المشكلة في مجالات البحوث الهندسية والكيميائية. خصوصا في مجال الكيمياء والهندسة الكيميائية التحليلية كانت الحلول الرياضية للمشاكل محدودة. خاصة مشاكل التوصيل الحراري ونقل الكتلة والانتشار وما إلى ذلك. يتم حلها باستخدام المعادلات التفاضلية الرياضية .

بشكل عام، نمذجة اختلاف الكمية المادية، مثل درجة الحرارة والضغط والإزاحة والسرعة والاجهاد، السلالة، أو تيار أو الجهد أو تركيز الملوثات مع تغيير الوقت أو الموقع، أو كليهما سيؤدي إلى معادلات تفاضلية .
وبالمثل، دراسة اختلاف بعض الكميات المادية على كميات الفيزيائية الأخرى سيؤدي أيضا الى المعادلات التفاضلية .
في الواقع العديد من المواضيع الهندسية مثل الاهتزاز الميكانيكي أو الديناميكيات الهيكلية، ونقل الحرارة أو نظرية الدوائر الكهربائية التي تأسست على نظرية المعادلات التفاضلية .
"المعادلات التفاضلية مهمة للغاية في تاريخ الرياضيات والعلوم، لأن قوانين الطبيعة يتم التعبير عنها بشكل عام من حيث المعادلات التفاضلية.
الوصف الرياضي للعمليات المختلفة في الكيمياء والفيزياء ممكنة من خلال وصفها بمساعدة المعادلات التفاضلية التي تعتمد على نموذج بسيط من الافتراضات وتحديد الشروط الحدودية.

في الكثير من الحالات، تكون المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى تصف بشكل كامل التغير dy للدالة $y(x)$ وغيرها من الكميات.

إذا كانت y كمية تعتمد على x، فقد يكون النموذج كذلك بناء على افتراضات التالية النقص التفاضلي من المتغير y يتناسب مع زيادة التفاضلية لمتغير آخر هنا x أي $-dy \sim dx$.
يجب أن يكون هنا نقصان تعتمد على الدالة y نفسها: $-dy \sim dx$ ومع a الثابت غير المعروف حتى الآن a، ينتج عنه المعادلة: $dy = -aydx$.
وهكذا يتبع الدرجة الأولى العادية الخطية المتجانسة. المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + ay = 0$

تطبيق المعادلات التفاضلية في القيم التجريبية لسرعة وكثافة الموجات فوق الصوتية ومخاليط ثنائية عند درجة الحرارة مختلفة مع الخلط الخاص بها [5]:

تستخدم الكسور (x_1) لحساب العلاقات التالية:

(a) تم استخدام قيم الكثافة لحساب زيادة الاحجام المولية VE باستخدام المعادلة التالية:

$$V^E = \frac{X_1M_{1+}X_2M_2}{\rho_m}\left\{\frac{X_1M_1}{\rho_1} + \frac{X_1M_2}{\rho_2}\right\} \dots\dots\dots (1)$$

VE (cm3.mol−1) هو حجم المولي, حيث ρm هي كثافة الخليط

و(X_2, M_2, ρ_2) و (X_1, M_1, ρ_1) هي جزء الخلد الوزن الجزئي وكثافة المكونات النقية 1و2 على
التوالي. يمكن رسم الرسم البياني (قطع مكافئ) باستخدام قيم VE المحسوبة فيما يتعلق بكسر الخلد قيم X_1

الزيادة او النقصان في مستوى الصوت قيد التشغيل يمكن ان يؤخذ خلط السوائل كمعيار وقياس التفاعل الجزئي.

(b) يتم حساب الانضغاط المتساوي (K_s) باستخدام علاقة لا بلاس (انها جزئية من الدرجة الثانية)
المعادلة التفاضلية

$$K_s = U^{-2}\rho^{-1} \dots\dots (2)$$

حيث U هي سرعة الموجات فوق الصوتية و ρ هي الكثافة.
(c) الانحراف في الانضغاط المتساوي (ΔKS) تم الحصول عليها باستخدام العلاقة التالية:

$$\Delta KS(TP_a - 1) = K_s12 - \varphi 1K_s1 - \varphi 2K_s2 \dots\dots (3)$$

حيث K_s12 هو الخواص التجريبية الانضغاط الخليط

$K_s2, K_s1, \varphi 2, \varphi 1$ هي كسور حجمية متساوية انضغاطية للمكونات النقية على التوالي

φ_i هو حجم الحالة المثالي وهو التي تحددها بالعلاقة

$$\varphi_i = \frac{X_i V_i}{\sum_{i=1}^{2} X_i V_i} \dots\dots\dots (4)$$

(d) الانحراف في سرعة الصوت بالموجات فوق الصوتية Δ_u محسوبة باستخدام العلاقة التالية

$$\Delta_u = u(x_1 u_1 | x_2 u_2) \dots\dots\dots (5)$$

حيث U هي السرعة التجريبية بالموجات فوق الصوتية للخليط $x_1, u_1, x_{2,} u_2$ هي كسور مولية وسرعة

الموجات فوق الصوتية للمكونات النقية *1&2* على التوالي.

(e) في محاولة لاستكشاف طبيعة التفاعلات مختلف المعلمات الديناميكية الحرارية مثل الطول الحر بين الجزيئات ؛ المقاومة الصوتية Z من المخاليط الثنائية تحسب باستخدام المعادلة التالية

$$l_f = K\rho^{\frac{1}{2}} \dots\dots (6)$$

حيث L_f هو الطول الحر بين الجزيئات، K هو الانضغاطية المتساوية و ρ هي الكثافة.

المعاوقة الصوتية محسوبة باستخدام العلاقة التالية:$Z = u\rho$ ..... (7)
حيث Z هي المعاوقة الصوتية، u هي سرعة الصوت بالموجات فوق الصوتية، ρ هي الكثافة.

(f) طول الضرس الزائد الحر L_f^E محسوبة باستخدام العلاقة:

$$L_f^E = L_f - \left(X_1 L_{f_1} + X_2 L_{f_2}\right) \dots\dots\dots (8)$$

$X_1, X_2, L_{f_1}, L_{f_2}$ هي الكسر الجزئي والطول الحر بين الجزيئات والطول للمكونات النقية 1&2 على التوالي

(g) يتم حساب الانحراف في المعاوقة الصوتية باستخدام العلاقة.

$$\Delta Z = Z - (X_1 Z_1 + X_2 Z_2) \dots\dots\dots (9)$$

ΔZ الانحراف في المعاوقة الصوتية
Z هي الممانعة الصوتية للخليط X_1, X_2, Z_1, Z_2 هي جزء الخلد والممانعة الصوتية النقية للمكونات 1&2 على التوالي.

استخدام المعادلات التفاضلية في الحجم المولي [5]:

يتم تحليل سلوك المخاليط بشكل أكبر عن طريق حساب الاحجام المولية الزائدة الجزئية للمكونات
Vm_1^E, Vm_2^E

لكل خليط ثنائي يتم حسابها فيما يتعلق بالكسور الخلدية عند درجات حرارة مختلفة الاحجام المولية الجزئية

$V_{m,1}^*$ للمكون 1 و $V_{m,2}^*$ للمكون 2 في الخليط على مدى كامل التركيب يتم حسابها باستخدام العلاقات التالية:

$$V_{m,1}^* = V_m^E + V_{m,1}^* + X_2 \left(\frac{\partial V_m^e}{\partial X_1}\right) T, P \dots\dots (10)$$

$$V_{m,2}^* = V_m^E + V_{m,2}^* - X_1 \left(\frac{\partial V_m^E}{\partial X_1}\right) T, P \dots\dots\dots (11)$$

حيث $V_{m,1}^*$ و $V_{m,2}^*$ هي احجام مولية من المكونات النقية 1&2

ومشتق من $\frac{\partial V_m^E}{\partial X_1}$ تم الحصول عليها باستخدام المعادلات التالية:

$$V_{m,2}^{\circ} = V_{m,2}^* + x_1^2 \sum_{i=0}^{n} A_i (1 - 2x_1)^i + 2x_1 x_2^2 \sum_{i=1}^{n} A_i (1 - 2x_1)^{i-1} \dots\dots (12)$$

$$V_{m,1}^{\circ} = V_{m,1}^* + x_2^2 \sum_{i=0}^{n} A_i (1 - 2x_1)^i + 2x_1 x_2^2 \sum_{i=1}^{n} A_i (1 - 2x_1)^{i-1} \dots\dots (13)$$

الاحجام المولية الجزئية الزائدة $V_{m,1}^E, V_{m,2}^E$ يتم حساب نطاق التكوين باستخدام العلاقات ادناه

$$V_{m,1}^{\circ,E} = V_{m,1}^{\circ} - V_{m,1}^{*} \dots\dots\dots (14)$$

$$V_{m,2}^{\circ,E} = V_{m,2}^{\circ} - V_{m,2}^{*} \dots\dots\dots (15)$$

$$V_{m,2}^{\circ,E,\infty} = V_{m,2}^{\circ,\infty} - V_{m,2}^{*} \dots\dots\dots (16)$$

$$V_{m,1}^{\circ,E,\infty} = V_{m,1}^{\circ,\infty} - V_{m,1}^{*} \dots\dots\dots (17)$$

قيم الحجم المولي الجزئي الزائد في ما لا نهاية التخفيف الخامس للأنظمة الثنائية المختارة في

يمكن حساب درجات الحرارة مختلفة لمعرفة القوة من التفاعلات الجزئية. $V_{m,1}^{\circ,E,\infty}, V_{m,2}^{\circ,E,\infty}$

استخدام المعادلات التفاضلية في معادلة ريدليش كيستر[5]:

تباين V^E , Ks^E , $\Delta u, \Delta z$ و LEF مع الكسر الجزئي تم تركيبها على معادلة ريدليش كيستر من النوع

$$Y^E = X_1X_2\{a0 + a1(x_1 - x_2) + a2(x_1 - x_2)^2\} \dots\dots (18)$$

حيث قيم $a0, a1, a2$ هي معاملات معادلة كثيرة الحدود ويمكن الحصول عليها بطريقة المربعات الصغرى.

يتم حساب الانحراف المعياري باستخدام المعادلة

$$\sigma(Y^E) = \frac{\{\sum_{i=1}^{n}(Y_{obs}^E - Y_{cal}^E)^2\}^{\frac{1}{2}}}{n - m} \dots\dots. (19)$$

حيث n هو العدد الإجمالي للنقاط التجريبية وm هو عدد المعاملات.

معادلة تحتوي على متغيرين مستقلين او اكثر والمشتقات الجزئية فيما يتعلق بهذه المتغيرات تسمى
المعادلة التفاضلية الجزئية

نادرا ما يكون كتابة ملف الحل الكامل للمعادلة. تستخدم شروط الحدود للحصول على الحل المطلوب
من خلال المعادلات التفاضلية.

ستكون نقطة البداية في حل المشكلة هي المشكلة المادية التي تتضمن الحل من خلال المشتقات الجزئية
يمكن استخدام المعادلات أعلاه لحساب الحل والحصول عليه ويجب تفسير المحلول الذي تم الحصول عليه
لمعرفة سلوك التفاعلات بين الجزيئات بين الخلائط الثنائية السائلة الايونية والعضوية في الخواص الديناميكية الحرارية الزائدة.

تطبيقات على المعادلات التفاضلية [6]:

للمعادلة التفاضلية (بصورة عامة) أهمية كبيرة من الناحية العلمية اذ لا تخلو مسألة من المسائل العلمية من المعادلة التفاضلية. يتوقف حل تلك المسألة العلمية على حل معادلتها التفاضلية.
كما ان الدراسة العلمية للمواضيع كثيرة كالفيزياء والكيمياء ومختلف فروع الهندسة تحتم الالمام بهذا الفرع
من فروع الرياضيات حيث تتحول الظواهر والخواص الطبيعية الى معادلة تفاضلية وبحل تلك المعادلة التفاضلية نحصل على القوانين الرياضية التي تربط تلك الظواهر. وان أهمية المعادلة التفاضلية لا تقتصر
على العلوم الطبيعية فقط، بل انها تكون مطلوبة من الدارسين للعلوم المالية ولاجتماعية وغيرها من فروع المعرفة وهناك امثلة وشواهد كثيرة على ذلك كما تظهر من الأمثلة التي سنوردها

مثال [6]: خزان يحتوي على 100 لتر ماء مالح حيث اذيب فيه 50 باوند من الملح وكان يدخل الى هذا الخزان ماء بمعدل (6) لتر في الدقيقة الواحدة وكان تركيز هذا الماء الداخل هو 2 باوند في كل لتر
وقد جعل المزيج متجانسا بالدوران المستمر. فاذا علمت ان هذا المزيج يخرج من الخزان في نفس الوقت بمعدل (4) لتر في الدقيقة
جد كمية الملح في الخزان في أي لحظة t?

الحل:

ليكن x كمية الملح في المحلول بعد t من الدقائق؛ وعلية يكون مقدار المزيج الموجود في الحظة t هو :

$[100 + (6 - 4)t]$ غالون

والتركيز عند ذلك الوقت يكون: $\frac{x}{100+2t}$ باوند\ لتر

وعليه يكون $\frac{dx}{dt} = 2(6) - \left(\frac{x}{100+2t}.4\right)$

حيث ان معدل تغير الملح في المحلول في الزن t هو عبارة عن كمية الملح الداخل في الدقيقة مطروحا منه كمية الملح الخارج منه في الدقيقة الواحدة.

ان المعادلة التفاضلية السابقة الخطية وهي تحت الشرط الابتدائي:

$x = 50$ عندما $t = 0$ وبعد حلها واستخدام الشرط الابتدائي نجد ان:

$$x = 2(100 + 2t) - \frac{15(10^5)}{(100 + 2t)^2}$$

فمثلا ان كمية الملح الموجود في الخزان بعد 50 دقيقة ستكون:

$$x = 2\big(100 + 2(50)\big) - \frac{50(10^2)}{\big(100 + 2(50)\big)^2}$$

$$x = 362.5 \qquad \text{لتر}$$

تطبيقات المعادلات التفاضلية في مسائل الخلط ومسائل البرود [6]:

نتناول أيضا في هذا البحث بعض تطبيقات الكيمياء. سوف نركز على مسائل الخلط بين محلولين مختلفين

في التركيز ومسائل البرود. سنبدأ بالمسألة المتعلقة بقانون نيوتن في التبريد:

لكن لدينا جسم درجة حرارته هي $T(t)$ درجه فهرنهايت $(T(t)^\circ F)$ عند زمن معين t

بالطبع ان معدل تغير درجة حرارة الجسم $T(t)$ بالنسبة للزمن t هو $\frac{dT}{dt}$.

نفرض ان درجة حرارة الوسط المحيط بالجسم هي ثابت $T_1^\circ F$ (فهرنهايت).

ان قانون نيوتن في التبريد ينص على: معدل تغير درجة حرارة الجسم $T(t)$ بالنسبة للزمن t يتناسب مع حاصل الفرق بين درجة حرارة الجسم $T(t)$ ودرجة حرارة الوسط المحيط بالجسم

أي ان $\frac{dT}{dt} = k(T - T_1)$ حيث K ثابت التناسب.

المعادلة السابقة من الرتبة الأولى ويمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات؛ كما هو موضح

$$\frac{dT}{T - T_1} = Kdt$$

بأجراء عملية التكامل نحصل على:

$$\ln|T - T_1| = kt + c_1$$

حيث ان c_1 ثابت التكامل. ومنها نحصل على: $T = T_1 + ce^{kt}$

حيث ان $c = e^{c_1}$ هي الثابت.

مثال [6]: لتكن درجة حرارة الغرفة عند البدء؛ أي عندما $t = 0$ ؛ هي $66^\circ F$. بعد ساعتين اثنتين

أصبحت درجة حرارة الغرفة $63^\circ F$. كم تصبح درجة الحرارة بعد 10 ساعات من البدء؛ إذا علمت ان

درجة حرارة الوسط المحيط هي $32^\circ F$ ؟

الحل:

نبدأ من المعادلة $T = T_1 + ce^{kt}$ ؛ وبالتعويض بالمعطيات نجد ان الحل هو

$$T = 32 + ce^{kt}$$

وبالتعويض بالشرط الابتدائي $T(0) = 66$ ؛ نحصل على $66 = 32 + ce^{k(0)}$

حيث ان الثابت $c = 34$ ومنها يصبح الحل $T = 32 + 34e^{kt}$

لان عندما $t = 0$ ان $T = 63$ ؛ ومنها نحصل على $63 = 32 + 34e^{2k}$ وبحالها نحصل على قيمة

الثابت: $k = \frac{1}{2}\ln\frac{31}{34} = \frac{1}{2}\ln 0.911765 = -0.046187$

اذاً الحل هو $T = 32 + 34e^{-0.046187(t)}$ وبعد 10 ساعات تكون درجة الحرارة:

$$T = 32 + 34e^{-0.046187(10)} = 53.4^{\circ}$$

المصادر

1. أسماعيل بوقفه وعايش النادرة " المعادلات التفاضلية العادلة حلول وتطبيقات" جامعة العلوم والتكنولوجيا الجمهورية اليمنية (2013)

2. مجدي أمين كتبي ومروان كتبي "الراشد لحل المعادلات التفاضلية العادلة " مكتبة الفهد الوطنية (1999)

3. محمد أبو دهب خضيري وظاهر عبد الحميد نوفل "مقدمة في المعادلات التفاضلية " الطبعة الأولى (2020)

4. حسن مصطفى العريفي وآخرون "المعادلات التفاضلية "الجزء الأول " دار النشر مكتبة الرشيد الطبعة الأولى (2006)

5- *GUDRUN SCHOLZ, FRITZ SCHOLZ "First Order different equations in chemistry" Chem texts, March* (2015)

6- *TEBBUTT, 2nd end. Wily, Hoboken "Basic mathematics for chemists'' P* (1998).