جمهورية العراق

وزارة التعليم والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية/قسم الرياضيات

تحويلات فورير وتطبيقاتها

بحث

مقدم الى مجلس كلية التربية جامعة ميسان وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

اعداد الطالب

حيدر سالم وادي

اشراف

أ.م.دعلاء نجم عبدالله

2025م **1446ه**

2025 م

1446 هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

((يرفع الله الذين امنوا منكم والذين اوتوا العلم

درجت ۞ والله بما تعملون خبير))

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة(11)

الاهداء

الى من بلغ الرسالة وادى الامانه ونصح الامة الى نبي الرحمة محمد(ص)

اهدي هذا الجهد المتواضع

الى من كللة الله بالهيبة والوقار.....من علمني العطاء بدون انتظار

من احمل اسمه بكل افتخار.....أبي العزيز

الى ملاكي في الحياة ...الى معنى الحب والحنان والتفاني ......

الى من كان دعائها سر نجاحي ....أمي الغالية

الى من حبهم يجري في عروقي ويلهج بذكراهم فؤادي....

اخوتي واخواتي

الى زوجتي العزيزه واولادي الاحباء

اود ان اعبر لكم على مدى امتناني وحبي لكم.وانتم النور الذي يضي حياتي والسند الذي يجعلني اقوى كل يوم .زوجتي العزيزه شكرا لك على حبك واهتمامك ودعمك الدائم . فأنتي نعمه من الله افتخر بها . اولادي الاحباء انتم فرحتي واجمل ما في حياتي اراكم تكبرون امامي بكل حب وسعاده و هذا اعظم انجاز لي

اسأل اللة ان يحفظكم لي

الى اصدقائي الاعزاء

اود ان اعبر لكم عن خالص شكري واتمتناني لوجودكم في حياتي انتم اكثر من مجرد اصدقاء.

الشكر والتقدير

لابد لنا ونحن خطواتنا الاخيره في الحياة الجامعية من وقفة الى الاعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع اساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين جهودا كبيره في بناء جيل الغد لتبعث الامه من جديد وقبل ان نمضي نقدم ايات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة للذين حملوا اقدس رسالة في الحياة الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفه

شكرا لأستاذي اهل الفضل الذي غمرني بالتقدير والتوجية والنصيحه والذي وقف معي دائما طوال رحلتي الجامعيه

((رواء عبد الباسط))

شكرا لأستاذي يد العلم وسعتها الذي تعلمت منه الكثير والذي مدني بالعلم وساعدني في اعداد بحثي

الدكتورعلاء نجم

والى جميع الاساتذه الافاضل

((ان قلت شكرا فشكري لن يوفيكم حقا سعيتم مكان السعي مشكورا))

الباحث

حيدر سالم وادي

المحتويات

الخلاصة

يتكون هذا البحث من ثلاث فصول روتناولنا في الفصل الاول مقدمة عن المعادلات التفاضلية وكذلك تعرفنا على انواع المعادلات وتكون على نوعين معادلات التفاضلية الاعتيادية وكذتك معادلات التفاضلية الجزئية وكذلك مقدمة عن متسلسلة فورير وتحويلات فورير.

وفي الفصل الثاني تناولنا بعض التعاريف تحويل فورير وسلسلة فورير المتعامده وبعض التحويلات التي تحتوي داله دلتا وكذلك تعرفنا على خصائص تحويل فورير وكذلك مبرهنة بارسفال وكذلك معكوس تحويل فورير وبعض التحويلات جيب وجيب تمام

وفي الفصل الثالث تناولنا بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية لتحويل فورير المتقطع وتحويل فورير السريع وكذلك معكوس تحويل فورير المتقطع ومعرفة التمثيل المصفوفي لتحويلات فورير في حالة المتقطع

الفصل الاول

مقدمة المعادلات التفاضلية [1]

ما زالت معادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائيه والهندسية والحيوية بالاضافة الى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت اهميتها في جميع المجالات العلوم وتطبيقاتها.

لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية وهناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضليه حتى طرق العددية وطريقة العناصر المنتهية ليستا طرق عامة لحل جميع المعادلات التفاضلية في كل الشرائط .

معادلات التفاضلية الاعتيادية [2]:بانها المعادلة التفاضلية التي تحتوي على متغيرين فقط فيكون احداهما مستقل والاخر معتمد وبصورة عامه يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الاعتيادية في المتغير المعتمد y والمتغير المستقل x

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$$

معادلات التفاضلية الجزئية[3] :هي معادلات تحتوي على مشتقات جزئية وخلافا للمعادلات التفاضلية الاعتيادية حيث يعتمد الدالة المجهولة على متغير واحد فقط فأن الدالة في المعادلات التفاضلية الجزئية تعتمد على عدد من المتغيرات مثل درجة الحرارة u(x’y) حيث تعتمد على الموضع x والزمن t

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

المقدمة متسلسلة فورير[4]

سميت هذا المتسلسلات بهذا الاسم نسبة الى العالم الفرنسي جوزيف فورير (1768-1830)الذي حقق ةتطورات مهمة في دراسة المتسلسلات المثلثيه , بعد ان تعرضن لبحث بدائي من طرف كل من لبوتهارت اويلر ولورن دالمبير ودانييل برنولي ابدع فورير هذا المعادلات من اجل حلحلة معادلة الحراره في صفيحة معدنية ناشرا نتائجة الاولى في عام 1807 م , في عمل لة عنوانه بحث حول انتشار الحرارة في الاجسام الصلبة رغم ان الهدف الاساسي الذي حفز تطوير متسلسلات فورير هو حلحلة معادلة الحرارة تبين واضحا ان نفس التقنية قد تستعمل في مجالات اخرى واسعة في الرياضيات والفيزياء وبالتحديد المجالات الاتي يتعلقن بمعادلات التفاضلية الخطية بمعاملات ثايته

في حين وجدت تحويلا فورير في البداية معظم التطبيقات في حل المعادلات التفاضلية الجزئية فمن المحتمل ان يكون الصحيح القول ان طرق تحويل فورير تستخدم اليوم بشكل كبير في تحليل الاشارات والانظمة.

ان سلسلة فورير هي توسيع وظيفة الدالة باستخدام مجموع لا حصر له من جيب روجيب تمام .وضعت سلسلة فورير في البدايات عند حل المعادلات الحراره

تحويل فورير المتقطع هي عملية تحويل تمكننا تحويل الاشارات المتقطعه في فضاء الزمن اللى اشارة في فضاء الترددات وهي شبيهة ومستقاة من تحويل فورير الذي يقوم بتحويل الاشارة من فضاء الزمن الى فضاء الترددات .وتكون عملية التحويل بواسطة عددم محدود ومنتهي من نقاط الدالة او الاشاره وهذا ما يميز العملية المتقطعة.

الفصل الثاني

تحويل فورير[4]

هو الامتداد الطبيعي لسلسله فورير الى دالة $f(t)$ ذات فترات لا نهائية ولاثبات ذلك ضع في اعتبارك داله دوريه $f(t)$ ذات قيمة T 2ما يسمى بشروط ديرشليت اذا كان التكامل $\int_a^b /f(t)/dt$ موجود فان هذا سلسلة فورير

القانون العام لتحويل فورير يعطي بالصيغه التالية

$$f(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

مثال:جد تحويل فورير للدالة

$$F(w)=\begin{cases}1 & |t| \\ 0 & |t|\end{cases} dt$$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{a} 0e^{-i\omega t}dt \quad + \int_{-a}^{a} 1e^{-i\omega t}dt + \int_{a}^{\infty} 0e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{e^{iwt}-e^{-i\omega t}}{wi}$$

$$=2a=\frac{2\sin wa}{w}\ \sin(wa)$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(wa)}{w}e^{iwt}dw \ =\begin{cases}1 & |t|<a \\ 0 & |t|>a\end{cases}$$

سلسلة فورير المتعامدة[4]

تتكون سلسلة فورير من النظام المثلثي وهو نظام متعامد ،وكان التعامد ضروريا في الحصول على صيغ اويلر لمعاملات فورير كما ستوفر لنا تعامد صيغ معاملات فورير المعمه المطلوبه بما في ذلك سلسلة فورير ليجندر – سلسلة فورير بيسل

1) $F(x)=\sum_{m=0}^{\infty} am\, ym(x) \quad a_0 y_0(x) + a_1 y_1 + \cdots$

ويطلق على هذا الاسم متسلسلة متعامده او التوسع المتعامد او متسلسله فورير المعممه اذا كانت y_m هي دوال ذاتية. فاننا نطلق على (1) اسم التوسع دالة ذاتية في (1) نستخدم m مره اخرى للجمع حيث سيتم استخدام n كترتيب ثابت لدوال بيسل

نظرا ل f(x) يتعين علينا تحديد معاملات في(1) والتي تسمى ثوابت فورير ل f(x)بالنسبة y_0, y_1

$$(f,y_n)=\int_a^b r f y_n\, dx = \int_a^b r\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m\right) y_n dx$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_a^b r y_m y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (y_m, y_n)$$

$$a_n(y_n, y_n) = a_n||y_n||^2 \qquad thus \quad (f, y_n) = a_n||y_n||^2$$

بافتراض ان جميع الدوال y_n لها معيار غير صفري يمكننا القسمة على $||y_n||^2$

كتابة لتكون متفقة مع (1) نحصل على الصيغة المطلوبه لثوابت فورير

2) $a_m = \frac{(f, y_n)}{||y_n||2} = \frac{1}{||ym||} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx \qquad (n = 1,2,3, \ldots.)$

تعمم هذا الصيغه صيغ اويلر (6)

تحويلات التي تحتوي دالة دلتا [5]

من بين العديد من دوال التي لها تحويل فورير هناك دالة مهمه بشكل خاص و هي دالة دلتا سنستخدمها لحل المعادلات التفاضليه نعرفها على انها معكوس تحويل فورير

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}dw$$

F(t), $\lvert t\rvert<\infty$	F(w)
1) e^{-at} H(t) , a>0	$\frac{1}{a+wi}$
2) $e^{at}H(-t)\,,a>0$	$\frac{1}{a-wi}$
3) $te^{-at}\,H(t),a>0$	$\frac{1}{((a+wi)^2}$
4) $te^{at}\,H(t),a>0$	$\frac{-1}{(a-wi)^2}$
5) $t^n e^{-at}\,H(t),Re(a)>0\,,n=1,2,\ldots.$	$\frac{n!}{(a+wi)^{n+1}}$
6) e^{-at} , $a>0$	$\frac{2a}{w^2+a^2}$
7) $te^{-a\lvert t\rvert}$, $a>0$	$\frac{-4awi}{(w^2+a^2)^2}$
8) $\frac{1}{1+a^2t^2}$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}e^{-\lvert w\rvert\lvert a\rvert}$
9) $\frac{\cos at}{1+t^2}$	$\frac{2}{\pi}\left(e^{-\lvert w-a\rvert}-e^{-\lvert w+a\rvert}\right)$

مبرهنة بارسفال[6]

اذا كانت الدالة f(t) دورية مع الفتره T ولها معاملات فورير فان نظرية بارسفال تنص على

$$\int_{-L}^{L}[f(t)]^{2}dt = L\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum(a_n^2 + b_n^2)\right\}$$

البرهان:

F(t)=$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L})$.............(1)

$[f(t)]^2 = \frac{a_0}{2}f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n f(t)\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n f(t)\sin\frac{n\pi t}{L})$..........(2)

وبتكامل طرفي معادلة (2) بفترة (-L , L)

$\int_{-L}^{L}[f(t)]^2dt = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L} +$
$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}$

.........(3)

$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)dt \quad \rightarrow \quad \int_{-L}^{L}f(t)dt = La_0$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad \rightarrow \quad \int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = La_n$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt \quad \rightarrow \quad \int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt = Lb_n$

ونعوض التكاملات في المعادله(3)

$\int_{-L}^{L}[f(t)]^2 = L\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}La_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}La_n^2$

$\int_{-L}^{L}[f(t)]^2dt = L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum(a_0^2 + b_n^2\,\right]$

وتسمى هذا الصيغه بارسفال

معكوس تحويل فورير[5]

بعد تركيز على تحويل فورير في الاقسام السابقه سنظهر بتفصيل تحويل فورير العكسيى

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{ipx}dp$$

مثال:اوجد تحويل فورير العكسي للدالة

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-p^2}{u}}$$

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{ipx}dp$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-p^2}{a}}\,e^{-ipx}dp$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-p^2}{u}}\,dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{u}(p^2-4ixp+4i^3x^3-4i^2x^2)}dp$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{4}(p^2-4ixp+4i^2x^2)+i^2x^2}\,dp$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{u}(p-2ix)^2}\,dp$$

Let p-zix=z $\rightarrow$ $dp = dz$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{4}(p-zix)^2}\,dp=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{4}z^2}\,dz$$

Let I=$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-1}{4}z^2}dz = 2\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}}dz$

بصيغه القطبية

$$r^2 = z^2 + y^2 \qquad , \qquad dzdy = rdrd\theta$$

$$I^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}e^{\frac{-1}{4}}rdrd\theta$$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2e^{-\frac{1}{4}}]_0^{\infty}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8\frac{\pi}{2} = 4\pi$

تحويلات الجيب التمام والجيب فورير[5]

يتعلق تحويل الجيب التمام بالدوال الزوجية . نحصل عليها من تكامل جيب تمام

$F(x)=\int_0^{\infty} A(w)\cos wx\, dx$

$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos wv\, dv$

$f_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\, dx$

اما التحويل فورير العكسي للدالة

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_c(w)\cos wx\, dx$

جدول تحويلات فورير[5]

تحويل الجيب التمام

$F(x)$	$f_c(w)$
$\begin{cases}1 & if < 0 \;\; x < a\\ 0\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin aw}{w}$
$x^{a-1} \quad (0<x<1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w^a}\cos\frac{aT}{2}$
$e^{-ax} \quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{a}{a^2+w^2})$
$e^{-ax^2} \quad (a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{\frac{-w^2}{4a}}$
$x^n e^{-ax} \quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}\mathrm{Re}(a+iw)^{n+1}$
$\cos(ax^2) \quad (a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\cos(\frac{w^2}{4a}-\frac{\pi}{u})$
$\sin(ax^2) \quad (a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\cos(\frac{w^2}{ua}+\frac{\pi}{u})$
$\frac{\sin ax}{x} \quad (a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;(1-u(w-a))$

مثال: جد تحويل فورير لجيب تمام

$$f(x)\begin{cases}1 & if \ \ 0<x<1\\ -1 & if \ 1<x<2\\ 0 & if \ \ \ x>2\end{cases}$$

Sol

$$f_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \cos wx\, dx-\int_1^2 \cos(wx)dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin wx}{w}\right]_0^1-\left[\frac{\sin wx}{w}\right]_1^2$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin w}{w}-\frac{\sin 0}{w}\right]-\left[\frac{\sin 2w}{w}-\frac{\sin 1w}{w}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin w}{w}\right]-\frac{\sin 2w-\sin w}{w}]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin w-\sin 2w+\sin w}{w}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{2\sin w-\sin 2w}{w}\right]$$

تحويل فورير لجيب[5]

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx$$

اما التحويل للجيب فورير

F(x)=$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x) \sin wx \, dx$

مثال:جد تحويل فورير للجيب

F(x)=$\begin{cases} x^2 & if \quad 0 < x < 1 \\ 0 & if \quad x > 1 \end{cases}$

Sol:

$$f_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1} x^2 \sin wx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{x^2 \cos wx}{w} + \frac{2x \sin wx}{w^2} + \frac{2 \cos wx}{w^3}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{\cos w}{w} + \frac{2 \sin w}{w^2} + \frac{2 \cos w}{w^3} - 2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{\cos w}{w} + \frac{2(w \sin w + \cos w)}{w^3}\right)$$

جدول تحويل الجيب[5]

F(x)	$f_{s(w)}$
$\begin{cases} 1 & if\ \ 0 < x < a \\ 0 & o.w \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1-\cos aw}{w}\right]$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{w}}$
$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	$2\sqrt{w}$
$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{(a)}{w^a}}$
$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w}{a^2+w^2}\right)$
$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}}\ \ Im(a+iw)^{n+1}$
$xe^{-ax} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{\frac{3}{2}}}e^{-w\frac{2}{ua}}$
$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}u(w-a)$

الفصل الثالث

خصائص تحويل فورير[6]

الخاصية الاولى : خاصية الخطية :

هي خاصية أساسية من خواص تحويل فوريية لتكن g(t , (f(t) هي دوال تحويل فورييه G(w) ,F(w) على التوالي و لتكن a , b ثوابت حقيقية وهكذا نرنا ان معامل هو معامل خطي و واضح ايضا تحويل فورييه $\mathscr{F}$ إيجاد االلمر ذاته لمعامل معكوس التحويل.

اى ان

$$\mathscr{F}[a\, f(t)\ \pm b\ g(t)] = a\ \mathscr{F}[f(t)]\ \pm b\ \mathscr{F}[g(t)] = a\ F(j\omega)\ \pm b\ G(j\omega)$$
$$= (t)\, e^{-i\omega t}\, dt \pm b \int g(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$
$$= a\ F(j\omega) \pm b\ G(j\omega)$$

مثال 1-جد $F\{u(t)e^{-t} + u(t)e^{-2}\}$

الحل:

$$\mathscr{F}\{u(t)e\ -2t\ \} = 1\ /1+j\ w$$
$$\mathscr{F}\{u(t)e^{-2t}\} = u(t)e^{-2t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$
$$\mathscr{F}\{u(t)e^{-2t}\} = e^{-(2+j\omega)t}\, dt$$
$$\mathscr{F}\{u(t)e\ -2t\ \} = [\ e\ -(2+j\omega)t/\ -(2+j\omega)\ ]\ \infty\ 0 = 1/\ 2 + j w$$
$$\therefore \mathscr{F}\{\ u(t)e\ -t + u(t)e\ -2\ \} = 1\ /+ j\omega + 1/\ 2 + j w$$
$$= 2 + j\omega + 1 + j\omega/\ (1 + j\omega)(2 + j\omega\ ) = 3 + 2j\omega\ /2 - \omega 2 + 3j w$$

الخاصية الثانية: الاشتقاق

تشير الى انه بالإمكان الحصول على المجال الترددي للمعادالت التفاضلية وتسمى هذه خاصية االالشتقاق للزمن

$f(t) = 1/2 \ (j\omega) e^{j\omega t} dw$

$df/dt = 1/2 \ \partial/\partial t \ (j\omega) \ dw$

$df/dt = 1/2\pi \ (j\omega)(j\omega) \ dw$

$\mathscr{F}\{ df/dt \} = (j\omega) F(j\omega)$

من المرات n بتكرار

$\mathscr{F}\{ d^n f/dt^n \} = (j\omega)^n F(j\omega)$

مثال -2- اثبت انة اذا كانت لدينا u(t) , Y(t)لها تحويل فورير U(jw) , Y(jw) على التوالي واذا كانت Y(jw)=G(jw)U(jw) من اجل دالة ما G(jw)

$d^2(t)/dt^2 + 3\, dy(t)/dt + 7y(t) = 3\, du(t)/dt + 2\, u(t)$

الحل:

$\mathscr{F}\{ {}^2y(t)/dt^2 + 3\, dy(t)/dt + 7y(t)\} = \mathscr{F}\{3\, du(t)/dt + 2\, u(t)\}$

$\mathscr{F}\{ d^2y(t)/dt^2 \} + 3\, \mathscr{F}\{ dy(t)/dt \} + 7\, \mathscr{F}\{y(t)\} = 3\, \mathscr{F}\{ du(t)/dt \} + 2\, \mathscr{F}\{u(t)\}$

$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 3(j\omega)Y(j\omega) + 7\, Y(j\omega) = 3(j\omega)\, U(j\omega) + 2\, U(j\omega)$

$(-\omega^2 + 3j\omega + 7)(j\omega) = (3j\omega + 2)(j\omega)$

$\mathrm{Y}(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$

$G(j\omega) = Y(j\omega)/\ U(j\omega)$

$\therefore\ (j\omega) = (7 - \omega\ 2 + 3j\omega)/\ 2 + 3j\omega$

الخاصية الثالثة : الانزياح الزمني

ليكن لدينا F(t) لها تحويل فورير F(jw) عندئذ تحويل فورير للدالة g(t)=f(t-r) حيث ان t مقدار ثابت

$\mathscr{F}\{g(t)\} =\ \ g(t)e^{-j\omega t}\ dt =\ f\ (t-\tau)e^{-j\omega t}\ d\mathrm{t}$

لتكن X=t-r

$\mathscr{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\ f(x)\ \ e^{-j\omega(x+\tau)}\,d\mathrm{x}$

$\mathscr{F}\{g(t)\} = e^{-j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\ f(x)\ e^{-j\omega x}\ \ d\mathrm{x}$

$\mathscr{F}\{g(t)\} = e^{-j\omega tF}(j\omega)$

$\therefore\ \mathscr{F}\{f(t-\tau) = e^{-j\omega t}F(j\omega)$

بالتسمية ألخيرة تعرف باسم خاصية االنزياح الزمني والتي تؤدي الى تأثير في إلشارة بزمن قدرة T ونعزز ذلك الى تحويل فوريبه المضروب في المقدار

الخاصية الرابعة : خاصية االنزياح الترددي :

لتكن لدينا الدالة F(t) لها تحويل فوريه F(jw) عندئذ يعطى تحويل فورييه للدالة

$g(t)=e^{iw0t} f(t)$

$$\boldsymbol{g(t) = e^{j\omega 0 t} f(t)}$$

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega 0 t} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega 0 - \omega) t} f(t)\, dt$$

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\tilde{\omega} t}\, dt \qquad , \qquad \tilde{\omega} = \omega 0 - \mathrm{w}$$

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = F(j\,\tilde{\omega})$$

$$\mathscr{F}\{e^{-j\tilde{\omega} t} f(t)\} = \mathrm{F}(j\,(\omega 0 - \omega))$$

النتيجة السابقة تعرف باسم خاصية االنزياح الترددي والتي تشير الى انه الضرب بالمقدار e^{jwot} تقوم بأزاحة طيفF(t) الذي يمركزها في النقطة والامر $W_0=w$ في مجال التردد

مثال: حدد طيف تردد الاشارة=g(t)

الحل :

$$\because \boldsymbol{\cos \omega c\, t = 1/2\, (e^{j\omega c t} + e^{-j\omega c t})}$$

باستخدام خاصية التحويل الخطي من الخاصية الاولى

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = \mathscr{F}\{\, 1/2\, f(t)(e^{j\omega c t} + e^{-j\omega c t})\}$$

$$\mathscr{F}\{g(t)\} = 1/2\, \mathscr{F}\{f(t) e^{j\omega c t}\} + 1/2\, \mathscr{F}\{f(t) e^{-j\omega c t}\}$$

$$if\ \mathscr{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$$

باستخدام خاصية الرابعة

$$\mathscr{F}\{f(t)\cos \omega c\, t\} = \mathscr{F}\{g(t)\}$$

تحويل فورير المتقطع[6]

هو عملية تحويل تمكننا من تحويل اشارة متقطعة في فضاء الزمن الى اشارة في فضاء الترددات وهي شبيهة ومشتقة من تحويل فوريي الذي يقوم بتحويل اشارة (يمكن فهم الاشارة على انها دالة رياضية) من فضاء الزمن اي اشارة المتغير هو الزمن الى فضاء الترددات

أي ان المتغير هو المتردد

ان تحويل فوريه المتقطعة للمتتابعة يعطى بالصيغة التالية

$$\mathbf{F[k]} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f[n]}\ \mathbf{e}^{-2jnk\pi/N}$$

حيث ان

$n = 0,1,2, \dots \dots, N-1$

$k = 0,1,2, \dots \dots, N-1$

مثال -1 جد تحويل فوريه المتقطعة للمتتابعة F[n]=1,2,-5,3

الحل :

$F[\boldsymbol{k}] = \sum_{n=0}^{N-1} [\boldsymbol{n}]\ \boldsymbol{e}^{-2jnk\pi/}$, $\mathbf{N} = 4$

$F[k] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ ^{-2jnk\pi/4}$

k = 0 , n = 0,1,2,3

$F[0] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ ^{0} = 1 + 2 + (-5) + 3 = 1$

k = 1

$F[k] = \sum_{n=0}^{3} [n]\, e^{-2jk\pi/4}$

$F[1] = 1 + 2e^{-2j\pi/4} + (-5)e^{-2j(2)\pi/4} + 3e^{-2j(3)\pi/4}$

$[1] = 1 + 2e^{-j\pi/2} - 5\, e^{-j\pi} + 3e^{-3j\pi/2}$

$F[1] = 1 + 2(-j) - 5(-1) + 3j = 6 + j$

k = 2

$F[2] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ ^{-2(2)k\pi/4}$

$F[2] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ ^{-\pi j\mathrm{n}}$

$F[2] = 1 + 2e^{-\pi j} + (-5)\ ^{-2j\pi} + 3e^{-3j}$

$F[2] = 1 + 2(-1) - 5(1) + 3(-1) = -9$

K=3

$F[k] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ e^{-2(3)k\pi/4}$

$F[3] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ e^{-3jn\pi/2}$

$F[3] = 1 + 2e^{-3\pi j/2} + (-5)^{-3j\pi} + 3e^{-9j\pi/2}$

$F[3] = 1 + 2(j) - 5(-1) + 3(-j) = 6 - j$

هو 1 , 2 , 5−بالتالي فان تحويل فورييه المتقطع للمتتابعة 3 ,

$1 , 6 + j , -9 , 6 - j$

مثال :2 جد تحويل فورييه المتقطع للمتتابعة

$[n] = 2 , -4, -1 , 6$

الحل :

$[\boldsymbol{k}] = \sum_{n=0}^{N-1} f\,[\boldsymbol{n}]\ \boldsymbol{e}^{-2jnk\pi/N}$, $\mathbf{N} =$, $\mathbf{n} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 3$

K=0 , 1 ,2, 3

$F[k] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ e^{-2jnk\pi/4}$

k = 0 , n = 0,1,2,

$F[0] = \sum_{n=0}^{3} [n]\ e^{0} = 2 + (-4) + (-1) + 6 = 3$

k = 1

F $[k] = \sum_{n=0}^{3} \; [n]$ e $^{-2jk\pi/4}$

F[1] = 2 + $(-4)e^{-2j\pi/4} + (-1)e^{-2j(2)\pi/4} + 6e^{-2j(3)\pi/4}$

F[1] = $2 - 4\, e^{-j\pi/2} - 1\, e^{-j\pi} + 6\, e^{-3j\pi/2}$

F[1] = 2 − 4(−j)—1 + 6j = 3 + 10j

k = 2

f[2] $=\sum_{n=0}^{3} \; [n] \quad ^{-2(2)k\pi/4}$

F [2] $=\sum_{n=0}^{3} \; [n] \quad ^{-\pi jn}$

F [2] = $2 + (-4)^{-\pi j} + (-1)^{-2j\pi} + 6e^{-3j\pi}$

F[2] = 2 − 4(−1) − (1) + 6(−1) = −1

K=3

F$[k] =\sum_{n=0}^{3} \; [n]$ e $^{-2(3)k\pi/4}$

F [3] $=\sum_{n=0}^{3} \; [n]\, e^{-3jn\pi/2}$

F[3] = $2 - 4e^{-3\pi j/2} + (-1)^{-3j\pi} + 6e^{-9j\pi/2}$

F [3] = $2 - 4(j) - 1(-1) + 6(-j)$ = 3 – 10j

بالتالي فان تحويل فوريه المتقطع للمتتابعة:.

$F[n] = 2 , -4, -1 , 6$

$$= 3 , 3 + 10j , -1 , 3 - 10j$$

معكوس تحويل فوريه المتقطع[6]

هي متتابعة فورير (تحويل فورير المتقطع للدالة (F(t) ونريد ايجاد قيمF[n] اجل وعلية يكون من ليكن لدينا F[k]

وعلية يكونN=0,1,2,……..,N-1

$F[n] = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} F[k] e^{2jkn\pi/N} \quad , \quad k = 0,1,2, \ldots\ldots . N-1$

–مثال : باستخدام التعريف جد معكوس تحويل فوريه المتقطع للمتتابعة F[k]=-4,1,0,1

$N = 4$

$\mathcal{D}^{-1}\{F[k]\} = f[n] = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} F[k]^{2jkn\pi/N}$

$f[n] = 1/4 \sum_{n=0}^{3} F[k]^{2jkn\pi/4} \Longrightarrow 1/4 \sum_{n=0}^{3} F[k] e^{jkn\pi/2} \quad , \quad n = 0,1,2, \ldots \ldots N-1$

$n = 0 \quad , \quad k = 0,1,2,3$

$F[0] = 1/4 (-4e^{j(0)(0)\pi/2} + e^{j(0)(1)\pi/2} - 0e^{j(0)(2)\pi/2} + e^{j(0)(3)\pi/2})$

$F[0] = 1/4 (-4 + 1 + 1) = -1/2$

$n = 1 , k = 0,1,2,3$

$F[1] = 1/4 (-4e^{j(1)(0)\pi/2} + e^{j(1)(1)\pi/2} - 0e^{j(1)(2)\pi/2} + e^{j(1)(3)\pi/2})$

$F[1] = 1/4 (-4e^{0} + e^{j\pi/2} - 0e^{j\pi} + e^{3j\pi/2})$

$\underline{\boldsymbol{F}}[1] = 1/4\,(-4 - 1 + 1) = -1$

$n = 2 \qquad , \qquad k = 0,1,2,3$

$F[2] = 1/4\,(-4e^{\,j(2)(0)\pi/2} + e^{\,j(2)(1)\pi/2} - 0e^{\,j(2)(2)\pi/2} + e^{\,j(2)(3)\pi/2})$

$\mathrm{F}[2] = 1/4\,(-4e^{\,0} + e^{\,j\pi} - 0e^{\,2j\pi} + e^{\,3j\pi})$

$\mathrm{F}[2] = 1/4\,(-4 - 1 - 1) = -3/2$

$n = 3 \qquad , \qquad k = 0,1,2,3$

$F[3] = 1/4\,(-4e^{\,j(3)(0)\pi/2} + e^{\,j(3)(1)\pi/2} - 0e^{\,j(3)(2)\pi/2} + e^{\,j(3)(3)\pi/2})$

$\mathrm{F}\,[3] = 1/4\,(-4e^{0} + e^{\,3j\pi/2} - 0e^{\,3j\pi} + e^{9\,j\pi/2})$

$\mathrm{F}[3] = 1/4\,(-4 + 0 + 0 + 1) = 1/4\,(-3) \approx -0.75 = -1$

$\therefore \mathrm{F}\,[n] = -1/2\,,\, -1\,,\, -3/2\,,\, -1$

التمثيل المصفوفى لتحويلات فورييه فى الحالة المتقطعة[7]

عندما يكون من الضروري تطوير شفرة برمجية لتنفيذ وحل مسائل، انه من المفيد فهم التمثيل المصفوفي لتحويل فورييه في الحالة المنقطع

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} F[n] e^{-2jkn\pi/N} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (*)$$

بما انة $e^{-2jkn\pi/N} = (e^{-2j\pi/N})^{nk}$ ونعرف

$$W = e^{-2j\pi/N}$$

يكون $(*)$ وبالتعويض كل ما سبق في

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, w^{nk}$$

. من تعريف انها مقدار ال يعتمد ال على وال على وهي مقدار ثابت من اجل مثبته

$$F[k] = f[0]w0 + f[1]wk + f[2]w2k + \cdots + f[N-1]w\,(N-1)k$$

$$k = 0,1,2, \ldots N-1$$

اجل قيم ومن k

$$F[0] = f[0]w^0 + f[1]w^0 + f[2]w^0 + f[3]w^0 + \ldots \ldots \ldots . +[N-1]w^0$$

$$F[1] = f[0]w^0 + f[1]w^1 + f[2]w^2 + f[3]w^3 + \ldots \ldots \ldots . +[N-1]w^{N-1}$$

$$F[2] = f[0]w^0 + f[1]w^2 + f[2]w^3 + f[3]w^4 + \ldots \ldots \ldots . +[N-1]w^{2(N-1)}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$F[N-1] = f[0]w^0 + f[1]w^{N-1} + f[2]w^{2(N-1)} + f[3]w^{3(N-1)} + \cdots + f[N-1]w^{(N-1)(N-1)}$$

و الشكل السابق يمكن إعادة كتابته بالشكل المصفوفة

$$w = e - 2j\pi\ N$$

مثال

1-;تمثيل مصفوفة تحويل فوربيه المتقطع ثالثية النقاط

2:- , باستخدام المصوفة جد تحويل فورييه المتقطع للمتتابعة 711- , F[n]=4

$$N = 3$$

بالتالي فان $W = ^{e2\text{-}jt/3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2j\pi}{3}} & e^{-\frac{4j\pi}{3}} \\ 1 & e - 4\mathrm{j}\pi/3 & e^{-\frac{6j\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

باستخدام صيغة أويلر

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

خصائص تحويل فورير المتقطع[7]

1:- الدورية : تحويل فورير المتقطع F[k] هو دوري وبدوره مقدارها N اي ان

$$F[k+N]=F[k]$$

وهي السبب الذي من أجله اخترنا . فقط في الدراسة حيث ان أي قيم إضافية تؤدي الى إعادة انتاج القيم السابقة والجدير بالذكر أن هو دوري ايضا

2:- الخطية : ان تحويل فوريه في الحالة المتقطع هو تحويل خطي أي انه تحويل فوريه للمتتابعة

$$af[n]+b\,g[n]$$

ثوابت a , b حيث ان

البرهان

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-2jnk\pi/N}$$

$$F[k]=\sum_{n=0}^{N-1} (a\,[n]+b\,[n])e^{-2jnk\pi/N}$$

$$F[k]=a\sum_{n=0}^{N-1} [n]\; e^{-2jnk\pi/N}+b\sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-2jnk\pi/N}$$

$$F[k]=a\,[k]+b\,[k]$$

3:- نظرية بارسفال :

$$f[n]=F[k]\ and\ g[n]=G[k]$$

حيث

$$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\overline{g[n]}\; N\sum_{n=0}^{N-1} F[k]\overline{G[k]}$$

4:- نظرية رايلي: نحصل عليها بشكل مباشر بتطبيق نظرية بارسفال عندما G[n]=f[n] وعلية يكون القانون

$$\sum_{n=0}^{N-1} |[n]|/2 = 1/N\sum_{n=0}^{N-1} |F[k]|/2$$

مثال : تحقق من نظرية رايلي للمتتابعة   F[n]=5 ,4

الحل:

N=2

$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \ [n] \ e^{-2jn\pi k/2}$

$F[k] = \sum_{n=0}^{1} f[n] \ e^{-jn\pi k}$

$F[k] = [0] + [1]^{-jk\pi}$

$F[k] = 5 + 4e^{-jk\pi}$

$k = 0$

$F[0] = 5 + 4e^{0} = 5 + 4 = 11$

$k = 1$

$F[1] = 5 + 4e^{-j\pi} = 5 - 4 = 1$

$F[k] = 9 , 1$

$f[n] = 5 , 4$

$\sum_{n=0}^{1} |[n]|^2 = (5) 2 + (4) 2 = 41$

$\sum_{k=0}^{N-1} |[k]|^2 = |\sum_{k=0}^{N-1} F[k]|^2 = (9) 2 + (1) 2 = 81$

$41 = 1 \ 2 \ (82) \Longrightarrow 41 = 41$

وهذا يحقق نظرية راي

-

تحويل الجيب تمام المتقطع ومعكوسة[7]

هناك طريقة بديلة لطريقة لانتقال F(t) الى مجال ترددي F(w) والتي تعرف باسم تحويل الجيب التمام المتقطع لألشارة من المجال الزمني .

نعلم مسبقا انه تحويل فورييه في حالة المتقطع يأخذ Nنقطة او عينة حيث المدخلات F[0]…..,f[N-1]

والمخرجات Nنقطة في المجال الترددي F[0],……,F[N-1]

ان طريقة تقوم بنفس آاللية وان وهذا الطريقة لها خصائص معينة نجعلها الطريقة المفضلة لبعض التطبيقات مثل معالجة الصوت و الصورة لن نتطرق بشكل مفصل حول استنتاج واشتقاق في الطريقة الى الرغم من التشابه الكبير مع تحويل فورييه في الحالة المتقطعة

تعريف 1: تحويل الجيب تمام المتقطع :- ليكن لدينا المتتعابعة F[n]للمتتابعة n=0 ,1 …..,N-1

$$\mathrm{F}[k] = 1/ \sqrt{N}\sum_{n=0}^{N-1} [n] \cos [\pi/ N (n + 1\ 2) k] \qquad , \quad k = 0,1,2, \dots \dots N-1$$

مثال : A)جد تحويل الجيب تمام المتقطع للمتتابعة F[n]= 2, 4 , 6

b) جد معكوس تحويل الجيب تمام المتقطع للمتتابعة الاصلية

الحل: a) N= 3 , k= 0 , 1 , 2

$$\mathrm{F}[k] = 1/ \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} [n] \cos [\pi/ N \ (n + 1\ 2) k]$$

$$k = 0$$

$$\mathrm{F}\ [0] = 1/ \sqrt{3}\sum_{n=0}^{N-1} [n] \cos [\ /3 \quad (n + 1\ 2) \times 0]$$

$= 1/\sqrt{3}\,[2\cos 0 + 4\cos 0 + 6\cos 0] = 1/\sqrt{3}\,[2 + 4 + 6] = 12/\sqrt{3}$

$k = 1$

$\mathrm{F}\,[1] = 1\ \sqrt{3}\sum_{n=0}^{2}\ [n]\cos[\ \pi\ 3\ (n + 1\ 2\ ) \times 1]\ 2\ n{=}0$

$= 1/\sqrt{3}\,[2\cos(\ /\ 6\ ) + 4\cos(\ \pi/\ 2\ ) + 6\cos(\ 5\pi/\ 6\ )]$

$= 1/\sqrt{3}\,[2\ (\ \sqrt{3}\ /2\ ) + 4(0) + 6\ (\ -\sqrt{3}/\ 2\ )] = 1/\sqrt{3}\,[\sqrt{3} - 3\sqrt{3}]$

$= 1 - 3 = -2$

$k = 2$

$\mathrm{F}\,[2] = 1/\sqrt{3}\sum_{n=0}^{2}\ [n]\cos[\ /\ 3\ (n + 1/\ 2\ ) \times 2]$

$= 1\ /\sqrt{3}\,[2\cos(\ /\ 3\ ) + 4\cos(\pi) + 6\cos(\ 5\pi/\ 3\ )]$

$= 1/\sqrt{3}\,[1 - 4 + 3] = 1\ /\sqrt{3}\ [0] = 0$

(b

$\mathrm{f}[n] = 1/\sqrt{N}\ \{[0] + 2\sum_{n=0}^{N-1}\ F[k]\ \cos[\ \pi/\ N\ (n + 1/\ 2\ )\ k]\}$

$N = 3 \quad , \quad n = 0,1,2$

$n = 0$

$\mathrm{f}[0] = 1/\sqrt{3}\ \{\ 12/\sqrt{3} + 2\ \sum_{n=0}^{2}\ F[k]\ \cos[\ \pi/\ 3\ (0 + 1/\ 2\ ) \times k]\}$

$= 1/\sqrt{3}\ \{\ 12/\sqrt{3} + 2(-2)\cos(\ \pi/\ 6\ ) + 2(0)\}$

$= 1/\sqrt{3}\ \{ 12/\sqrt{3} - 4\ (\sqrt{3}/2\ )\} = 4 - 2 = 2$

$n = 1$

$f\ [1] = 1/\sqrt{3}\ \{ 12/\sqrt{3} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} F[k]\ \cos [\ \pi/3\ (1 + 1/2\ ) \times k]\}$

$= 1/\sqrt{3}\ \{ 12/\sqrt{3} + 2(-2) \cos (\ 5\pi/3\ ) + 2(0)\}$

$= 1/\sqrt{3}\ \{ 12/\sqrt{3} - 4\ (\ -\sqrt{3}/2\ ) + 0\}$

$= 1/\sqrt{3}\ \{ 12/\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\} = 4 + 2 = 6$

التقريب بكثيرة الحدود المثلثية[7]

ان استخدام سلاسل دالة الجيب وجيب تمام لتمثيل الدوال كان قد عرف في بدايات الخمسينات من القرن الثامن عشر , وكان ذلك بدراسة حركة الزنبرك ذي الاهتزازات . ولقد بحث في هذة المسألة من قبل جيين المبرت ثم من قبل شهر رياضي في ذلك العصر , ليونارد اويلر . ولكن الفضل الاول يعود الى دانيال بيرنولي . الذي دعا اللى استخدام المجاميع اللانهائية للجيوب وجيوب تمام بوصفها حلا للمسألة . وقد باتت هذة المجاميع الان تعرف بسلاسل فورير في اوائل القرن التاسع عشر , وقد استخدم جيين باتبتست جوزيف فورير هذه السلاسل لدراسة انتقال الحرارة .

ان الصيغة العامة لكثيرة الحدود المثلثية تعطى بالشكل الاتي

$$S_n(x) = a_0/2 + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} (x)\, \pi - \pi \cos kx\, dx \qquad , \qquad k = 0,1,2,3, \dots , n$$

$$b_k = 1/ \quad \int_{-\pi}^{\pi} (x)\, \pi - \pi \sin k \quad , k = 1,2,3, \dots , n-1$$

سلسلة فورير للدالة وان سلاسل فورير تستخدم لوصف حل المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية تسمى النهاية ل Sn(x) عندما ل n= الجزئية التي تظهر في احوال فيزيائية.

مثال : لتحديد كثيرة الحدود المثلثية التي تقترب

$F(x)=|x| \qquad -\pi< x< \pi$

$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} |x| = -1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} xdx\ 0 -\pi + 1/\pi \int_{0}^{\pi} xdx = 2/\pi \int_{0}^{\pi} xdx = \pi$

$a_k = 1/ \ |\int_{-\pi}^{\pi} x| \ \cos kx\, dx = 2/\pi \int_{0}^{\pi} x \ \cos kx\, dx = 2/\pi k^2 \ [(-1)^{k} - 1]$,

K= 1,2,……..,n

$b_k = 1/ \ \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin kx\, dx = 0 \qquad , \qquad k=1,2,\ldots\ldots\ldots,n-1$

ان bkجميعا اصفار ينبع من حقيقة ان G(x)=|x|sin kxهو دالة فردي لكل k , تكامل اي عللى اي فترة هو صفر

فأن كثيرة الحدود المثلثية التي تعطي التقريب للدالة Fهي

$$S_n(x) = \pi/2 + 2/\pi \ \ (\sum_{k=1}^{n} \ (-1)\ k - 1/ k^2 \ \cos k$$

المصادر

1)المعادلات التفاضلية الجزئية (حسن مصطفى العوضي . استاذ رياضيات بجامعة الازهر –كلية التربية للبنات)

2)فريد بروير وجونام نوهيل (معادلات التفاضلية الاعتيادية)

3)معادلات التفاضلية الجزئية(اس فارلو)

4)هندسة الرياضيات الحديثة المتقدمة2011

5)الرياضيات الهندسية المتقدمة (Dean G-Duffy

6)هندسة الرياضيات المتقدمةERWIN KREYSZIG

7)الرياضيات الهندسية المتقدمةH-K-Dass