جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية الاساسية _ قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة تحويـل لابلاس

بحث

مقدم إلى مجلس كلية التربية الاساسية في جامعة ميسان كجزء من متطلبات نيل

درجة البكالوريوس في علوم الرياضيات

أعـداد

تبارك باسم شاكر   ايه حازم حسن

إشراف

م. م. لمياء صبيح عاشور

١٤٤٦ هـ   ٢٠٢٥م

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
Misan University
College of basic Education
Department of Mathematics

Solving differential equations using the Laplace transform

A Research

Submitted to the College of Basic Education,

Misan University as a Partial Fulfillment of the Requirements for

the Degree of B.Sc. of Science in Mathematics

By

Aya Hazem Hassan **Tabarak Basim Shakir**

Supervised by

A. L. Lamyaa Sabbeh Ashour

2025 **1446هـ**

بسم الله الرحمن الرحيم

("يُدَبِّرُ الْأَمْرَ مِنَ السَّمَاءِ إِلَى الْأَرْضِ ثُمَّ يَعْرُجُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ أَلْفَ سَنَةٍ مِّمَّا تَعُدُّونَ")

صدق الله العظيم

(سورة السجدة، الآية ٥)

اقرار المشرف

أشهد ان اعداد هذا البحث الموسوم بـ (حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة تحويل لا بلاس) والمقدم من قبل الطالبتين (تبارك باسم شاكر _ ايه حازم حسن) قد جرى بأشرافي في كلية التربية الاساسية / جامعة ميسان, وهو كجزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات.

التوقيـــــع: ....

اسم المشرف: م. م لمياء صبيح عاشور

الدرجة العلمية: مدرس مساعد

السنة الدراسية: ٢٠٢٤_٢٠٢٥

بناءاً على التوصيات المتوافرة أرشح هذا البحث للمناقشـــة

التوقيـــع:

رئيس قسم الرياضيات: أ. م. د سامي عطيه سيد

التاريخ: / / ٢٠٢٥

اقرار لجنة المناقشة

نحن اعضاء لجنة المناقشة الموقعين أدناه نشهد اننا قد أطلعنا على البحث الموسوم بـ (حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة تحويل لا بلاس) والمقدم من قبل الطالبتين (تبارك باسم شاكر _ ايه حازم حسن) وهو كجزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات وبعد أجراء المناقشة العلمية وجد أنه مستوفي لمتطلبات الشهادة وعليه نوصي بقبول البحث بتقدير (   ).

الاسم:	الاسم:	الاسم:
التوقيع:	التوقيع:	التوقيع:
التاريخ: / /	التاريخ: / /	التاريخ: / /
عضواً	عضواً	رئيس اللجنة

صدق هذا البحث من مجلس قسم الرياضيات

التوقيـــع:

رئيس قسم الرياضيات: أ. م. د سامي عطيه سيد

التاريخ: /   / ٢٠٢٥

الاهـــــداء

أهدي ثمرة جهدي وتخرجي إلى صاحب العصر والزمان، الإمام المهدي (عجّل الله فرجه الشريف)، راجيةً أن يكون هذا العمل المتواضع بصمةً مضيئة في مسيرة العلم والمعرفة، ونوراً ينير ظلمة الجهل. أسأل الله أن يجعل هذا السعي خالصاً لوجهه الكريم، وأن يوفقنا لرؤية يوم ظهوره، ليعم العدل والخير أرجاء الأرض.

إلى روحي الطموحة التي سعت بعزيمة وإصرار لتحقيق النجاح، فكان لها ما أرادت، أهدي هذا الإنجاز اعترافًا بجهدها وإصرارها على بلوغ الهدف.

إلى من كان سندي في كل خطوة، ورفيقي في درب العلم، إلى النور الذي أنار طريقي، والسراج الذي لم يخفت ضوؤه لحظة، إلى من بذل الغالي والنفيس ليصل بي إلى سلم النجاح، إلى من حمل همي وفرحي وسهر لأجلي، إلى أبي العزيز، الذي طالما وعدني بأن طريق العلم هو طريق المستقبل، وها أنا اليوم أهديه ثمرة نجاحي، وفاءً لوعدي وعرفانًا بجميله.

إلى من غرست فيّ الأخلاق قبل أن تعلمني الحروف، إلى من كانت دعواتها سرّ توفيقي، إلى من تحملت عني كل لحظات ضعفي وساندتني وقت وهني، إلى من كانت ولا تزال أغلى الناس، أمي الحبيبة، أهديكِ هذا النجاح عربون حبّ وامتنان.

إلى كل من كان له بصمة في مسيرتي العلمية، من أساتذة كرام، وأصدقاء أوفياء، وكل من ترك أثراً في هذا الإنجاز، ولو بكلمة أو دعاء، لكم مني خالص الشكر والامتنان.

الشكر والتقديـــــر

أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذة الفاضلة (م. م. لمياء صبيح عاشور)، المشرفة على هذا البحث، على ما بذلته من جهد علمي وإشرافي قيّم طوال فترة إعداد الدراسة. لقد كان لتوجيهاتها السديدة وملاحظاتها الدقيقة الأثر الكبير في إثراء المحتوى العلمي للبحث ورفع مستواه الأكاديمي.

كما أرفع أسمى عبارات الشكر والتقدير إلى الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات – كلية التربية الأساسية / جامعة ميسان، لما قدموه من دعم علمي ومعرفي خلال سنوات الدراسة، ولما بذلوه من جهود مخلصة في إعداد طلبتهم وتأهيلهم علمياً ومنهجياً.

ولا يفوتني أن أعبر عن تقديري لكل من ساهم بكلمة أو نصيحة أو دعم في إخراج هذا العمل إلى النور، سائلة الله أن يجعل ذلك في ميزان حسناتهم، وأن يوفق الجميع لما فيه خير العلم وخدمة المجتمع.

جدول المحتويات

قائمة الجداول

المستخلص

يتناول هذا البحث موضوعًا مهمًا في مجال الرياضيات التطبيقية، يتمثل في حل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام طريقة تحويل لابلاس .وتبرز أهمية هذا الموضوع من كونه لا يقتصر على المختصين في الرياضيات فقط، بل يمتد ليشمل فروعًا متعددة من العلوم التطبيقية، مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد، حيث تُستخدم المعادلات التفاضلية لوصف الكثير من الظواهر الطبيعية والأنظمة الديناميكية.

يركز البحث على تبسيط الحلول الرياضية للمعادلات التفاضلية، خاصةً في الحالات التي تكون فيها الشروط الابتدائية أو الحدية معقدة أو يصعب التعامل معها باستخدام الطرق التقليدية. ومن خلال تطبيق تحويل لابلاس، تُحوَّل المعادلة التفاضلية من صورتها الزمنية إلى معادلة جبرية في المجال الترددي، مما يسهل التعامل معها، ثم يُعاد الحل إلى المجال الزمني باستخدام التحويل العكسي.

يتكون البحث من أربعة فصول رئيسية: تناول الفصل الأول الإطار العام للبحث، من مقدمة وأهمية وأهداف، إضافة إلى عرض مشكلة البحث وأسئلته. أما الفصل الثاني، فناقش المعادلات التفاضلية بأنواعها المختلفة، كالخطية وغير الخطية، والمتجانسة وغير المتجانسة، مع تصنيفاتها من حيث الرتبة والدرجة، وطرق تكوينها من خلال حذف الثوابت الاختيارية.الفصل الثالث شكّل المحور الأساسي للبحث، حيث استعرض المفاهيم النظرية والعملية لتحويل لابلاس، بما في ذلك الشروط اللازمة لوجوده، أبرز التحويلات المعروفة لبعض الدوال، خواص التحويل، قوانينه، وتحويل المشتقات. كما تم التطرق إلى التحويل العكسي وتطبيقاته، مع أمثلة عملية في حل المعادلات التفاضلية. أما الفصل الرابع، فقد خُصص لعرض الاستنتاجات والتوصيات، حيث أظهر البحث أن تحويل لابلاس أداة فعالة من حيث تقليل التعقيد الحسابي، وسهولة دمج الشروط الابتدائية في الحل. وأوصى البحث بتوسيع استخدام تحويل لابلاس ليشمل معادلات أكثر تعقيدًا، وخاصةً غير الخطية، بالإضافة إلى دمجه مع أدوات رياضية أخرى مثل تحويل فورييه، لزيادة فعاليته في التحليل الرياضي والتطبيقي.

Abstract

This research addresses an important topic in the field of applied mathematics, which is solving linear differential equations using the Laplace Transform method. The importance of this topic appears in that it is not limited to specialists in mathematics only, but extends to include various branches of applied sciences, such as physics, engineering, and economics, where differential equations are used to describe many natural phenomena and dynamic systems.

The research focuses on simplifying mathematical solutions for differential equations, especially in cases where the initial or boundary conditions are complex or difficult to handle using traditional methods. Through the application of the Laplace Transform, the differential equation is converted from its time domain form to an algebraic equation in the frequency domain, making it easier to handle, and then the solution is returned to the time domain using the inverse transform.

The research consists of four main chapters. The first chapter addressed the general framework of the study, including the introduction, importance, and objectives, in addition to presenting the research problem and its questions. The second chapter discussed the different types of differential equations, such as linear and nonlinear, homogeneous and non-homogeneous, with their

classifications in terms of order and degree, and how to form them by eliminating arbitrary constants.

The third chapter formed the core of the research, as it reviewed the theoretical and practical concepts of the Laplace Transform, including the necessary conditions for its existence, the most known transforms of some functions, its properties, laws, and the transformation of derivatives. The chapter also addressed the inverse transform and its applications, with practical examples in solving differential equations.

As for the fourth chapter, it was devoted to presenting the conclusions and recommendations, where the research showed that the Laplace Transform is an effective tool in reducing computational complexity and easily incorporating initial conditions into the solution. The study recommended expanding the use of the Laplace Transform to include more complex equations, especially nonlinear ones, in addition to integrating it with other mathematical tools such as the Fourier Transform, to increase its effectiveness in mathematical and applied analysis.

الفصل الاول

١-١ المقدمـــــة

١-٢ أهميــة البحث

١ - ٣ مشكلة البحث

١-٤أسئلة البحث

١-٥ أهــداف البحث

الفصـل الاول

Chapter one

١-١المقدمــة Introduction

تعتبر المعادلات التفاضلية من الركائز الأساسية التي تدعم التطور العلمي للطالب في مجالات الرياضيات والهندسة والتطبيقات العملية. فهي تجمع بين التجريد النظري والتطبيق الواقعي بأسلوب علمي يتسم بالسلاسة والوضوح [١].

المعادلات التفاضلية، تعود أصولها إلى زمن نيوتن، وما زالت تلعب دورًا حيويًا في العديد من العلوم، مثل الفيزياء والهندسة والعلوم الحياتية. كما أنها تساهم بشكل كبير في دراسة التحليل الرياضي، وامتدت تطبيقاتها لتشمل المجالات الاقتصادية والاجتماعية مما يجعلها أداة أساسية في مختلف التخصصات العلمية, وقد شهدت المعادلات التفاضلية تطورًا ملحوظًا، مما عزز أهميتها في شتى مجالات العلوم وتطبيقاتها [٢] .

ويمكن القول دون تجاوز او مبالغة ان المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية, حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية ولفهم هذه المسألة فلا بد من حل هذه المعادلة التفاضلية أو على الاقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل وأن استعصى الحصول عليه صراحة; وعملية الحصول على الحل ليست دوما بالمسألة اليسيرة بل أن كثيراَ من المعادلات التفاضلية غير قابل للحل. لقد استحوذ هذا الامر على اهتمام الرياضيين منذ بداية علم التفاضل في القرن السابع عشر وحتى ايامنا هذه; سواء من ناحية دراسة وجود الحل او من ناحية خصائصه وطبيعته او من ناحية الحصول عليه. ولم يقف الرياضي طويلا امام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة (closed Form solution) بل تجاوز ذلك الى الحل التقريبي والحل العادي [٣].

تعد المعادلات التفاضلية من الأنواع الأساسية في الرياضيات، حيث تنقسم: أولاً، المعادلات التفاضلية العادية، وهي معادلات تتضمن مشتقات دالة واحدة بالنسبة إلى متغير مستقل واحد فقط [٤]. ثانياً، المعادلات التفاضلية الجزئية، التي تحتوي على مشتقات دالة بالنسبة إلى أكثر من متغير واحد [٥]. بالإضافة إلى ذلك، هناك المعادلات التفاضلية المتجانسة، التي تتميز بتساوي درجات المتغيرات (مثل (x.y) في جميع الحدود [٦]. بينما المعادلات التفاضلية غير المتجانسة هي المعادلات التي تحتوي على حد مستقل من المتغير التابع والمشتقات [٧].

ومن ناحية أخرى، تعتبر المعادلات التفاضلية الخطية من المواضيع الأساسية في الرياضيات، حيث تلعب دورًا هامًا في مختلف التطبيقات الهندسية والاقتصادية، بفضل خصائصها التي تسهل تحليل الأنظمة الديناميكية المعقدة. تعرف المعادلة التفاضلية الخطية بأنها معادلة تحتوي على دالة غير معروفة ومتغيراتها، حيث يكون فيها المعاملات عبارة عن دوال ثابتة أو دوال من النوع الخطي تنقسم المعادلات التفاضلية الخطية إلى نوعين رئيسيين: النوع الأول المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى، والنوع الثاني المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية أو أعلى [٣].

وهنالك طرق كثيرة لحل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام طرق متعددة مثل طريقة الفواصل المتغيرة، أو الطرق العددية او طريقة العامل التكاملي او طريقة التحويل ومن ضمنها طريقة تكوين فعالة بصورة خاصة في حل المسائل الابتدائية التي تحتوي على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة تسمى تحويل لابلاس (The Laplace Transform) [٨].

يُعتبر تحويل لابلاس من الأدوات الرياضية البارزة في حل المعادلات التفاضلية، حيث يُحوِّل الدوال من نطاق الزمن إلى نطاق الترددات . وتتمثل أهمية هذا التحويل في تبسيط المعادلات التفاضلية، إذ يُحولها إلى معادلات جبرية أكثر سهولة في التعامل معها وحلها. بعد إيجاد الحل في نطاق الترددات، يمكن استخدام التحويل العكسي للإبلاس للعودة إلى النطاق الزمني، مما يتيح الحصول على الحل في سياقه

الزمني الأصلي، وبذلك يُساهم تحويل لابلاس في تسهيل حل المشكلات الرياضية والفيزيائية المرتبطة بالأنظمة الديناميكية [٩].

في هذا البحث، سيعتمد الباحث على طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الخطية، بهدف تسهيل الحل وتبسيط العمليات الرياضية، مما يسهم في معالجة وتحليل هذه المعادلات بدقة وفعالية أكبر، خصوصاً في مجالات الهندسة والفيزياء.

١-٢ أهميـــة البحث Importance of the Study

تكمن أهمية هذا البحث في تسليط الضوء على دور تحويلات لابلاس كأداة رياضية فعالة لحل المعادلات التفاضلية، التي تُعد من الركائز الأساسية في فهم وتفسير العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية. يعتبر تحويل لابلاس أداة رياضية قوية تستخدم لتحويل المعادلات التفاضلية الخطية إلى معادلات جبرية أبسط، مما يسهل عملية الحل وتقليل تعقيد العمليات الرياضية التقليدية مما يوفر الوقت والجهد اللازمين لحل المشكلات الرياضية المعقدة ويعمل على تعزيز الدقة والسرعة في إيجاد الحلول [١٠]. أحد أبرز استخدامات تحويل لابلاس هو دمج الشروط الابتدائية في الحل مباشرةً، مما يغني عن الخطوات الإضافية التي تتطلبها الطرق التقليدية وهذا يجعل من السهل التعامل مع أنظمة ذات شروط معقدة أو متغيرة [١١]. تحويل لابلاس يستخدم على نطاق واسع في الهندسة الكهربائية، الديناميكية، ونظرية التحكم لتحليل الأنظمة الزمنية وحل النماذج الرياضية. البحث في هذا المجال يُعزز من فهم العمليات الفيزيائية ويُطور التطبيقات العملية [١٢]. عند حل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية متعددة المتغيرات، يُعتبر تحويل لابلاس أداة مثالية، حيث يمكنه التعامل مع الأنظمة المتداخلة والتفاعلية

بكفاءة [١٣]. قد يواجه الباحثون مشكلات في حل المعادلات باستخدام الطرق التقليدية بسبب تعقيد العمليات التكاملية والتفاضلية لذا فأن تحويل لابلاس يُعد بديلا فعالا للتغلب على هذه التحديات وتوفير حلول دقيقة [١٤].

١-٣ مشكلة البحث Research Problem

تعد المعادلات التفاضلية الخطية من الأدوات الأساسية في العديد من مجالات العلوم والهندسة تستخدم هذه المعادلات لوصف العديد من الظواهر الفيزيائية مثل الحركة التفاعل الحراري والتفاعلات الكيميائية ومع ذلك، غالباً ما تكون هذه المعادلات معقدة بحيث يصعب حلها باستخدام الطرق التقليدية. لذلك، تعتبر الحاجة إلى تقنيات حديثة لحل هذه المعادلات أمرًا بالغ الأهمية [١٥].

تستخدم الطرق التقليدية في حل المعادلات التفاضلية مثل الطرق العددية أو الطريقة التحليلية. ولكن، في حالات معينة، تصبح هذه الطرق غير فعالة خصوصًا عندما تتعامل مع معادلات ذات شروط أولية أو حدود معقدة. كما أن هذه الطرق قد تواجه صعوبة في التعامل مع المعادلات ذات البنية المعقدة أو الحالات غير الخطية [١٦]. لذا يعد تحويل لابلاس أحد الأدوات الرياضية القوية التي تستخدم لتحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية أبسط من خلال هذا التحويل يمكن تجاوز العديد من الصعوبات التي تطرأ عند حل المعادلات ذات الشروط المعقدة لذلك، يتم استخدام تحويل لابلاس بشكل واسع في العلوم والهندسة لتحليل النظم الديناميكية [١٧].

١-٤ أسئلة البحث Research Questions

١- كيف يمكن أن يسهم تحويل لإبلاس في تسهيل وتبسيط حل المعادلات التفاضلية الخطية؟

٢- ما مدى دقة الحلول التي يوفرها تحويل لابلاس مقارنة بالأساليب التقليدية لحل المعادلات التفاضلية الخطية؟

١-٥ أهـداف البحث Research Objectives

١- تبسيط الحلول: دراسة كيفية استخدام تحويل لإبلاس لتبسيط حل المعادلات التفاضلية الخطية، خاصة تلك التي تكون معقدة في المجال الزمني.

٣- تطوير كفاءة الحلول الرياضية: مقارنة سرعة وكفاءة الحلول الناتجة عن استخدام تحويل لإبلاس بالطرق التقليدية.

الفصل الثاني

٢-١ المعادلات التفاضلية

٢-٢ المعادلات التفاضلية العادية والجزئية

٢-٣ رتبة ودرجة المعادلة التفاضليــة

٢-٤ المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية

٢-٥ المعادلات التفاضلية المتجانسة وغير المتجانسة

٢-٦ المعادلات التفاضلية التامة وغيــر التامة

٢-٧ حلول المعادلات التفاضلية (الحل العام والخاص)

٢-٨ تكوين المعادلات التفاضليــة (حذف الثوابت الاختيارية)

٢-٩ الشروط الابتدائية والحدية والثوابت الاختيارية

الفصل الثاني

Chapter two

٢-١ المعادلات الفاضلية Differential Equation

هي معادلة تحتوي على مشتقات دالة واحدة أو أكثر بالنسبة لمتغير واحد أو اكثر تعبر عن العلاقة بين الدالة و مشتقاتها [١٨].

مثال ١:

$$dy = (x + \sin x\ )\ \mathbf{dx}$$

٢-٢ المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية

٢-٢-١ المعادلات التفاضلية العادية Ordinary Differential Equation

هي معادلة تفاضلية تحتوي على مشتقات متغير تابع واحد بالنسبة الى متغير مستقل واحد [١٨].

مثال٢: ليكن x المتغير المستقل , y المتغير التابع فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية.

1- $$x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x\ )\ \frac{d^2y}{dx^2}\ .\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y$$

2- $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

٢-٢-٢ المعادلات التفاضلية الجزئية partial Differential Equation

هي معادلة تفاضلية تحتوي على مشتقات متغير تابع واحد بالنسبة الى أكثر من متغير واحد مستقل [١٨].

مثال٣: ليكن U المتغير التابع و x ,y المتغيرات المستقلة فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية.

1 - $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2- $$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

٢-٣ رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية

٢-٣-١ رتبة المعادلة التفاضلية Order Differential Equation

هي أعلى مشتقة موجودة في المعادلة إذا احتوت المعادلة على مشتقات من عدة رتب فإن أعلى رتبة تحدد رتبة المعادلة يتم تصنيف المعادلات التفاضلية بناء على رتبتها إلى رتبة اولى ,ثانية وهكذا [١٩].

٢-٣-٢ درجة المعادلة التفاضلية Degree Differential Equation

هي أعلى أس للمعاملات التفاضلية (المشتقات) الموجودة في المعادلة بعد تبسيطها إلى صورة حدودية أي أنها تكون عددا صحيحا غير سالب [١٩] .

مثال ٤ : بين درجة ورتبة المعادلات التفاضلية

1 - $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = e^x \sin x$$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة.

2- $$\frac{dy}{dx} - (\cos X)\, y + 3y^2 = 0$$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى.

٢-٤ المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية

٢-٤-١ المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equation

هي معادلة تفاضلية يكون فيها المتغير التابع ومشتقاته من الدرجة الأولى أو الأعلى يظهران بشكل خطي أي ان معاملات المشتقات ودالة المتغير التابع تكون دوال تعتمد فقط على المتغير المستقل ولا تحتوي المعادلة على حدود غير خطية مثل مربعات أو مضاعفات للمتغير التابع أو مشتقاته [٢٠].

مثال٦:

1- $(y'')^3 + (y')^2 - y = \sin x$

معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثالثة والرتبة الثانية

2- $x^2 y''' - 5xy' + 6y = \ln(x)$

معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثالثة و الدرجة الاولى

3- $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية و الرتبة الثانية

٢-٤-٢ المعادلات التفاضلية غير الخطية *Nonlinear Differential Equations*

المعادلة تفاضلية تحتوي الغير خطية على مشتقات دالة مجهولة حيث لا تكون العلاقة بين المشتقات والدالة نفسها علاقة خطية. بمعنى أن الدالة أو مشتقاتها تظهر بدرجات أعلى من الأولى، أو ضمن دوال غير خطية مثل الدوال الأسية أو اللوغاريتمية أو المثلثية [٣].

مثال٧:

$yy'' + y' = x$

المعادلة غير خطية في حاصل ضرب بين y, yy''

٢-٥ المعادلات التفاضلية المتجانسة وغير المتجانسة

٢-٥-١ المعادلات التفاضلية المتجانسة *Homogeneous Differential Equations*

هي نوع من المعادلات التفاضلية التي يمكن كتابتها بحيث تكون جميع حدودها مرتبطة ببعضها البعض بوحدة تجانس معينة. تُعرف المعادلة بأنها متجانسة إذا كانت كل الحدود في المعادلة تنتمي لنفس الدرجة عند تطبيق التحويلات النسبية [٢١].

مثال ٨: معادلة تفاضلية متجانسة

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

المعادلة التفاضلية التالية متجانسة من الرتبة الثانية

٢-٥-٢ المعادلات التفاضلية غير المتجانسة Non-homogeneous Differential Equations

هي معادلات تفاضلية تحتوي على حد مستقل (لا يعتمد على المتغير التابع) أو دالة معطاة تُعرف بالحد غير المتجانس. إذا كان الحد المستقل صفرًا، تُعتبر المعادلة متجانسة، أما إذا لم يكن صفرًا، فهي غير متجانسة [٢٢].

مثال٩: معادلة تفاضلية غير متجانسة

$$Y'' + 3y' + 2y = e^{x}$$

الحد $y''+3y'+2y$ يمثل الجزء المتعلق بالمتغير التابع.

الحد e^{x} هو الجزء غير المتجانس لأنه يعتمد فقط على المتغير المستقل x .

٢ ـ ٦ المعادلات التفاضلية التامة وغير التامة

٢-٦-١ المعادلة التفاضلية التامة *Exact Differential Equation*

هي نوع من المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى التي تتميز بوجود علاقة معينة بين الدوال التي تظهر فيها، مما يسهل حلها. المعادلة التفاضلية التامة تكون عادة على الشكل:

M(x,y)dx+N(x,y)dy=0

وتكون المعادلة تامة إذا تحقق الشرط التالي: المشتق الجزئي للدالة *M(x, y)* بالنسبة لـ *y* يساوي المشتق الجزئي للدالة *N(x,y)* بالنسبة ل *x* [٢٣].

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال١٠: هل المعادلة التفاضليــة الأتيــة تكون تامــة

$$Xy^2dx + (x^2y - \cos(y))\, d\, y = 0$$

$M(x, y)= xy^2$ $\qquad$ $N(x,y) = x^2y - \cos(y)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة التفاضلية تامة.

٢-٦-٢ المعادلة التفاضلية غير التامة *non-exact differential equations*

هي معادلات تفاضلية تفتقد إلى حد أو أكثر من الحدود التي تحتوي على مشتقات بالنسبة لبعض المتغيرات، مما يجعلها غير مكتملة مقارنة بالمعادلات التفاضلية التامة [3] .

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال ١١:

$$(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 2xy)dy = 0$$

$$M(x,y) = 3x^2y - 2y^2 \quad , \quad N(x,y) = x^3 - 2xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 - 4y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

بالتالي المعادلة التفاضلية غير تامة لأنها لا تحقق الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

٢-٧ حلول المعادلات التفاضلية (الحل العام والخاص)

٢-٧-١ الحل العام والخاص General solution and Particular solution

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية [٢].

الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشتمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة [٢].

مثال ١٢: جد الحل العام والحل الخاص من المعادلة التفاضلية y'=2x عندما y(1)=0

الحل: الحل العام

$$y' = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow dy = 2xdx$$

$$\to \int dy = \int 2x dx \to y = \frac{2x^2}{2} + C1 \to y = x^2 + C1$$

الحل الخاص

$$\to 0 = (1)^2 + C_1 \to 0 = 1 + C_1 \to C_1 = -1$$

$$y = x^2 - 1$$

٢-٨ تكوين المعادلات التفاضليـــة (حذف الثوابت الاختيارية)

هو عملية تستخدم لتحويل دالة تحتوي على ثوابت اختيارية إلى معادلة تفاضلية تعبر عن العلاقة بين المتغيرات المستقلة والتابعة. تُعرف هذه الطريقة بأنها عكس عملية حل المعادلات التفاضلية. حيث c1,c2,.......cn ثوابت اختيارية، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجري n من المشتقات للمعادلة يكون لدينا n+1 من المعادلات عبارة عن المعادلة بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية التي عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة [٢].

مثال١٣ : أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = c \sin x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$$

$$y' = c \cos x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

الحل:

نحذف (c) من المعادلتين (٢),(١) بقسمة (٢) على (١) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$y' = y \cot x$$

٢-٩ الشروط الابتدائية والحدية والثوابت الاختيارية

٢-٩-١ الشروط الابتدائيــة والحديــة Initial and Boundary Conditions

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية. وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام [٢].

مثال١٤ : أوجد حل المعادلة y'=2x التي تحقق الشرط y(2)=3

الحل:

$$y(x) = x^2 + c$$

$$3 = 4 + c \;\rightarrow\; c = -1$$

بتكامل المعادلة التفاضلية بالتعويض في الشرط

اذن الحل المطلوب $y(x) = x^2 - 1$

والحل يعني هندسيا، منحني يمر بالنقطة (2,3).

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوى على ثابتين اختياريين ، لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة، وهذان الشرطان يأخذان صوراً مختلفة ومنها:

١- إذا أعطى هذان الشرطان عنــد نفس النقطــة x_0 مثل:

$$y(x0) = a \qquad , \qquad y'(x0) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند x_0 ونسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية.

٢- إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين

$$y(x1) = y1 \quad , y(x2) = y2$$

كانت الشروط شروطاً حدية، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية.

مثال١٥: أوجد حل المسألة الاتية:

$$y'' = x \;, \quad y(0) = 1 \;, \qquad y'(0) = -1$$

الحل: يتم اجراء التكامل مرتين الذي يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة.

$$y = \frac{1}{6}\; x^3 + C_1\, x + C_2$$

حيث

$$y' = \frac{1}{2} x^2 + C_1$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية

$$y'(0) = -1 \rightarrow \qquad -1 = C_1 \rightarrow C_1 = -1$$

$$y(0) = 1 \;\rightarrow\; 1 = C_2$$

ويكون حل المسألة المعطاة هو:

$$y = \frac{1}{6}\; x3 - x \; + 1$$

٢-٩-٢ الثوابت الاختياريـــة Arbitrary Constants

عادة ما تظهر ثوابت في حل المعادلات التفاضلية, ويكون الثابت اختيارياً (Arbitrary constant) إذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على المتغير التابع أو المتغير المستقل وتكون الثوابت الاختيارية الداخلة في تعبير ما جوهرية (Essential) إذا لم يمكن دمج أحدها في ثابت أخر [٣].

مثال ١٦/

اذا كانت $T(x) = Ae^{-x^2+B}$ قد يبدو لأول وهلة أن هناك تابعين A,B ولكن بإمعان النظر نلاحظ أنه يمكن دمج الثابتين في ثابت جوهري واحد و بالتالي [٣]

$$\boldsymbol{T(x) = Ae^{-x^2+B}}$$

$$\boldsymbol{= Ae^{B}.\, e^{-x^2}}$$

$$\boldsymbol{= Ce^{-x^2}}$$

حيث

$$\boldsymbol{C = Ae^{B}}$$

الفصل الثالث

٣- ١المقدمـــــة

٣-٢ تعريف تحويل لا بلاس

٣-٣ – الشروط اللازمة والكافية لوجود تحويل لا بلاس

٣-٤ تحويل لابلاس لبعض الدوال

٣-٥ خواص تحويل لا بلاس

٣-٦ قوانين تحويل لا بلاس

٣-٧ تحويل لا بلاس العكسي

٣-٨ قوانين تحويل لا بلاس العكسي

٣-٩تحويلات لا بلاس المشتقات

٣-١٠ حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويل لا بلاس

الفصل الثالث

Chapter three

٣-١ المقدمة Introduction

تحويل لابلاس هو تحويل تكاملي عند تأثيره على الدالة يحولها إلى داله أخرى مختلفة تماماً عن الدالة الأصلية حيث يتم تحويل المتغير المستقل للدالة إلى متغير آخر و بالتالي يغير نطاق و مدى الدالة الأصلية تعتمد تحويلات الابلاس اعتمادا كلياً على التكامل [٢]. أي أن تحويل لابلاس معرف كتكامل على المدى من الصفر إلى ما لانهاية ، ويكون تحويل لابلاس فعالا بوجه خاصه في حل مسائل القيمة الابتدائية المحتوية على معادلات تفاضليه خطيه بمعاملات ثابته[٧].

هي أداة قوية و فعالة في حل المعادلات التفاضلية والتكاملية حيث أنه يمكن من تحويل هذه المعادلات المعقدة إلى معادلات جبرية أكثر بساطة. كذلك فهو يسهل عملية تحليل الأنظمة المختلفة، سوآءا كانت في مجال الهندسة، الفيزياء أو حتى الاقتصاد. لذلك فإن استخدام تحويل لابلاس لا يسهم فقط في تبسيط الحسابات الرياضية بل يعزز أيضا من فهمنا العميق لسلوك الأنظمة الديناميكية المختلفة [٢٤].

هو عملية تجري على الدوال الرياضية لتحويلها من مجال الي آخر وعادة يكون من مجال الزمن الي مجال التردد, وأيضاً يوجد تحويل لإبلاس العكسي وهو يقوم بتحويل الدالة بمتغير قيمته عدد مركب الي داله بمتغير قيمته عدد حقيقي [٢٥].

فإن تحويل لابلاس المنسوب إلى عالم الرياضيات الشهير لابلاس، ١٧٤٩-١٨٢٧م ،الفرنسي الجنسية يعمل على التأثير على دالة f فيكون الناتج دالة أخرى شأنه في ذلك شأن مؤثرات أخرى كثيرة كالمؤثر التفاضلي مثلا أو تكامل f وما شابه ذلك [١]

٣-٢ تعريف تحويل لابلاس Definition of Laplace Transform

لتكن f دالة معرفة لجميع قيم t غير سالبة ولتكن F دالة معرفة على النحو التالي :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1)$$

حيث مجال F يتكون من جميع قيم s التي تجعل التكامل في (١) موجودا ويطلق على الدالة F تحويل لابلاس للدالة f وللاختصار نشير لهذا التحويل بالرمز L{f(t) } .

ملاحظة . لاحظ أن التكامل في (١) من التكاملات المعتلة فهو أصلا عبارة عن النهاية طالما وجدت هذه النهاية

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = L\{f(t)\} \; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \quad (2)$$

طالما وجدت هذه النهاية [١].

٣-٣ الشروط اللازمة و الكافية لوجود تحويل لابلاس Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Laplace Transform

اذا كانت f دالة بحيث أن :

1- f متقطعة الاستمرارية على الفترة $0 \le t \le A$ لكل عدد حقيقي موجب A

يمكننا ايجاد ثابتين : a و m بحيث أن $|f(t)| \le Me^{at}$ لكل قيم t أكبر من عدد حقيقي T

عندئذ فإن تحويل لابلاس للدالة :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

موجودا لكل قيم s>a [٥].

٣-٤ تحويل لابلاس لبعض الدوال Laplace Transform of Some Functions

جدول٣.١ : تحويلات لابلاس لبعض الدوال [٩]

تحويل لابلاس F(s)	الإشارة f(t)	اسم الإشارة f(t)
1	$\delta(t)$	الوحدة النبضية
$\frac{K}{S}$	K	الوحدة الدرجية (k ثابت)
$\frac{K}{S^2}$	$K\,t$	الوحدة التصاعدية
$\frac{k}{s+a}$	$K.e^{-at}$	الإشارة الاسية بثابت a>0
$\frac{k}{\tau.s+1}$	$k.e^{-\frac{t}{\tau}}$	الإشارة الأسية بثابت زمن $\tau > 0$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	الاستجابة الدرجية للنظام ذي المرتبة الأولى بثابت a>0
$\frac{k}{s(\tau.s+1)}$	$k\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$	الاستجابة الدرجية للنظام ذي المرتبة الأولى بثابت زمن $\tau > 0$
$\frac{k\omega}{s^2+\omega^2}$	$k.sin\,(\omega t)$	الإشارة الجيبية sin تردد زاوي ω
$\frac{ks}{s^2+\omega^2}$	$k.cos(\omega t)$	الإشارة الجيبية cos تردد زاوي ω
$\frac{k\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$k.e^{-at}.sin\,\omega t$	الاستجابة الأسية الجيبية sin
$\frac{k(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$	$k.e^{-at}.\ cos\,\omega t$	الاستجابة الأسية الجيبية cos
$\frac{k}{(s+a)^2}$	$k.t.e^{-at}$	الاستجابة الخطية الأسية

٣-٥ خواص تحويل لابلاس Properties of Laplace Transform

الخاصية الاولى : (زوج التحويل)

تحويل لابلاس [٥]

$$\mathrm{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

الخاصية الثانية: (تحويل المشتقات الجزئية)

لنفرض أن $u\ (x,t)$ دالة ذات متغيرين سنعمل على إيجاد تحويلات لابلاس للمشتقات الجزئية u_t ,

u_{tt} , u_x , u_{xx} , ... بما أن تحويل لابلاس يحول المتغير t (متغير التكامل) فعندئذ يكون تحويل

المشتقات الجزئية الأتية :

$$L[u_t] = \int_0^\infty u_t(x,t)e^{-st}dt = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$L[u_{tt}] = \int_0^\infty u_{tt}(x,t)e^{-St}\,dt = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

$$L[u_x] = \int_0^\infty u_x(x,t)e^{-st}dt = \frac{\partial U}{\partial x}(x,s)$$

$$L[u_{xx}] = \int_0^\infty u_{xx}(x,s)e^{-st}dt = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s)$$

حيث أن: $U(x,s)= L[u(x,t)]$, ويتبع تحويلا u_{xx} و u_x من العلاقة الأساسية للتفاضل والتكامل الأتية:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

كما يتبع تحويلا u_t , u_{tt} باستخدام التكامل الجزئي [٥].

الخاصية الثالثة: (خاصية الالتفاف)

الالتفاف المنتهي للدالتين f , g بالاتي :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

هذان التكاملان متساويان) ,وبعبارة اخرى ,في الالتفاف المنتهي نكامل من 0 الى t بدلا من

$-\infty$إلى ∞ في حالة الالتفاف غير المنتهي[٥] .

٣-٦ قوانيـن تحويلات لابلاس Rules of Laplace Transform

قاعدة رقم (1)

إذا كانت $f(t) = e^{at}$ فإن

$$\bar{f}\ \ (s) = \frac{1}{s-a}\ for\ s > a$$

البرهان:

$$\bar{f}(s) = L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{1}{a-s};\,s > a$$

$$= \frac{1}{s-a}.$$

قاعدة رقم (2)

إذا كانت $f(t) = t^n, n = 0, 1, 2, ...$ فإن

$$\bar{f}\ (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

البرهان:

$$\bar{f}\ (s) = L(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}\,t^n\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s}\,e^{-st}t^n\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,t^{n-1}\,dt\,;\,s > 0$$

$$= 0 + \frac{s}{n}\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1}\, dt \,;\, s > 0$$

$$= \frac{n}{s} L(t^{n-1})$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s}\, L(t^{n-2})$$

$$= \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} L(t^{n-3})$$

$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\ \ldots .\, 2.1}{s^n} L(t^0)$$

$$= \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\therefore\ L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

قاعدة رقم (3)

إذا كانت $f(t) = \sin(at)$ فإن

$$\bar{f}\ (s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

البرهان:

$$\sin(at) = \frac{1}{2i}\{e^{iat} - e^{-iat}\} = \frac{1}{i}\sinh(iat\,)$$

إذن

$$L\,\{\sin(at)\} = L\left\{\frac{1}{2i}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2i} L\left(e^{iat}\right) - \frac{1}{2i} L\left(e^{-iat}\right)$$

وباستخدام القاعدة رقم (1) نجد أن:

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right]$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2ia}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

قاعدة رقم (4)

إذا كانت $f(t) = \cos(at)$ فإن

$$L\{\cos(at)\} = \frac{s}{a^2+s^2}$$

البرهان:

$$\cos(at) = \frac{1}{2}\{e^{iat} + e^{-iat}\} = \cosh(iat)$$

إذن

$$L\{\cos(at)\} = \frac{1}{2}L\left(e^{iat}\right) + \frac{1}{2}L\left(e^{-iat}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+ia}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}$$

قاعدة رقم (5)

إذا كانت $f(t) = \sinh(at)$ فإن

$$\bar{f}\,(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

البرهان:

$$\sinh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$$

إذن

$$L\{\sinh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2 - a^2}$$

قاعدة رقم (6)

إذا كانت $f(t) = \cosh(at)$ فإن

$$\bar{f}\,(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

البرهان:

$$\cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$$

إذن

$$L\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}$$

قوانين تحويل لابلاس [٢٣].

٣-٧ تحويل لابلاس العكسي Inverse Laplace Transform

يقال عن الدالة **f(t)** ويشار إليها بالرمز $L^{-1}[F]$ انها تحويل لابلاس العكسي للدالة **F(s)** إذا كانت **f(t)** متصلة على الفترة $[0,\infty)$ [١] .

الدالة **F(t)** تسمى الصورة العكسية للتحويل اللابلاسي وتكتب كما يلي [٨] .

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$$

٣-٨ قوانين تحويل لابلاس العكسي Rules of Inverse Laplace Transform

جدول٢.٣ : قوانين تحويل لابلاس العكسي [١].

F(s)	$L^{-1}\{F(t)\}$
$\frac{1}{s}, s > 0$	1
$\frac{1}{s-a}, s > 0$	e^{at}
$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$	$t^n : n = 1, 2, \ldots \ldots$
$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$	$t^n e^{at}; n = 0, 1, \ldots \ldots$
$\frac{b}{(s^2+b^2)}, s > 0$	Sin bt
$\frac{s}{(s^2+b^2)}, s > 0$	Cos bt
$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > 0$	$e^{at} \sin bt$
$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > 0$	$e^{at} \cos bt$

٣-٩ تحويلات لابلاس المشتقات Laplace Transforms of Derivatives

نفترض أن الدالة y(x) قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ,فإن مؤثر لابلاس للمشتقة يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$. [٢]

ويعرف كالاتي:

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px}\frac{dy}{dx}dx$$

$$L\{\frac{dy}{dx}\} = \int_0^{\infty} e^{-px}\, dy$$

$$= [ye^{-px}]_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} ye^{-px}\, dx$$

وبالتالي:

$$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = P\overline{y}(P) - y(\,0\,) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \quad (\,1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالاتي:

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-PX}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dX$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-PX}\; d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \left[\frac{dy}{dx}e^{-PX}\right]_0^{\infty} + P\int_0^{\infty}\frac{dy}{dx}e^{-PX}\,dx$$

ومن العلاقة (١) يكون

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0)$$

من هذا نحصل على

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = p^2\overline{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(2)$$

حيث y(0) هي قيمة y(x) محسوبة عند x

و $y^{(1)}$ =0 هي قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة أيضا عند x=0

والصيغة العامة هي:

$$L\left\{\frac{d^ny}{dx^n}\right\} = p^n\overline{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \dots\dots\dots..(3)$$

حيث $y^{(r)}(0)$ هي قيمة $\frac{d^ry}{dx^r}$ محسوبة أيضا عند x=0, r-0, 1,…n-1

٣-١٠ حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويل لابلاس Solving Differential Equations Using Laplace Transform

إن من أهم تطبيقات تحويل لابلاس هو حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة والتي تتوفر لها شروط ابتدائية [٢٣] .

قاعدة رقم (١)

إذا كانت $\mathrm{f}'(t) = \frac{df}{dt}$ موجودة لكل $t \geq 0$ بحيث أن $\mathrm{f}'(t)$ تكون مستمرة جزئيا وذات رتبة أسية وكانت بالطبع الدالة $f(t)$ مستمرة عند $t \geq 0$ فإن:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

البرهان:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة نجد أن:

$$L\{f'(t)\} = [e^{-st}.f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty (-s) e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0)$$

قاعدة رقم (٢)

إذا كانت $f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}$ موجودة لكل $t \geq 0$ بحيث أن $f''(t)$ تكون مستمرة جزئيا وذات رتبة

أسية وكانت $\mathrm{f}(t)\, , \mathrm{f}'(t)$ مستمرتان عند $t \geq 0$ فإن

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

البرهان:

$$\mathrm{L}\{f''(t)\} = sL\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s[sL\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - \mathrm{f}'(0)$$

قاعدة رقم (٣)

إذا كانت $f^n(t) = \frac{d^n f}{dt^n}$ موجودة لكل $t \geq 0$ بحيث أن $\mathrm{f}^n(t)$ تكون مستمرة جزئيا وذات رتبة

أسية و كانت الدوال $f, f', .., f^{n-1}$ مستمرة عند $t \geq 0$ فإن

$$\mathrm{L}\{f^n(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$$

مثال / باستخدام تحويل لابلاس حل المعادلة $y'' + 7y' + 12y = 0$

حيث $y(0) = 1; y'(0) = 0$

الحل/

$$s^2\bar{y} - sy(0) - y'(0) + 7\{s\bar{y} - y(0)\} + 12\bar{y} = 0$$

إذن $$(s^2 + 7s + 12)\bar{y} - (s + 7) = 0$$

$$\bar{y} = \frac{s + 7}{s^2 + 7s + 12} = \frac{s + 7}{(s + 3)(s + 4)}$$

وباستخدام طريقة الكسور الجزئية نجد أن:

$$\bar{y} = \frac{4}{s + 3} - \frac{3}{s + 4}$$

إذن يأخذ L^{-1} للطرفين نجد أن:

$$y = 4e^{-3t} - 3e^{-4t}$$

الفصل الرابـــع

٤-١ الاستنتاجات

٤-٢ التوصيات

٤-٣ المقترحات

الفصل الرابع

Chapter four

٤-١ الاستنتاجات Conclusions

١- فعالية تحويل لابلاس في حل المعادلات لتفاضلية: أظهر البحث أن استخدام تحويل لابلاس يعد أداة قوية في تبسيط وحل المعادلات التفاضلية، خاصة عندما تكون الشروط الابتدائية معقدة أو يصعب التعامل معها بالطرق التقليدية.

٢- سهولة التعامل مع الشروط الابتدائية: مقارنة بالطرق التقليدية، فإن تحويل لابلاس يسمح بأخذ الشروط الابتدائية في الحسبان بطريقة مباشرة دون الحاجة إلى حل معادلات تفاضلية جزئية.

٣- تقليل التعقيد الحسابي: استخدام تحويل لابلاس يوفر طريقة أكثر كفاءة من الحلول التحليلية التقليدية، حيث يتم تحويل العمليات التفاضلية إلى عمليات جبرية يمكن التعامل معها بسهولة.

٤- قابلية التعميم على أنواع أخرى من المعادلات: رغم أن البحث اقتصر على المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة، إلا أن النتائج أظهرت إمكانية توسيع نطاق تطبيق هذه الطريقة لتشمل المعادلات غير الخطية أو تلك التي تتضمن شروطًا حدية معقدة.

٥- القيمة التعليمية والبحثية للطريقة: يُمثل هذا البحث قيمة مضافة في المجال الأكاديمي، إذ يعزز من فهم الطلبة والباحثين لمفاهيم التحليل الزمني وتحليل النظم، ويضعهم أمام أداة رياضية مهمة تجمع بين البساطة والكفاءة في الحل.

٢-٤ التوصيات Recommendations

١- توسيع الدراسة لتشمل أنواعًا أخرى من المعادلات التفاضلية: يُوصى بإجراء دراسات مستقبلية على معادلات تفاضلية غير خطية باستخدام تحويل لا بلاس، لمعرفة مدى فعالية الطريقة مع أنواع مختلفة من المعادلات، خاصةً تلك التي تتضمن شروطًا ابتدائية أو حدودية غير اعتيادية.

٢- دمج تحويل لابلاس مع تقنيات أخرى مثل تحويل فورييه أو تحويل ميلين لتعزيز القدرة على حل أنواع أكثر تعقيدًا من المعادلات.

٣- إدراج تطبيقات عملية من الحياة الواقعية: يوصى بإثراء البحث بتطبيقات واقعية من مجالات مثل الهندسة الكهربائية، والفيزياء، والاقتصاد، لتقوية العلاقة بين الجانب النظري والتطبيقي، وتعزيز الفهم العملي للطلبة والباحثين.

٤- إنشاء ملاحق توضيحية لحالات دراسية تطبيقية: يُنصح بإعداد ملاحق أو كتيبات تدريبية تتضمن مسائل محلولة باستخدام تحويل لابلاس، بهدف تسهيل التعلم الذاتي للطلبة وتوفير موارد تعليمية مساندة.

٥- إدخال مفاهيم تحويل لابلاس في مناهج الرياضيات التطبيقية: يُوصى بتوسيع تدريس تحويل لابلاس ضمن مقررات الرياضيات التطبيقية لطلبة كليات العلوم والهندسة، لما له من أثر كبير في تبسيط وحل المعادلات التفاضلية وتحليل الأنظمة الزمنية.

٦- استخدام البرمجيات في التطبيق العملي: يُنصح بتوظيف برمجيات رياضية مثل MATLAB أو Mathematica في تدريس وحل المسائل باستخدام تحويل لابلاس، لتسهيل التفاعل بين المفهوم النظري والتطبيق الرقمي الحديث.

٤-٣ المقترحــات Suggestions

١- إجراء مقارنة تحليلية بين تحويل لابلاس وغيره من طرق الحل

من المفيد إعداد دراسات مقارنة بين طريقة تحويل لابلاس وطرق أخرى مثل الطريقة التحليلية أو العددية أو طريقة المتسلسلات، من حيث الكفاءة، والسرعة، والدقة في الحل، خصوصًا في حالات الشروط الابتدائية المعقدة.

٢- ربط الموضوع بمشروعات التخرج أو بحوث التخرج التطبيقية

ينبغي تشجيع طلبة الرياضيات والهندسة على استخدام تحويل لابلاس في مشاريع التخرج التي تتناول تحليل الأنظمة الكهربائية أو الميكانيكية أو الاقتصادية، لما توفره هذه الأداة من تبسيط للمعادلات المعقدة.

٣- دمج الموضوع ضمن المقررات متعددة التخصصات

يُقترح دمج موضوع تحويل لابلاس ضمن مقررات مشتركة بين أقسام الرياضيات والهندسة ونظم المعلومات، من أجل تعزيز الطابع البيني (Interdisciplinary) للموضوع وإظهار أهميته التطبيقية.

المصادر والمراجع

اولا: المصادر و المراجع العربية:

١. سالم بن احمد سحاب, مقدمة في المعادلات التفاضلية, مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز, الطبعة الثالثة, لسنة ١٤٢٦هـ - ٢٠٠٥م, ص٢٥٨,٢٥٧ ,٢٧٠,٢٧١.

٢. حسن مصطفى العويضي, عبد الوهاب عباس رجب, سناء علي زارع, المعادلات التفاضلية, الجزء الاول مكتبة الرشيد, ١٤٢٧هـ_٢٠٠٦م, ص ٥, ١٢ , ١٣ , ١٥,١٦, ٢٧٣ ,٢٧٤ ,٢٦١.

٣. اسماعيل بوقفه, الدكتور عايش المنادوه, المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات, ١٥ نوفمبر ٢٠١٠ ص١,٩,٤٧,١١,١٢.

٤. السيد محمد أبو دهب خضيري, طاهر عبد الحميد نوفل, مراجعة عبد المعطي محمد عبد الله, مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية, الطبعة الاول, ١٤٤١هـ-٢٠٢٠م, ص ١٠.

٥. تأليف اس فارلو, ترجمة الدكتورة مها عواد الكبيسي, مراجعة الدكتور محمود إبراهيم عزوز, الدكتور عبد الله ناصر, المعادلات التفاضلية الجزئية , منشورات جامعة عمر المختار البيضاء, ٢٠٠٥/٢/٢ ص١٥٥, ١٥٦ , ١٥٢,١٥٣, ٥.

٨. رمضان محمد جهيمة, احمد عبد العالي هب الري , التفاضل والتكامل, الطبعة الثالثة, الجزء الاول,١٩٩٩/٩/١ ص ٥٠٨,٥٠١.

٩. يحيى حمدي محمد البشار, أسس وقواعد المعادلات في تبسيط علوم فيزياء الرياضيات, الطبعة الاولى, مايو ٢٠٢١, ص ٢٣٣ ,٢٣٤.

١٨. عبد الشافي فهمي عبادة, حسن مصطفي العويضي , عفاف أبو الفتوح صالح, المعادلات التفاضلية و تطبيقاتها, الطبعة الاولى ٢٠١٠, الطبع و النشر دار الفكر العربي , ص ٢١-٢٢.

١٩. خالد أحمد السامرائي, يحيى عبد سعيد, طرق حل المعادلات التفاضلية, رقم الايداع في المكتبة الوطنية ببغداد , لسنة ١٩٧٩, ص١٩.

٢٣. مجدي أمين كتبي , مروان أمين كتبي, المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية, الطبعة الأولى لسنة ١٩٩٩, ص ١٢٣-١٢٧, ٣٢, ٣٣.

٢٤. جوامع، مريمان, مرغاد، نسرين, & رمضان، سميرة (٢٠٢٤). تحويل لابلاس وبعض تطبيقاته.

٢٥. بيجاوي, & زبيدة عبدالله حمد. (٢٠١٧). تــحويــلات لابـــــلاس وتطبيــقاتـــــها الفيــزيـــائيــــة (Doctoral dissertation, جامعة البطانة كلية الدراسات العليا).

ثانياً: المصادر الاجنبية

6. Zill, Dennis G., and Michael R. Cullen. Differential Equations with Boundary-Value Problems. 5th ed., Brooks/Cole, 2001,Page Number 120.
7. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary differential equations and boundary value problems (10th ed.). Wiley,Page Number 133,309.
10. Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics (10th ed.). Wiley, Hoboken, NJ, USA, Page Number 203.
11. Oppenheim, A. V., & Willsky, A. S. (1997). Signals and Systems (2nd ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA ,page Number 654.
12. Dorf, R. C., & Bishop, R. H. (2017). Modern Control Systems (13th ed.). Pearson, Hoboken, NJ, USA,page Number 52.
13. Ogata, K. (2010). Modern Control Engineering (5th ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA , page Number 860.
14. Churchill, R. V., & Brown, J. W. (2018). Complex Variables and Applications (9th ed.). McGraw-Hill Education, New York, NY, USA ,Page Number 298.

15. Brannan, J. R,& Boyce, W. E .(2015). Differential Equations An lntroduction to Modern Methods and Applications (3rd ed.).Wiley, page Number 5.

16. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley page Number 244 .

17. Kreyszig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics. Wiley page Number 204 .

20. William E . Boyce /Richard C . Diprima .(2012) Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Page Number 21.

21. H. B. PHILLIPS, PH. D.(1922) DIFFERENTIAL EQUATIONS, Page Number 25

22. Earl A. Coddington,(1989). An Introduction to Ordinary Differential Equations,Second Edition. Page Number 122.