جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية الأساسية – قسم الرياضيات

العنوان :

العدد العقدي والدوال العقدية

بحث
مقدم الى مجلس كلية التربية الأساسية في جامعة ميسان كجزء من متطلبات
نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

مقدم من قبل
اطياف عبدالحسين زغيرون حسين علي دعير سجى علي عزيز

بإشراف
ا.م عباس كامل عثمان
ا.م ود داوود قاسم

1447هـ 2026م

إقرار المشرف

اشهد ان هذا البحث الموسوم

(العدد العقدي)

الذي تقدم به كل من

1- أطياف عبدالحسين زغيرون
2- سجى علي عزيز
3- حسين علي دعير

قد جرى تحت اشرافي في جامعة ميسان كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات
وهذا جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في التربية الأساسية قسم الرياضيات .

التوقيع :
المشرف : ا.م عباس كامل عثمان
اللقب العلمي : أستاذ مساعد
اسم المشرف : ا.م ود داوود قاسم
اللقب العلمي : أستاذ مساعد
السنة الدراسية : 2026 - 2025

بناء على توصية المشرف أقدم هذا البحث للمناقشة .

ا.د سامي عطية سيد
رئيس قسم الرياضيات
التاريخ : / / 2026

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَأَن لَّيْسَ لِلْإِنسَٰنِ إِلَّا مَا سَعَىٰ (٣٩) وَأَنَّ سَعْيَهُۥ سَوْفَ يُرَىٰ (٤٠)﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة النجم ايه رقم (39) و (40)

الاهداء

الى من أضاءوا لنا بدمائهم دروب الحرية، وسطروا بتضحياتهم أسمى معاني الوفاء، إلى الأرواح الطاهرة التي حلقت في سماء المجد لتمنحنا الأمان لنقف اليوم هنا.. إلى شهداء الوطن الأبرار، نهديكم هذا الثمر، فأنتم الأحياء فينا أبداً.

إلى من كان له الفضل في تقويم المسار، وبسط يد العون بعلمه وخلقه، إلى من لم يبخل بجهد أو نصح طيلة فترة البحث.

إلى منبع العطاء ومدرسة الصبر، إلى والديّ العزيزين، وعائلتي وكل من ساندني بكلمة أو دعاء حتى أتممت هذا المشوار الأكاديمي، أهديكم ثمرة جهدي المتواضع.

الشكر والتقدير

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبفضله وتوفيقه تكتمل الغايات، والصلاة والسلام على المعلم الأول والبشير النذير، وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.

أتقدم بوافر الشكر وعظيم الامتنان إلى صرح العلم والمعرفة جامعة ميسان، متمثلة بـ كلية التربية الأساسية، التي احتضنت مسيرتي الدراسية، وإلى قسم الرياضيات بأساتذته الأفاضل الذين لم يدخروا جهداً في تقديم المعلم والنصح، ومنحونا من فيض علمهم ما ينير لنا الدروب.

وأخيراً، أهدي شكري لكل من ساندني وقدم لي يد العون من زملائي وأصدقائي، ولكل من كان له بصمة تشجيع في هذا المشوار الأكاديمي.

الفهرست

الفصل الأول :الاعداد العقدية النشأة والخصائص 1

(1-1)المقدمة..... 2

(1-2)تاريخ ونشأت العدد العقدي..... 3

(1-3)ضرورية وجود العدد العقدي..... 4

(1-4)توبلوجي العدد العقدي 4

(1-5)مجموعة الاعداد العقدية..... 7

(1-6) الخواص الجبرية للعدد العقدي... 8

(1-7) مرافق العدد العقدي.....9

الفصل الثاني:الدوال التحليلية والتوافقية..... 11

(2-1) الدالة التحليلية..... 12

(2-1-1)تعريف المشتقة..... 13

(2-2)معادلة كوشي ريمان..... 14

(2-3)معادلة لابلاس..... 16

(2-4)الدالة التوافقية..... 16

الفصل الثالث:الدوال الأولية والعقدية..... 19

(3-1) الدالة الأولية 20

(3-2)الدالة الاسية..... 20

(3-3)الدالة اللوغاريتمية..... 23

(3-4)تطبيقات للدالة العقدي اللوغارتيمية..... 25

الفصل الرابع:استنتاجات وتوصيات..... 28

(4-1)حاجه علميه حديثة يدعم النظرية الكمومية للمادة 29

(4-2) درسنا قابلية اشتقاق الدوال العقدية 29

(4-3)التوصيات..... 31

المصادر 32

الرموز

الرمز	التعريف
$\sqrt{z}$	جذر العدد العقدي
$f(z)$	الدالة التحليلية
x, y	متغيرات حقيقية
$y = a^x$	الدالة الاسية
$\mathbf{C}$	ثابت حقل الاعداد العقدي
$\|z\|$	القيمة المطلقة العدد العقدي
$w = f(z)$	دالة عقدية
$u(x, y)$	الدالة التوافقية
$f(x) = e^x$	الدالة الاسية
e	عدد ثابت
x	متغير
z	العدد العقدي
i	الوحده التخيلية
a	الجزء الحقيقي
b	الجزء التخيلي
$[a, b]$	فترة مغلقة
(a, b)	فترة مفتوحة
$\bar{z}$	المرافق العدد العقدي
$z_1 + z_2$	الجمع العدد العقدي
$z_1 - z_2$	طرح العدد العقدي
$\frac{z_1}{z_2}$	القسمة العدد العقدي
$log\ (k)$	الدالة الوغارتمية
$\frac{d}{d \propto}, \frac{\propto}{dy}$	مشتقات جزئية
λ	ثابت
N_0	عدد النوى الابتدائي
w_0	المشتقة الأولى للدالة f

المعادلات

التعريف	المعادلة
المعادلة العامة الاعداد العقدي	$z = a + bi$
معادلة الدالة التحليلية	$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$
معادلة الدالة التوافقية	$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$
معادلة المنحني العدد العقدي	$c: z(t) = z_0 + (z_1 - z_2)t$ $0 < t < 1$
تعريف المشتقة	$f'(z) = \lim_{\Delta z - 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

ملخص البحث

الهدف الرئيس في هذا البحث هو توضيح مفهوم مهم فى الرياضيات وهو العدد العقدي والذي يعد من المفاهيم الأساسية في فرع التحليل العقدي ويعتبر هذا الفرع احد فروع الرياضيات التي تهتم بدراسة الاعداد التي يحتوي على جزء تخيلي حيث تستخدم الاعداد العقدية بشكل واسع في العديد من التطبيقات العلمية والرياضية لما لها من اهمية في حل المعادلات. التي لا يمكن حلها حتمن الاعداد الحقيقية وتم تقسيم هذا العمل الى اربع فصول رئيسية على النحو الاتي.

في الفصل الأول: يتم التطرق الى المفاهيم الأساسية المرتبطة بموضوع البحث حيث تم تعريف العدد العقدي وبيان مكوناته (الجزء الحقيقي والجزء التخيلي) اضافه الى توضيح الخواص الجبريه والتبولوجي العدد العقدي وكذلك القيمه المطلقة لها وذكر امثله توضيحيه تدعم الفهم

في الفصل الثاني : تم الانتقال الى دراسه الدالة العقدية ومتغيراتها مع شرح مفصل لكيفية بناء الدالة كجزء من متغيرتها عما تم توضيح مفهوم الدالة التحليلية والدالة التوافقية وشروط الاشتقاق فضلا عن دراسة معادلتين (كوشي وريمان- لابلاس) وتوضيح ذلك في امثله

في الفصل الثالث: نص هذا الفصل لدراسة الدوال الأولية الاعداد العقدي وهي الدالة الاسيه والدالة اللوغارتمية مع تقديم سلسلة من الامثلة التي توضح الدوال

في الفصل الرابع : ختم البحث بعرض اهم النتائج والاستناجات التي تم التوصل إليها متبوعة بمجموعة من التوصيات العلمية.

الفصل الأول

الاعداد العقدية :النشأة والخصائص

(1-1)المقدمة...

(1-2)تاريخ ونشأت العدد العقدي

(1-3)ضرورية وجود العدد العقدي

(1-4)توبلوجي العدد العقدي

(1-5)مجموعة الاعداد العقدية

(1-6) الخواص الجبرية للعدد العقدي

(1-1)المقدمة...

ان حاجة الأنسان الى توسيع العلوم الرياضية قاد الى توسيع مفهوم العدد[1]

وقد نتجت فكرة العدد العقدي عند الحاجة الى حل المعادلات

من الشكل $x^2 + 1 = 0$ التي لم يكن حلها ممكناً في مجموعةالاعداد الحقيقية R. [1]

ويعتمد العدد العقدي على فكرة جمع بين عددين عدد حقيقي وعدد تخيلي ويكتب على صورة:-

$(a + bi)$حيث يمثل a الجزء الحقيقي ويمثل b الجزء التخيلي و i هو الوحدة التخيلية[2]

ولاتقتصر فوائد العدد العقدي على حل المعادلات الدبرية بل هناك قضايا رياضية وفيزيائية ما كانت ممكنة للحل لو لم يتوصل العقل البشري الى هذا المفهوم الجديد لـ الاعداد[1]

(1-2)تاريخ ونشأت العدد العقدي

1- البدايات القديمة (القرن الأول الميلادي)

اول اشارة غير مباشرة للاعداد العقدية كانت عند هيرون الإسكندري (10م-70م) عندما واجه الجذر اثناء حساباته. رفضة للفكرة مثل الموقف السائد لا وجود لجذر عدد سالب [3].

2- العصور الوسطى (القرن الخامس الى الخامس عشر) عالم الرياضيات الهندي بها سكارا اشاريا

(486م) قال ان الجذر التربيعي لعدد سالب" غير موجود" استمر هذا الرفض اكثر من احد عشر قرناً ، حيث اعتبرت الجذور السالبة بلا معنى [3]

3- بداية الفهم - عصر النهضة (القرن السادس عشر)(جير ولأمو كاردانو 1501-1576)

اول من كتب الجذور صراحة أثناء حل المعادلات التكعيبية في كتابة Ars Magna عام 1545م الاعداد التخيلية . [3]

رافائيل بومبياي (1572-1526) فسر نتائج كاردانو واعتبرها ذات معنى جبري

نشر كتاب (LAl gebra) وفيه اول قواعد التعامل الاعداد العقدية يعتبر المؤسس الحقيقي لعلم الاعداد العقدية [3].

4- البحث عن تفسير هندسي (القرن السابع عشر والقرن الثامن عشر)

- رينية ديكارت (1569م-1650م) صاغ مصطلح ((العدد التخيلي))(Number imainary) عام 1637م رفض إمكانية تمثيل الاعداد التخيلية هندسياً[3].
- جون واليس (1612م-1703م) حاول إيجاد معنى هندسي للجذر لكنه فشل في تقديم تفسير مقنع[3]
- كاسبر ويزل (1745م-1818م) احدث ثورة هندسية عام (1797م) حين رسم الاعداد العقدية كنقاط في المستوى ثنائي الابعاد (المستوى العقدي)[3].
- روبرت ارجاند (1768م-1822م) وابيه بوبي (1748م-1826م) أعادا نشر وتأكيد أفكار ويزل ساعدا في ترسيخ التمثيل الهندسي للاعداد العقدية[3].

5- المقاربة الجبرية الحديثة (القرن التاسع عشر)

- ويليام روان هاملتون (1805م-1852م) وضع الصيغة الجبرية للاعداد العقدية باعتبارها زوج مرتب من الاعداد الحقيقية.

(a,b) left right arrow $(a + bi)$

6- التحليل القعدي ونظرية الدوال (القرن التاسع عشر) ليو نهاد اويلر (1707م-1783م) ربط الاعداد العقدية بالتحليل المثلي وانشقت هوية اويلر الشهيرة[3]

$$e^{1}\{ilpi\} + 1 = 0$$

اوغستان كوشي (1789م-1857م) وبرفهارد ريمان (1826 م-1866م) اسسا نظرية الدوال العقدية وضع المعادلات كوشي ريمان كأسس رياضي لتحليل الدوال المركبة[3].

استنتج منها معادلات لابلاس ذات التطبيقات في الفيزياء والهندسة[3].

7- الخلاصة التاريخية...

من رفض تام لفكرة الجذر السالب الى ركيزة أساسية في الرياضيات الحديثة[3].

بومبيلي اعطى اول تمثيل هندسي

هاملتون اعطى البنية الجبرية

اويلر وكوشي وريمان جعلوها أساساً للتحليل والفيزياء[3].

(1-3)ضرورية وجود العدد العقدي

تعد الأعداد العقدية ضرورة رياضية ظهرت نتيجة لعدم كفاية الأعداد المعادلات الحقيقية لحل جميع المعادلات فعلى سبيل المثال لا يوجد عدد حقيقي يرضي المعادلة لذلك تم تعريف الوحدة التخيلية بحيث هذا التوسيع مكن الرياضين من بناء نظام عددي مغلق و متكامل يشمل جميع الجذور الممكنة للمعادلات الجبرية [4].

كما ان الأعداد العقدية تربط الجبر بالهندسة من خلال تمثيلها كنقاط فى المستوى العقدي حيث الجزء الحقيقي يمثل المحور الافقي والجزء التخيلي المحور العمودي[4].

وتستخدم في الفيزياء وخاصة في تحليل التيارات الكهربائية، وكذلك تستخدم في الهندسة والبرمجة وتحليل الاشارات [4]

(1-4)توبلوجي العدد العقدي :-

سنتطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية التي تتعلق بمجموعات النقاط فالفضاء العقدي وأول هذه المفاهيم هو المنحني والذي يعرف بانه المدى للدالة المستمرة ذات القيم العقدية $(z(t))$ المعرفة على الفترة المغلقة (a, b) حيث بالصيغة $z(t) = x(t), y(t)$

حيث $a \leq t \leq b$ وأن $x(t), y(t)$ دوال حقيقية مستمرة[5].

ويكون المنحني املس Smooth عندما تكون $x(t).y(t)$ دوال قابلة للاشتقاق وسنحدد المنحني s بالمعادلة الوسطية $z(t) = x(t) + iy(t)$ حيث $a \le t \le b$ وأن النقطة $z(a) = x(a)\ y(a)$ تسمى النقطة الابتدائية للمنحني بينما $z(b) = x(b).y(b)$ تكون النقطة النهائية للمنحني الان اذا كانت

$z_0 = x_0 + iy_0$ ،$z_1 = x_1 + iy_1$

نقطتين فأن الخط الذي يربط z_0 مع z_1 هو

$(z_t = (x_0 + (x_1 - x_0)t + i(y_1 - y_0)t)$ حيث $0 \le t \le 1$ [5].

ويمكن كتابته بالصورة الاتية:

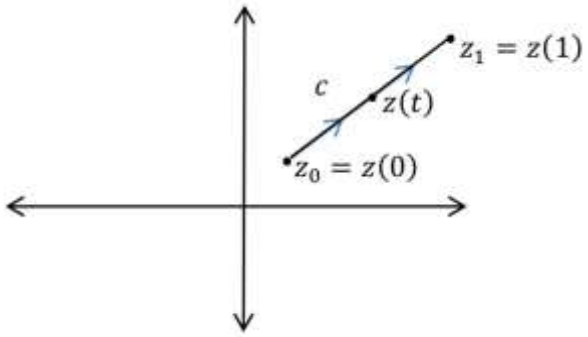
$$c: z_t = z_0 + (z_1 - z_0)t, \qquad 0 \le t \le 1$$

بالنسبة للمنحني c– فأن المعادلة ستاخذ الشكل الاتي:

$$-c: y_t = z_0 + (z_1 - z_0)t, \qquad 0 \le t \le 1$$

ومن هنا نستطيع القول اذا كان cمنحني معادلة الوسيطة هي z(t) فأن المعادلة الوسيطة للمنحني c– تكون

$0 \le t \le 1\ , z(1-t)$



واذا كانت $z_{(a)} = z_{(b)}$ فأن المنحني cيسمى منحني مغلق (closed curve) لان دعنا ندرس المنحني الاتي: $x_t = \sin 2t \cos t\ ,\ y_t = \sin 2t \sin t$ حيث $0 \le t \le 2\pi$ الذي يمثل وردة بأربعة ارواق.[5]

لأحظ ان t تنطلق من $\frac{\pi}{2}$ النقاط في الورقة (1) ومن $\frac{\pi}{2}$ الى π في الورقة (2) وبين π و $\frac{3\pi}{2}$ في الورقة (3) واخيراً t بين $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ في الورقة (4)

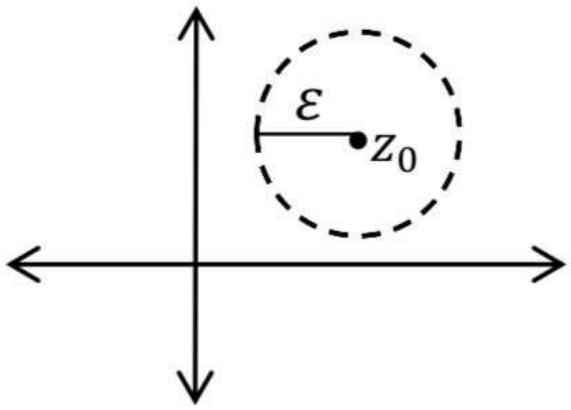
وكذلك يمكن ملاحظة ان المنحني يقعطع نفسه في نقطة الأصل فقط لذلك نسمي المنحني الذي لا يقطع نفسه بالمنحني البسيط (*simple*) والذي يتطلب $z_{t1} \neq z_t$ عندما يكون *t1=t2* باستثناء احتمالية ان يكون.[5]

$$t1 = a, t2 = b$$

الان من المواضيع المهمة التي يصدر دراستها في هذا الفصل هي الجوار للنقطة z_0 في المستوي العقدي والتي تعرف بانها جميع النقاط التي تحقق المتراجحة الاتية

$$|z - z| < \varepsilon$$

وهذا تمثل مجموعة النقاط داخل القرص المفتوح بنصف قطر $\varepsilon > 0$ حول z_0 كما موضح بالشكل



ويرمز له بالرمز $D_\varepsilon = z_0$ والذي يمثل قرص الوحدة المفتوح مركزه z_0 ونصف قطره $\varepsilon > 0$ وعليه يكون:

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$$

والقرص المثقوب بالصيغة

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z: 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D_\varepsilon(z_0)\{0\}$$

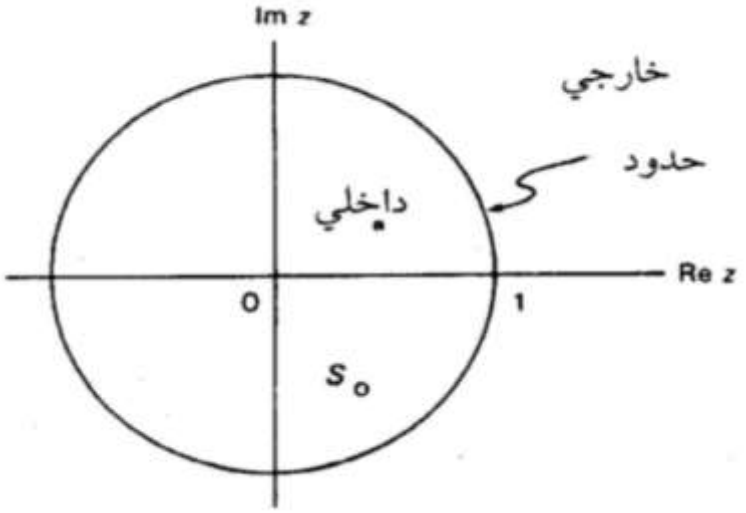
النقطة (z_0) تسمى نقطة داخلية للمجموعة s وتسمى نقطة خارجية للمجموعة s اذا وجد جوار النقطة (z_0) تقاطعة مع المجموعة s يكون المجموعة الخالية (z_0)

والنقطة التي لا يكون داخلية ولا خارجية تسمى نقطة حدودية[5]

مثال/لنفرض ان (s_0) مجموعة النقاط z حيث $|z| < 1$ اوجد داخل المجموعة (s_0) وخارجها وحدودها..؟

- لنفرض ان (z_0) أي نقطة من (s_0) لاحظ ان القرص $|z - z_0| < \varepsilon$ يقع بسمك داخل (s_0) عندما $\varepsilon < 1 - |z_0|$ اذن كل نقطة من (s_0) نقطة داخلية وبالمثال كل نقطة (z_0) تحقق$|z_0| > 1$ هي نقطة خارجية الى (s_0) اذا كان $|z_0| = 1$فأن كل جوار ε الى (z_0) سوف يحوي نقطاً من (s_0) ونقاطا ليست من (s_0)

اذن حدود المجموعة s هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|z| = 1$ داخل (s_0) هي مجموعة $|z| < 1$ من خارج (s_0) فهي مجموعة النقاط التي تحقق $|z| > 1$ من الشكل الاتي



المجموعة s تسمى مجموعة مفتوحة اذا كان كل نقطة من نقاطها داخلية وتسمى مغلقة اذا كان كل نقاطها الحدودية تقع داخل s وكذلك s مجموعة متصلة connected [7، 5]

اذا لكل z_2, z_1 يوجد منحني يصل بينهما يقع بأكمله داخل s مثال على ذلك تكون القرص

$D = \{z: |z| < a\}$

مجموعة متصلة وأيضا الشكل الحلقي $A = \{z: a < |z| < b\}$

هو أيضا مجموعة متصلة مفتوحة لان أي نقطتين هي Aالمفتوح فأن المنحني الذي يربطهما يقع بأكمله داخله وعليه نسمي المجموعة المفتوحة للمتصلة باسم المجال Domoin والمجال مع جميع نقاطه الحدودية تسمى منطقة Begion ومثال على ذلك الشريط [7، 5]

$\{z: 1 < 1mz \leq 2\}$ والمجموعة التي تشكل من اتحاد المجال والنقاط الحدودية تسمى منطقة مغلقة ومثال على ذلك نصف المستوي$\{z: x \leq y\}$

واذا كانت s^c (متممة لمجموعة `s) متصلة فأن المجموعة s تكون متصلة اتصالاً بيسطاً

اما اذا كان s^c ليست متصلة فأن s متصلة اتصالاً مضاعفاً [7، 5]

(1-5)مجموعة الاعداد العقدية

هي توسيع لمجموعة الاعداد الحقيقية وفي اطارها أمكنت الإجابة عن أسئلة كثيرة تعذرت الإجابة عنها في اطار الاعداد الحقيقية مثل حل المعادلة س $2 + 1 = 0$ [6]

يعرف العدد العقدي (المركب) على انه تركيب ب+ت ح وذلك بفرض ان ب،ح

حقيقيان وان ت عدد تخيلي يحقق ت $2 = -1$ [6]

(1-6) الخواص الجبرية للعدد العقدي...

أ) خاصية الجمع :- لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين معقدين حاصل الضرب يعرف باشكل الاتي: [5]

$$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) = z_2 + z_1$$

مثال/لتكن $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 1 - i$ فأن

$$z_1 \pm z_2 = (3 + 3i) + (1 - i) = (3 + 1) + i(3 - 1) = 4 + 2i$$

ب) خاصية الضرب:- $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_x = x_2 + iy_2$ عددين معقدين فأن حاصل الضرب يعرف بالكشل الاتي

$$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = z_2 . z_1$$

مثال/لتكن $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$ فأن [5]

$$z_1 . z_2 = (1 + 2i) - (2 - i)$$

$$= \big(1.2 - 2(-1)\big) + i(1(-1) + 2(2))$$

$$= (2 + 2) + \mathrm{i}(-1 + 4)$$

$$= 4 + 3i$$

خاصية القسمة: لتكن $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ عددين معقدين فأ، حاصل القسمة يعرف بالشكل الاتي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

ملاحظة:- الخاصية الابدالية والتجميعية تنطبق على الاعداد العقدية كما في الاعداد الحقيقية.[5]

مثال/ لتكن $z_1 = 4 + i$ ، $z_2 = 2 - 3i$

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(5+4i)}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$$

ملاحظة:- [5]

أ- العنصر المحايد لعملية الجمع هو (.,.) أي ان $z=0$

ب- العنصر المحايد لعملية الضرب هو (1,.) أي ان $z=1$

ت- النظير الجمعي للعدد العقدي هو (x, y) أي ان z-

ث- النظير الضربي للعدد العقدي هو $z^{-1} = (x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$

ج- حقل الاعداد العقدية cهو حقل غير مرتب

(1-7) مرافق العدد العقدي: لتكن $z = x + iy$ فأن العدد المرافق للعدد z ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ ويعرف كالاتي:

$$\bar{z} = x - iy$$

والقيمة المطلقة (المقياس) للعدد العقدي ويرمز له بالرمز $|z|$ ويعرف $|z| = \sqrt{zz}$ ويسمى طول العدد ويكافئ الصيغة

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \geq 0$$

مثال/ لتكن $z = 3 - i$ فإن $\bar{z} = 3 + i$ وكذلك $|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2}$ [5]

خواص مرافق العدد العقدي

أ- $Re\ z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $lm\ z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

ب- $\overline{z_1 \mp z_2} = \bar{z_1} \mp \bar{z_2}$

ت- $\overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$

ث- $(\overline{\frac{z_1}{z_2}}) = \frac{\bar{z_1}}{z_2}$ بشرط أن $z_2 \neq 0$

ج- $z \in R \quad \Leftrightarrow z = \bar{z}$

ح- $|\bar{z}| = |z|$

خ- $\bar{z} = z$ [5]

برهان ((ي))

نفرض ان $z = x + iy \quad and \quad \bar{z} = x - iy$

$$|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2 = \sqrt{x^2 + y^2 = |z|}}$$

نظرية لكل $z_1, z_2 \in c$ فأن

أ- $1_m z_1 \leq |z_1|, Re\ z_1 \leq |z_1|$

ب- $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$

ت- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

ث- $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ [5]

البرهان ((ب))

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)$$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2})$$

$$z_1\bar{z_1} + z_1\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} + z_2\bar{z_2}$$

$$|z_1|^2 + 2Re\ (\bar{z_1}z_2) + (|z_2|)^2$$

من فرع أ يكون لدينا

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|\bar{z_1}z_2| + |z_2|^2$$

$$\leq (|z_1| + |z_2|)$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نستنتج المطلوب.[5]

الفصل الثاني

الدوال التحليلية والتوافقية

(2-1) الدالة التحليلية

(2-1-1)تعريف المشتقة

(2-2)معادلة كوشي ريمان

(2-3)معادلة لابلاس

(2-4)الدالة التوافقية

(2-1) الدالة التحليلية

تعريف الدالة العقدية

تعرف الدالة العقدية f بانها قانون او قاعدة تربط كل عدد مركب z في مجموعة جزئية D من مجموعة الاعداد المركبة c بقيمة واحدة وفقط واحد w من مجموعة الاعداد المركبة.[8]

المجال (Domain) يسمى المجموعة D التي تحتوي على قيم المتغير المستقلz .

المدى(Range) يسمى المجموعة R التي تحتوي على جميع صور الاعداد المركبة z.

الصيغة الرياضية تكتب الدالة على صورة $w = f(z)$ [8]

متغير الدالة العقدية

تعتمد الدالة العقدية على نوعين من المتغيرات المترابطة

- المتغير المستقل z: هوعدد مركب يمثل النقطة في المستوى المركب (ثنائي الابعاد) ويعبر عنه بالصيغة $z = x + iy$
- المتغير التابع (w): هو القيمة الناتجة عن تأثير الدالة على z ويعبر عنه بالصيغة

$$w = f(z) = u + vi$$

اذن المتغير الأساسي هو z ولكنه في الحقيقة يتحدد بمتغيرين حقيقين هما (x, y).[8]

كيف تكون الدالة جزئية في متغيرين.

يمكن تمثيل أي دالة عقدية $f(z)$ من خلال فصلها الى دالتين حقيقيتين ، كل منهما تعتمد على المتغيرين الحقيقين x, y وتكون الصيغة كالتالي:[8]

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

حيث تقسم الدالة الى

1- الدالة الجزئية $u(x, y)$ وتسمى الجزء الحقيقي للدالة f ويرمز لها $Re\ f$

2- الدالة الجزئية $v(x, y)$ وتسمى الجزء الحقيقي للدالة f ويرمز له $lm\ f$.

هذا التقسيم يوضح كيف ان الدالة العقدية هي في جوهرها دالة لمتغيرين حقيقين (x, y)[8]

مثال/ اذا كانت $f(z) = z^3$ فإن مجال هذه الدالة D هو مجموعة الاعداد المركبة،وكذلك مداها،الايجاد الدالتين $u(x, y), v(x, y)$ نقول

$$u + v = f(z) = z^3 = (x + yi)^3$$

من ذلك فإن:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

$$v(x,y) = 3x^2 - y^3$$

وتسمى الدالة u بأنها $Re.f$ وتسمى الدالة v بأنها $lm.f$.[8]

الدالة التحليلية

ان تعريف المشتقة الأولى للدالة المركبة عند نقطة z_0 فالمجال تعريفها لا يختلف عن تعريف المشتقة الأولى في الدالة الحقيقية كما تبين ذلك من خلال التعريف التالي.[8]

تعريف:-

لتكن الدالة f معرفة على جوار النقطة z_0 فأن الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 اذا وفقط كان وجود عدد مركب w_0 حيث

$$\lim z \to z_0 w_0 = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

ويسمى عادة هذا العدد المركب w_0 بانه المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة z_0 ويرمز لها بالرمز التقليدي

$$w_0 = f'(z_0) \to \frac{df}{dz}\ z_0$$

واذا كتبنا $\Delta z = z - z_0$ فأن التعريف يأخذ بالصورة [8]

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

(2-1-1)تعريف المشتقة:-

لتكن f دالة تحتوي نطاق تعريفها على جوار للنقطة z_0 نعرف المشتقة Drivative الدالة f عند النقطة z_0 والتي يرمز لها برمز $f'(z_0)$ على النحو الاتي:[10]

1) $f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

وذلك بشرط وجود هذه النهاية يقال ان الدالة f قابلة الاشتقاق $Differentiable$ عند النقطة z_0 اذا أمكن إيجاد مشتقتها عند z_0 فأن يمكننا كتابة تعريف (1) على الصورة [10]

2) $f'(z_0) = \lim \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

حيث ان f معرفة على جوار للنقطة z_0 فاننا نلاحظ ان $f(z_0 + \Delta z)$ دائماً له وجود لجميع قيم $|\Delta z|$ الصغيرة صفرا كافيا

اذا اعتبرنا الصيغة (>) لتعريف المشتقة، فاننا كثيرا ما نسقط الدليل تحت z_0 ونستخدم المقدار الذي يثير للتغير في $w = f(z)$ المناظر للتغير Δz في المتغير z.[10]

(2-2)معادلة كوشي ريمان:-

اذا كانت E مجموعة مفتوحة $f: E \to R^m, R^n$ دالة فأن f تكون قابلة التفاضل عند $a \in E$ اذا وفقط اذا وجد مؤثر خطية $A \in L\ R^m, R^n$ بحيث

$$\lim_{n \to 0} \frac{(f(a+n)^2 - f(a)) - A(h)}{|n|}$$

عما ان قابلية التفاضل للدالة f عند النقطة a ستكون مضمونه في حال كانت المشتقات الجزئية المركبات الدالة f موجودة ومتصلة عنده النقطة a ومما سبق التذكير به تبين ان الدالة $f(z) = \bar{z}$ قابلة للتفاضل عند جميع النقاط المركب على الرغم من انها عند قابلة اللاشتقاق ذلك انالدالة تعطى بالعلاقة.[9]

$f(x, y) = x - yi = (x, -y)$

$f(x, y) = x, f_2(x, y) = -y$ وبوضع

$\frac{df_1(x,y)}{dx} = 1, \quad \frac{df(x,y)}{dy}$

وهنا اتضح ان الدالة قابلة للتفاضل عند جميع قيم $z = (x, y)$ وتفاضلها هو المصفوفة $A = [0^1 \quad -1^0]$

كما تبين أعلاه فان قابلية التفاضل لا تعطي بالضرورة $s1$ قابلية الاشتقاق وفي هذا القسم نورد معادلات كوشي –ريمان

نظرية 1,2,3 اذا كانت $f\big(u(x, y) + iv(x, y)\big)$ دالة معرفة على مفتوح Ω من المركب، فإن f قابلة الاشتقاق عند $z_0 = (x_0, y_0)$ اذا وفقط اذا كانت f قابلة التفاضل عند z_0 وتحقق معادلة **كوشي-ريمان** والتي تعطي على صورة[9]

عندها يكون $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ [9]

- **برهان** لنفرض ان f قابلة للاشتقاق عند z_0

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) + iv(x_0+h, y_0) - (h, x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{h}$$

$$u_x = (x_0 - y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

ومن ذلك نجد ان قابلية الاشتقاق تعني تحقيق المعادلات كوشي –ريمان لنفرض الان ان الدالة f قابلية التفاضل وتحقق معادلات كوشي-ريمان نعلم ان تفاضل f عند (x_0, y_0) هو

$$\Delta f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & - & v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & - & u_x(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

مثال/وضح عما اذا كانت الدالة $f(z) = e^x$ دالة تحليلية

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y = u + iy$$

يعني أن $u = e^x \cos y \ , r = e^x \sin y$

وبتطبيق معادلتي كوشي وريمان نجد ان[2]

$$\frac{du}{dx} = e^x \cos y \ , \frac{dv}{dy} = e^x \cos y$$

$$\frac{du}{dx} = -e^x \sin y \ , \frac{dv}{dx} = e^x \sin y$$

مثال/ وضح عما اذا كانت الدالة $f(z) = \ln z$ دالة تحليلية

$$\ln = \ln|z| + iargz$$

نعلم من الدالة التحليلية الحقيقي انه اوv كانت $\tan\theta = t$ فأن حل هذه المعادلة الوحيد هو $tan^{-1}\theta = 0$ حيث $-\pi|2 < \theta < \pi|2$ ويحقق هذا المعادلة $\frac{d}{dt} tan^{-1}t = \frac{1}{1+t^2}$

اذا كتبنا[9]

$$v(x,y) = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2} \ , u < 0 \\ -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), x > 0 \\ -\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}, y > 0 \end{cases}$$

فأن $argz = v(x,y)$ اذا فان $\ln z = u(x,y) + iv(x,y)$ حيث $u(x,y) = \frac{1}{2} ln$ ومن هذا العلاقة نجد ان

$$\frac{du}{dy} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{du}{dx} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{dv}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

اذا تحقق معادلتين كوشي وريمان حيث نحصل على [2]

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$$

(2-3)معادلة لابلاس

تعتبر معادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ذات أهمية أساسية في الفيزياء فهي تظهر في اتصالها بانسياب الحراري وانسياب الموائع.

كما تظهر مع مجال الجاذبية ومجال الكهربية الساكنة تسمى معادلة لابلاس نسبة الى العالم (la place) وهي تمثل درجة الحرارة u في الانسياب الحراري الجزء الحقيقي من الدالة التحليلية $w = u + iv$

ومن معادلتي كوشي-ريمان نحصل على

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy}$$

اذن الدالة u تحقق معادلة لابلاس، وبالمثل يكون v .

تسمى أي دالة حقيقية $u(x,y)$ ذات التفاضلات جزئية متصلة حتى الرتبة الثانية، وتحقق معادلة لابلاس في منطقة G بالدالة التوافقية في G

مثال/ بين ان الدالة $u(x,y) = x^2 - y^2$ توافقية في G. [10]

الحل/ للدالة u مشتقات متصلة من الرتبة الأولى والثانية

$$u_x = 2x \quad , u_y = -2y$$

$$u_{xx} = 2 \quad , u_{xy} = u_{yx} = 0 \quad , u_{yy} = -2$$

وفق ذلك فانها تحقق معادلة لابلاس لأن $u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$

(2-4)الدالة التوافقية:-

اذا كانت المشتقة الثانية لدالة موجودة فأن f' تحقق معادلتي كوشي وريمان ،حيث [10]

$f' = \frac{du}{dx}$هي دالة مركبة جديدة يمكن كتابتها في الصورة $f' = a + ib$

حيث $a = \frac{du}{dx}, b = \frac{dv}{dx}$ اذاً نجد ان [10]

$$\frac{du}{dx} = \frac{db}{dx}$$

او على الصورة التالية

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على.[10]

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad , \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2}$$

وهما نفس معادلة لابلاس المعرفة تعرض كل الدوال u,v اللاتي تحقق هاتين المعادلتين بانهما متوافقتان.

مثال/1/هل الدالة $u = x^3 - 3xy^2$ توافقية.

الحل/ تحقق المعادلة التوافقية المعادلة $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}$

نوجد أولا:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2, \frac{d^2u}{dx^2} = 6x$$

وكذلك

$$\frac{du}{dy} = -6xy, \frac{d^2u}{dy^2} = -6x$$

وبالتعويض نجد أن

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 6x - 6x = 0$$

وبالتالي فأن الدالة u توافقية.[10]

مثال/2/ هل الدالة $u = e^x \sin y$ دالة توافقية

الحل/ تحقق الدالة التوافقية المعادلة

$$\frac{d^2u}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

نجد أولاً

$$\frac{du}{dx} = e^x \cos y \ , \frac{d^2u}{dy^2} = -e^x \sin y = 0$$

وبالتعويض نجد ان

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

وبالتالي فإن الدالة u دالة توافقية[10]

الفصل الثالث

الدوال الأولية العقدية

∴(3-1) الدالة الأولية

(3-2)الدالة الاسية

(3-3)الدالة اللوغاريتمية

(3-4)تطبيقات للدالة العقدي اللوغارتيمية

∴(3-1) الدالة الأولية

تسمى الدالة $f(x)$ دالة أولية للدالة $f(x)$ على فترة معينة.

اذا كان مشتقها يساوي الدالة $f(x)$ لكل x في تلك الفترة $f(x) = f(x)$ [11]

وتعد عملية إيجاد الدالة الأولية عملية عكسية للاشتقاق ويعبر عنها بالتكامل الغير محدد[11]

$$\int f(x)\ dx = f(x) + c$$

(3-2)الدالة الاسية

تعرف الدالة الاسية العدد العقدي z بحيث اذا كان $z = x + iy$ فإن

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

وهذا يعني ان الدالة الاسية العقدية يمكن تفكيكها الى جزء حقيقي وجزء تخيلي حيث

- $u(x,y) = e^x \cos y$ الجزء الحقيقي
- $u(x,y) = e^x \sin y$ الجزء التخيلي

ومن هذا الصيغة نلاحظ ان الدالة الاسية العقدية ترتبط بصيغة اويلر خاص عندما يكون الجزء الحقيقي صفرا اذا نحصل على $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

خصائص الدالة الاسية العقدية

من اهم ما يميز الدالة الاسية في الاعداد العقدي انها دالة دورية نخلاف الدالة الاسية الحقيقية e^x انها ليست دورية.

نظرية 1:

الدالة e^z تكون دورية بفترة مقدارها $2\pi i$ أي i

$e^z = e^w$ اذا وفقط اذا $z - w = 2\pi in$

البرهان:-

اذا كتبنا: $z = x + iy \quad , w = s + it$

فإن

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad , e^w = e^s(\cos t + i \sin t)$$

حتى يكون $e^z = e^w$ يجب ان

- $x = s$

  $\sin y = \sin t \quad , \cos y = \cos t$

  هذا يحدث عندما $y - t = 2\pi n$ وبالتالي $z - w = 2\pi in$

النظرية 2:

عند دراسة الدالة الاسية العدد العقدي $z = x + iy$ نجد ان القيمة المطلقة لها تعتمد فقط على الجزء الحقيقي إذا $|e^z| = e^x$

أي ان مقدار الدالة الاسية العدد يساوي الدالة الاسية الحقيقية للجزء الحقيقي من العدد

اما بالنسبة للطول (Argument) فأنه يعطى بعلاقة[8]

$$\arg(e^z) = y + 2\pi n \quad \text{بحيث } n \in z$$

البرهان:

باستخدام تعريف الدالة الاسية $e^z = e^x e^{iy}$ فأن $|e^z| = |e^x e^{yi}| = e^x$

لان z $= |e^{iy}|$ وكذلك $\arg(e^z) = \arg(e^{iy}) = y + 2\pi n$ وهذا يثبت صحة العلاقة السابقة

النظرية-3- خواص الدالة الاسية في الاعداد العقدي

اذا كان z,w عددين عقدين فان الدالة الاسية تحقق الخصائص التالية:[8]

- خاصية التجميع: $e^z . e^w = e^{z+w}$
- خاصية الأس: $(e^z)^n = e^{nz}$
- خاصية القسمة: $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

مثال/1/ جد جميع قيم z بحيث ان $e^z = z + \sqrt{3i}$

الحل/ اذا فرضنا ان $w = e^z$

فأن النظرية 2 توكد ان

$$|w| = e^x, \qquad arge.w = lm.z + 2n\pi$$

وبالتعويض عن قيمةw بالعدد المركب $1 + \sqrt{3i}$ فأن

$$e^x = |w| = 2 \ , x = \ln 2$$

$$y = lm.z = Argw + 2n\pi$$

$$Arg\left(1 + \sqrt{3i}\right) + 2n\pi$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2n\pi \ \ , n = 0 \ , \mp 1, \mp 2, \ldots \ldots$$

وبالتالي ينتج ان [8]

$$z = x + yi = ln2 + \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) i \ \ n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots \ldots \ldots$$

مثال/2/ اثبت ان $p(z^2)| \leq e^x p(|z^2|)$

الحل/ تكتب اولاً

$$|e^x \, p(z^2)| = |e^x p[(x + yi)^2]$$

$$= |e^x p(x^2 - y^2) + i2xy|$$

$$= e^x \, p()$$

ونكتب

$$e^x \, p(|z^2| = ex.p(x^2 - y^2)$$

بما ان $x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2$

من الواضح ان

$$ex\ p(x^2 - y^2) \leq \exp(x^2 + y^2)$$

وبهذا ينتهي البرهان[11]

(3-3)الدالة اللوغاريتمية

تم توضيح ان الدالة الاسية المركبة e^z ، هي دالة دورية أي أنها تعطي نفس القيمه العدد لانهائي من الأعداد المركبة ضمن[8] مجالها وهذا يعني انها ليست دالة واحد - لواحد بل من النوع متعدد القيم ومن المعروف ان الدالة العكسية الاي دالة متعددة القيم لا تكون معرفة بشكل بسيط لذلك يجب تحديد مجال معين للدالة الاصلية حتى تصبح واحد - لواحد وبذلك يمكن تعريف دالتها العكسية[8]

ويمكن النظرs_1 إلى هذا الموضوع بطريقه اخر كما في الدوال الضمنية من الشكل $y = f(x)$او بصورة عامة $f(x, y) = 0$

في التحليل المركب حيث يمكن التعبير عن الدالة على انها تعطي اكثر من قيمة لنفس المدخل ولهذا تسمى دالة متعدد القيم

نعلم ان اللوغاريتم الطبيعي Lnx هو المعكوس للدالة الاسية الحقيقية e^x وهي حالة واحد - لواحد فإن معكوسها (أي اللوغاريتم المركب)سيكون حالة متعدد القيم [8]

تعرف الدالة اللوغارتيمية المركبة $\log z$ بالصيغة $\log z = \ln|z| + i\arg(z), \quad |z| > 0$

واذا كتب العدد المركب على صورة القطبية $z = re^{i\theta}$

$$\log z = \ln r + i\theta \quad , r > 0$$

بما ان الزاوية θ ليست قيمة واحدة بل لها عدد لانهائي من القيم[8].

$\theta + 2\pi n$ حيث $n \in z$

فإن اللوغارتيم المركب يأخذ الشكل [8].

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2\pi n) \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots$$

وهذا يوضح ان الدالة $\log z$ دالة متعدد القيم لانها تعطي عدد لانهائيا من القيم لنفس العدد المركب[8].

وتبين ان الدالة اللوغارتيمية في الاعداد العقدي تعد من الدوال متعدد القيم أي ان كل عدد عقدي z يمكن ان يقابله اكثر من قيمة اللوغارتيم ولكن يمكن اختبار فرع معين من هذا القيم بحيث تصبح الدالة أحادية القيمة ضمن مجال محدد D وفي هذا الحالة تسمى دالة $\log z$ فرع من الدالة الاصلية[8].

$\log z = \ln|z| + i\arg z$ حيث $|z| > 0$

ويطلق على هذا الصيغة القيمة الرئيسية للوغارتيم حيث تمثل اختيار محدد للزاوية $\arg z$ مما يجعل للدالة معرفة بشكل وحيد[8]

كما ان هذا الدالة تعد معكوسا للدالة الاسية بحيث e^{20yz} ومن اجل دراسة خواص هذا الدالة يجب التأكد من استمراريتها و قابليتها الاشتقاق [8]

النظرية[8]

1- الدالة $\log z$ ليست متصلة عند النقاط التي تحقق الشرطين [8]

$Re(z) \leq 0$ الجزء الحقيقي

$lm\ (z) = 0$ الجزء التخيلي

أي على الجزء السالب من المحور الحقيقي

2- كذلك فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق على هذا المحور ويعد هذا الجزء خط قطع للدالة [8].

مثال/اذا كان $z = -1 - \sqrt{-3i}$ فجد $\log z$

الحل/ من المعروف اننا نستطيع إيجاد قيمة |z| والسعة والزاوية للعدد

لذلك $r = 2$, $\theta = \frac{-2\pi}{3}$ وعليه يكون [9]

$$\mathrm{Log}\, z = \ln 2 + i\left(\frac{-2\pi}{3} + 2n\pi\right)$$

$$= \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i \quad , n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots$$

مثال/2/ جد 2^i

الحل/ $2^i = e^{i \log 2}$,$64 + \log 2 = \ln 2 + 2k\pi i,\ \ k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots$

$$= e^{i\, log\, 2} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)}$$

$$= e^{i \ln 2 - 2k\pi}$$

مثال/3/ احسب $\log(1 + i)$

الحل/

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore \log(1 + i) = \ln\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i \quad , k = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots$$

مثال/4/اذا كان $z = -1 + i$ ، $w = 2i$ جد قيمة كل

أ) $\log z, \log w, \log zw$

الحل/بتطبيق تعريف الدالة $\log z$ نستنتج ان:- [8]

$$\log(-1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \mp 1, \mp 2 \ldots\ldots$$

$$\log(2i) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), \quad n = 0,1,2 \ldots..$$

$$\log(2i)\,(-1 + \mathrm{i}) = \log(-2 - 2i)$$

$$= \ln\sqrt{8} + i\left(\frac{-3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

ب) القيمة الرئيسية $\log z$ و $\log w$ و $\log zw$

الحل/ بتطبيق تعريف الدالة log نستنتج

$$\log(-1 + i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i$$

$$\log(2i) = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i$$

$$\log 2i\,(-1 + i) = \log(-2 - 2i)$$

$$= \ln\sqrt{8} - \frac{3\pi}{4}i$$

(3-4)تطبيقات للدالة العقدي اللوغارتيمية

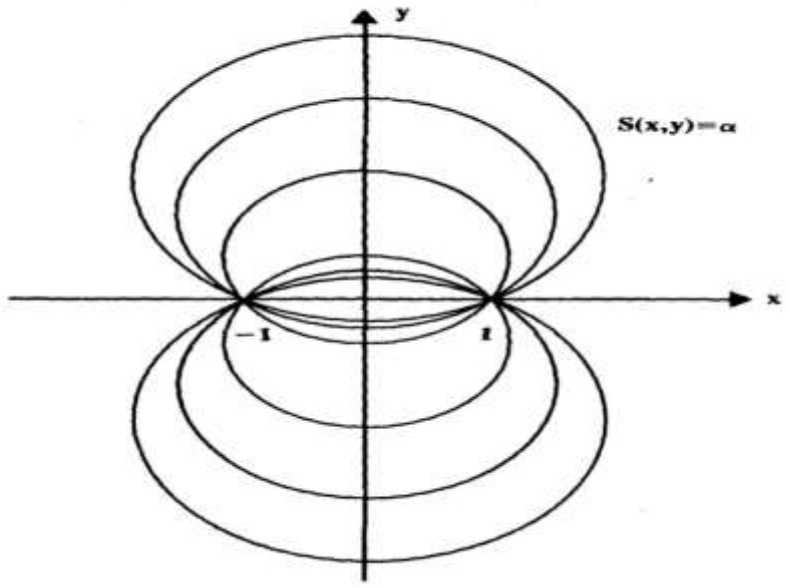
مثال/ يمكن اثبات ان الدالة $p(z)$ حيث ان:

$$p(z) = \log\frac{z-1}{z+1}$$

دالة مطابقة عند النقاط z باستثناء النقطتين (-1,1) وبدراسة دالة الجهد وهي $\emptyset(x,y) = \mathrm{Re.f}$ وكذلك دالة التيار $s(x,y) = Im.p$ يمكن التعرض على ان النقطتين تمثلان نبع ومعب حيثا ان:[8]

$$s(x,y) = lm.p = \arg\frac{z-1}{z+1}$$

وبفرض ان $s(x,y) = \alpha$ مقدارا ثابتا فأن خطوط التيار عبارة عن دوائر مركزها على المحور التخيلي وجميعها تمر بالنقطتين 1+,1- كما في الشكل

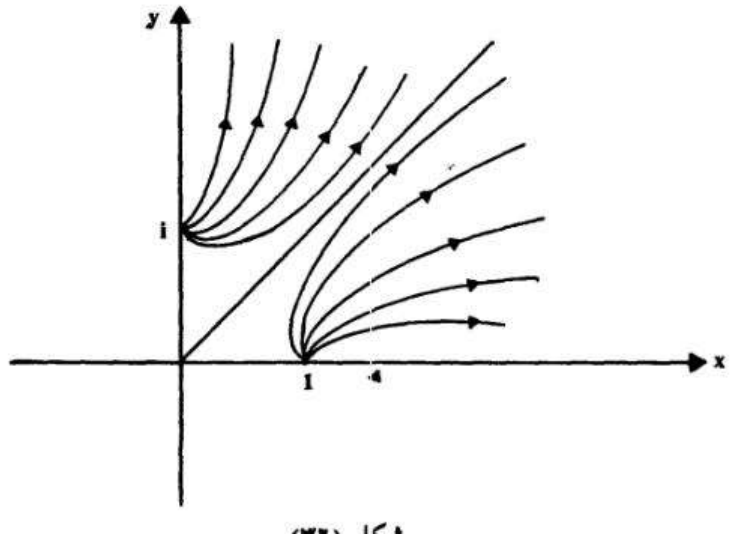


مثال/2/ يمكن اثبات ان الدالة التحليلية $p(z) = \log(z^u - 1)$

مطابقة عند جميع النقاط z ماعد نقطتين $(i, 1)$ (لان الدالة غير معرفة عندهما) وهي تمثلان نبصين وذلك بدراسة خطوط التيار والتي تحدد بإيجاد الجزء التحليلي الدلة وتثبيت قيمته أي ان

$$s(x, y) = Im.p = \arg(z^u - 1) = d$$

d مقدار ثابت وبرسم هذا الدالة نحصل على الشكل:



الدالة الاسية

القانون الفيزيائي $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

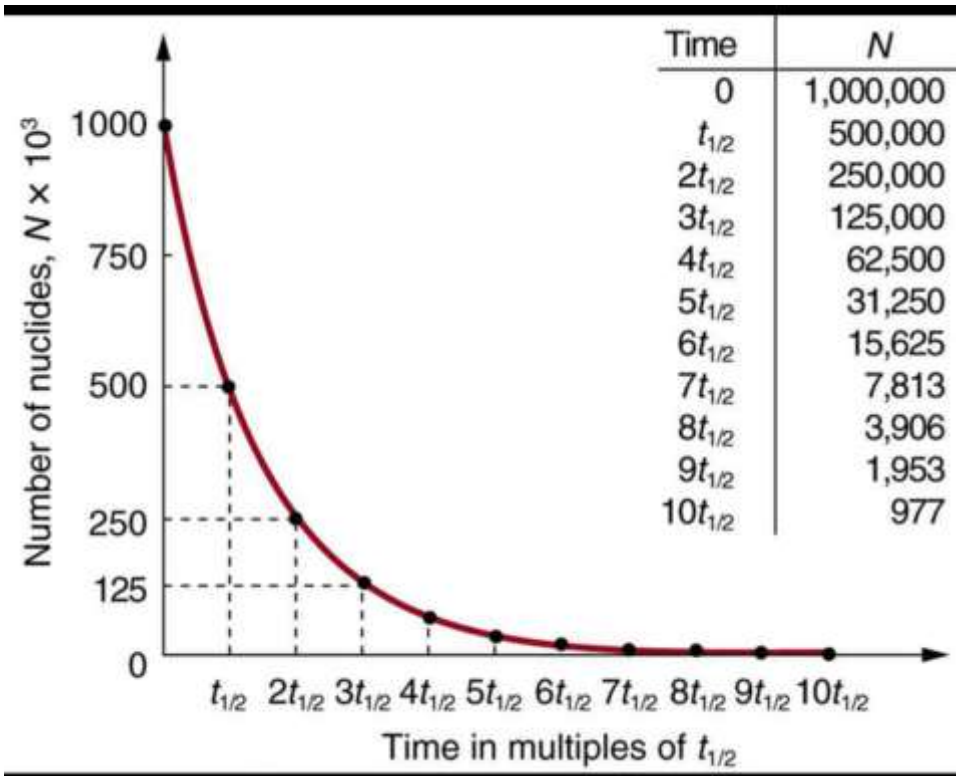
- عدد النوى الابتدائي N_0
- ثابت λ

مثال/1/ اذا كان: $\lambda = 0.15^{-1}$, $N_0 = 1000$

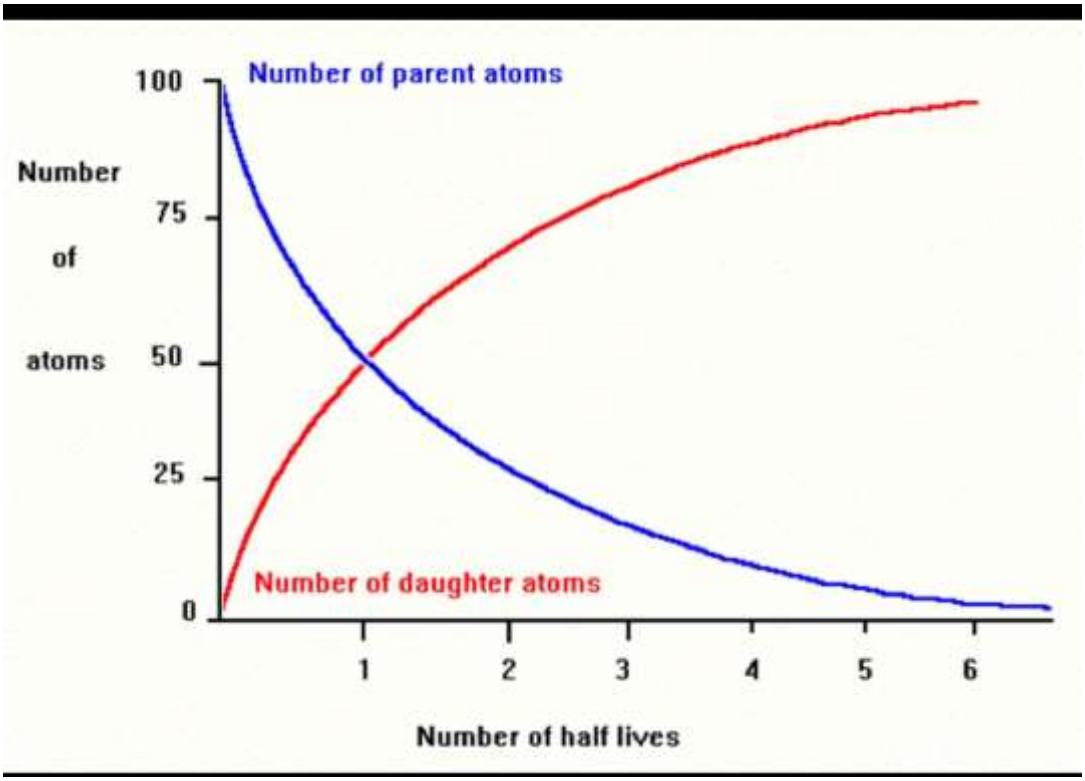
احسب N_{10}:

$$N(10) = 1000e^{-0.1(b)} = 1000e^{-1} \approx 368$$

ولبقية النقاط وكما موضح في الرسم (1,2) [9]



Time	N
0	1,000,000
$t_{1/2}$	500,000
$2t_{1/2}$	250,000
$3t_{1/2}$	125,000
$4t_{1/2}$	62,500
$5t_{1/2}$	31,250
$6t_{1/2}$	15,625
$7t_{1/2}$	7,813
$8t_{1/2}$	3,906
$9t_{1/2}$	1,953
$10t_{1/2}$	977



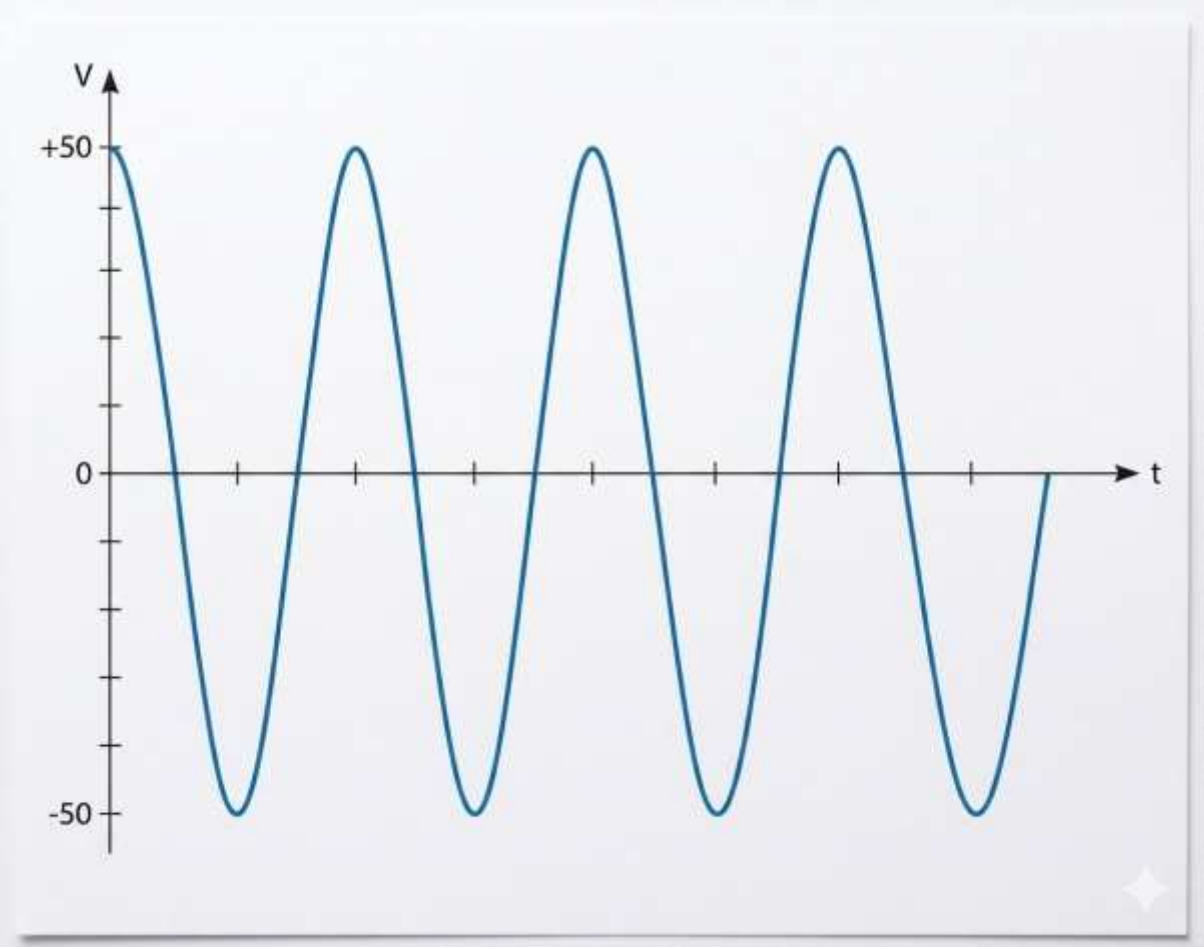
التيار المتناوب والموجات الكهربائية

المصدر الكهربائية

$$v(t) = v_0 \cos(wt + \emptyset)$$

$$v(t) = x\left(v_0 e^{i(wt+\emptyset)}\right)$$

$$v(t) = 50 \cos(loot) \rightarrow v(t) = \pi\left(50^{i\, loot}\right)$$


V
+50
0
-50
t

الفصل الرابع

استنتاجات وتوصيات

(4-1)حاجه علميه حديثة يدعم النظرية الكمومية للمادة

(4-2) در سنا قابلية اشتقاق الدوال العقدية :-

(4-3)التوصيات

(4-1)حاجه علميه حديثة يدعم النظرية الكمومية للمادة :-

*** ان الانتقال من حقل الاعداد الحقيقية الى الاعداد العقدية في الفيزياء الكمومية لم يكن مجرد استعارة رياضية لتسهيل الحساب بل هو ضرورة وجوديه نفرضها طبيعة المادة فبدون الوحدة التخيلية (i) تعجز الفيزياء تفسير ظاهرة الطور و تدخل الموجات مما يجعل العدد العقدي هو اللغه الوحيدة القادرة على فك شفره السلوك المزروح للمادة في عالمها المجهري.**

(4-2) در سنا قابلية اشتقاق الدوال العقدية :-

*** في هذا الجزء من البحث تم استخلاص المفهوم الجوهري للاشتقاق في المستوى العقدي حيث تبين ان قابلية اشتقاق الدالة العقدية$f(z)$ عند النقطه z_0 ليست مجرد اجراء حسابي بل هي شهادة على قوة تماسك الدالة وذلك وفق الاعتبارات التالية :**

1- تجاوز البعد الواحد

بخلاف الدوال الحقيقة التي تشترط الاقتراب من النقطة عبد خط مستقيم فإن قابلية الاشتقاق العقدية تفرض ثبات الغاية مهما كان المسار المتخذ سيار المتخذ في المستوى العقدي هذا يجعل الدوال القابلة للاشتقاق عقدياً

(الدوال التخيلية) تتسم بخصائصا هندسية وفيزيائيه فائقه الدقه

٢ - الارتباط الشرطي (معادلات كوشي - ريان) //

استخلصنا ان وجود المشتقة يفرض ترابطاً وثيقاً بين الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للدالة مما يعني ان اي تغير في أحدهما يجب ان يقابلة تغير محسوب في الاخر للحفاظ على تحليلية الدالة وهو ما يدعم استقرار الانظمة الفيزيائية التي توصف بهذه الدوال .

ان الدالة القابلة للاشتقاق عقدياً هي داله تخلت عن عشوائيتها لتمتثل لنظام رياضي هندسي يحفظ الزوايا والنسب مما يجعلها الاداره المثالية لنمذجة الواقع

3- لماذا هي أولية ..؟

*** نسمي هذه الدول بالاولية ليس لبساطتها بل لكونها تمثل الاصول الجوهرية التي لا يمكن اختزالها ان عملية إيجادها عبر التكامل هي العملية العكسية للاشتقاق الدالة الاسية هي الدالة الأم التي تبنى عليه او التكون منها الدوال المثلثية والزائدية عبر صيغه أويلد كما تحمل صفة الشمولية والامتداد الطبيعي**

والضروري للدوال الحقيقية الى المستوى العقدي مع اكتساب خصائص فريدة كالدورية في الدالة الأسية وتعدد القيم في الدالة اللوغاريتميمية و من خلال الدوال الأولية يمكننا فقط تحويل العمليات الجبرية المعقدة التى تمثيلات هندسية وفيزيائية ملموسة

4- لماذا هي تحليلية .....؟

نصف الدالة بأنها تحليلية لنوكد أنها دالة انتقلت من مجرد قابلة الاشتقاق الى دالة تمتلك نظاماً هيكلياً منتظماً في جوارها فسر التسمية يكمن في هذا الانضباط الذي يربط اجزاء الدالة ببعظها مما يجعلها الاداة الوحيدة الموثوقه رياضياً لتمثيل النظم الفيزيائية والكمومية المستقرة حيث يضمن تحليلها عند نقطة واحدة استقامة سلوكها في نطاق كامل.

5- لماذا هي توافقية .....؟

تسمى الدالة توافقية لانها تحقق " معادلة لا بلاس"$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}$. يكون مساوي صفراً اي ان مجموع المشتقات الجزئية الثانية للدالة بالنسبة (x,y) يساوي صفراً وان كون المشتقات الجزئية الثانية يساوي صفراً في الدالة التوافقية يعد دليلاً على الحالة المثالية من التوازن الرياضي فهذا الصفر ليسا عدماً بل هو تعبير عن تلاشي الاضطراب داخل الدالة مما يجعل الاجزاء الحقيقية والتخيلية في حاله ترافق توافقي تضمن استقرار الدالة العقدية وقابليتها لتمثيل الانظمة الفيزيائية المتوازنه

(4-3)التوصيات

بناء على ما تم استطراقه فى فصول البحث من خصائص رياضية متقدمة للاعداد العقدية ويوصي الباحث بالنقاط الآتية :

1- تعزيز الاعتماد على التحليل العددي في معالجة الاشارات:

ضرورة توظيف الخصائص الجبرية والتحليلية للأعداد العقدية من دراسة تحويل فورير (Fourier Transform) كونه الاداة الاساسية لتحليل الموجات ونقلها من النطاق الزمني التى النطاق الترددي مما يسهل فهم سلوك الترددات المعقدة .

2- استخدام المستوي العقدي في تحليل الاستقرار :

زيادة التركيز على تحويل لابلاس (Loplace transform) وربطه بنظرية المتغيرات المركبة وذلك لقدرته الفائقة على تحليل استقرار الانظمة الديناميكية ووصف استجابه الموجات للمؤثرات الخارجية عبد دراسة الاقطاب والاصفار في المستوي العقدي (S-Plone)

3- تطوير النمذجة الرقمية باستخدام تحويل Z :

تبني تحويل (z - Transform)z كمدخل اساسي لمعالجة الاشارات الرقمية تبرز أهمية العدد الفقدي هنا في تمويل الموجات المتقطعة (Discrete signals) والتحكم في جودة البيانات وسرعة معالجتها داخل الانظمة الحاسوبية

4- الربط بين النظرية الرياضية والتطبيق الهندسي:

عدم الفصل بين القواعد المجردة للاعداد العقدية وبين تمثيلاتها الفيزيائية للموجات حيث يوفر الجزء الحقيقي والتخيلي تمثيلاً دقيقاً ل (السعة والطور) وهو ما يختصر الكثير من العمليات الحسابية المعقدة مقارنة بالأعداد العقدية .

المصادر

References

1) المؤلف:- محمود سعود – مدخل الى التحليل العقدي ، ديوان المطبوعات الجامعية 2009

2) د/ارباب إبراهيم ارباب ، محاضرات في المتغيرات المركبة ، قسم الفيزياء ، جامعة الخرطوم - السودان 2011

3) المصدر للفقرات [4-5]

Wessel,c.(1799) on the Analytical

Representation of Direction

4) المؤلف –د. حسن بنود/ د.محمد علي ، التحليل العقدي ،منشورات جامعة تشرين – كلية العلوم 2009

5) د. عبدالرحمن سلمان جمعة ، اساسيات التحليل العقدي 2017

6) الموسوعة العربية/دمشق/سنة 2000

7) وليام . ر . دريك/التحليل المركب وتطبيقاته ، الترجمة سعدون البراهيم ، جامعة الملك فهد ، الاثنين 14 يوليو 2014

8) الدكتور محمود كتكت ، مبادئ التحليل المركب ، دار ومكتبة الهلال – دار الشروق للنشر والتوزيع 2008

9) احمد خالد العبد العالي – التحليل المركب ، جامعة الملك فيصل

10) دويل تشرشل ، براون جيمس ، المتغيرات المركبة وتطبيقاتها (ترجمة : د. بديع توفيق حسن ، د. إسماعيل عبدالرحمن امين) نيويورك ماكجروهيل للنشر 1974

11) تأليف توماس جورج – حساب التفاضل والتكامل (ترجمة : د. احمد خالد العلي) الرياض ، دار المريخ للنشر