جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي

جامعة ميسان

كلية التربية

قسم الرياضيات

تحويلات لابلاس وتطبيقاته

بحث مقدم الى قسم الرياضيات وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

أعداد الطالبة

فاطمة محمد هاشم

أشراف

د. محمد جبار اللامي

1445هـ **2024م**

قال تعالـــى:

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

نُّمِدُّ هَٰؤُلَآءِ وَهَٰؤُلَآءِ مِنْ عَطَآءِ رَبِّكَۚ وَمَا كَانَ عَطَآءُ رَبِّكَ مَحْظُورًا * ٱنظُرْ كَيْفَ فَضَّلْنَا بَعْضَهُمْ عَلَىٰ بَعْضٍۚ وَلَلْأَخِرَةُ أَكْبَرُ دَرَجَٰتٍ وَأَكْبَرُ تَفْضِيلًا

صَدق الله العلي العظيم

الإسراء ايه -20-21

الاهداء

اهدي تخرجي وفرحي لمن لهم الفضل في ذلك إلي من أوصاني الرحمن بها إلى من جنة الله تحت قدميها إلي من افنت عمرها من أجل ان تراني في أبهى الصحة والسعادة ولو على نفسها فهي تستحق ان اهديها فرحتي بل حياتي مسلما لها والى والدي الذي ساندني في هذه الدراسة شكرا لك وقليل الشكر بحقك

شكر وتقدير

في البداية نحمد الله تعالى على أن وفقنا لانجاز هذا البحث، له الحمد والشكر، ثم أود أن أشكر

مشرفي، الدكتور(محمد جبار اللامي) ، الذي كانت خبرته لا تقدر بثمن في

صياغة أهم مواضيع البحث ومنهجيته. فقد دفعتني ملاحظاته الثاقبة إلى صقل تفكيري ورفع عملي إلى

مستوى أعلى. ثم أود أن أعرب عن تقديري لاخواتي من فترة تدريبي لتعاونهم الرائع معي ومساندتهم

اقرار المشرف

أشيد أن هذا البحث المرسوم : (***تحويلات لابلاس وتطبيقاته***) الذي تقدم به الطالبة(**فاطمة محمد هاشم)** قد جرى تحت أشرافي في جامعة ميسان

/ كلية التربية / قسم الرياضيات ،

وهو جزء متطلبات نيل درجة البكالوريوس في كمية التربية / قسم الراضيات ....

أقرار المشرف

أسم المشـــرف : دكتورمحمد جبار اللامي

الدرجة العلمية :

بناء على توصيات المشرف ارشح بذا البحث لمناقشة

الدكتور محمد جبار اللامي

مقرر قسم الرياضيات

/ / 2024م

الخلاصة

ناقش هذا ألبحث أحد أنواع التحويلات التكاملية ألا وهو تحويل لابلاس وبعض تطبيقاتة، يمكننا تحويل لابلاس من توفير الكثير من الوقت عند حل المعادلات وذلك بتوفير جداول خاصه بتحويل لابلاس بأستطاعتنا أستعمالها بالاضافه الى ذلك يمكننا أستعمال تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية بأنواعها.

ويشتمل هذا البحث مقدمة وثلاث فصول حيث تناولت في الفصل الاول صياغة تعريف لابلاس وبعض خواصة وحل بعض الدوال بأستخدام الخواص وكذلك تحويل لابلاس لبعض الدوال الاساسية وبرهانها حتى يتيسر فهمها وجدول لتحويل لابلاس لبعض الدوال الهامة ،

أما في الفصل الثاني تناولت معكوس تحويل لابلاس وتعريفة وبعض خواصة وحل بعض الدوال بأستخدام الخواص وتناولت طريقتين من طرق أيجاد معكوس تحويل لابلاس(بأستخدام الجداول وبأستخدام الكسور الحزئية) وكذلك تناولت نظرية الالتفاف وجدول لمعكوس تحويل لابلاس لبعض الدوال،

أما في الفصل الثالث تناولت تحويل لابلاس للمشتقات وتطبيقات عن تحويل لابلاس (حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة و حل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتب العليا).

أستنتجت أن هناك فرقاً واضحاً في سهولة الحل بواسطة تحويل لابلاس وخصوصا في المشتقات العليا حيث توصلت ألي أمكانية حل المسائل في خطوة واحدة ولهذا لايعني أن أستخدام الطرق العادية ليست ذات فائدة ولكن من أجل الوصول ألى الحل بطريقة أسهل وأسرع بالاضافه الى العمليات الذهنية المجهدة وكما نعلم تماماً أن علم الرياضيات علم تراكمي يعتمد على ما تم الوصول ألية مسبقاً فلولا التوصل ألى الطريقة العادية ماكان هناك لنا أن نصل ألي طرق أخر

الفصل الاول

تحويل لابلاس

مقدمة

تحويل لابلاس بصورة عامة هو اداء لتحويل الدوال والمعادلات من شكلها الاصلي الى شكل اخر ابسط منه على الاقل معروف لدينا التحويلات عادة ما تكون تحويلات تكاملية مثل تحويلا ت لابلاس و تحويلات فورير وتحويلات لاجير وغيرها الكثير فتحويل لابلاس هو تحويل تكاملي عند تاثيره على الدالة يحولها الى دالة اخرى مختلفة تماما عن الدلة الاصلية حيث يتم تحويل المتغير المستقل للدالة الى متغير اخر وبالتالي يغير نطاق مدى الدالة الاصلية تعتمد تحويلات لابلاس اعتمادا كليا على التكامل اي ان التحويل معرف كتكامل على المدى من الصفر الى الما لانهاية

(1_1) التعريف الرياضي لتحويل لابلاس[2]

نفرض ان «f» دالة معرفة $t\geq 0$ فان التحويل التكاملي

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = f(s)$$

يسمى تحويل لابلاس للدالة F

(1-2)خصائص تحويل لابلاس

1-الخاصية الخطية **[4]**

تنص الخاصية الخطية لتحويل لابلاس على انه لايجاد تحويل لابلاس لدالتين او اكثر خاصيتين معا فاننا ببساطة نوجد تحويل كل دالة على حدة ثم نجمع التحويلات معا

2-اما اذا ضربنا ثابت k في دالة فان التحويل يتم ظربه ايضا ب k

$$L\{f_1 + f_2\} = L\{f_1\} + L\{f_2\} \qquad 1$$

$$L\{K f\} = KL\{f\} \qquad 2$$

برهان الخاصية 1 و2 باستخدام الخاصية الخطية للتكامل s >a

$$L\{f_1 + f_2\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,[f_1(t) + f_2(t)]dt \qquad 1$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\,f_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}\,f_2(t)dt$$

$$= \{f_1\}(s) + L\{f_2\}(s)$$

$$L\{k\,f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,[kf(\,t)]dt \qquad 2$$

$$= k\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)dt$$

$$kL\{f\}(s)$$

تحويل لابلاس للدالة $L\{3t2t - 5t^2\}$ **[10]**

$$\{3t2t - 5t^2\} = L\{3\} + L\{2t\} - 5L\{t^2\}$$

$$= \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{10}{s^3}$$

تحويل لابلاس للدالة **[10]**

$$L\left\{\frac{e^{-3t}}{2} - 6sin2t\right\}$$

$$L\left\{\frac{e^{-3t}}{2} - 6sin2t\right\} = L\left\{\frac{e^{-3t}}{2}\right\} - 6L\{\, sin2t\}$$

ومن خلال $l\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} \rightarrow L\left\{\frac{e^{3t}}{2}\right\} = \frac{l}{2(s-3)}$

$$L\{sin2t\} = \frac{2}{s^2+4} \rightarrow L\{6sin2t\} = \frac{12}{s^2+2}$$

$$L\left\{\frac{e^{3t}}{2} - 6sin2t\right\} = \frac{1}{2(s-3)} - \frac{12}{s^2+4}$$

2-خاصية الازاحة اذا كان تحويل لابلاس L{f}=f(s) متحقق لكل s > a

[10]

لذالك $\boldsymbol{L\{e^{at}\, f\{t\}(s) = \mathbf{f}(s-a)}$, s > a + a

البرهان

$$L\{e^{at}\, f\{t\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, f(t)dt$$

$$= F(s-a)$$

2- خاصية الازاحة [4]

تستخدم هذه الخاصية عندما ما يراد تحويل لابلاس للدالة مضروبة ب $F(t) . \boldsymbol{e^{eat}}$

تحويل لابلاس للدالة :.

$$L\{4e^{3t}\cot 5t\}$$

$$L\{4e^{3t}\cot 5t = \quad 4L\{e^{3t}\, cot5t\,\}$$

$$= 4\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}\right)$$

$$= \frac{4(s-3)}{s^2-6s+9+25}$$

$$= \frac{4(s-3)}{s^2-6s+34}$$

تحويل لابلاس للدالة $\boldsymbol{L\{2e^{3t}\ (4cos2t-5sin2t\,)}$ [10]

$$L\{2e^{3t}\ (4cos2t-5sin2t) = 8L\{e^{3t}cos2t\}-10L\{e^{3t}\,sin2t\,\}$$

$$\frac{8(s-3)}{(s-3)^2+2^2}-\frac{10(2)}{(s-3)^2+2^2}$$

$$\frac{8(s-3)-10(2)}{(s-3)^2+2^2} = \frac{8s-44}{s^2-6s+13}$$

3− مشتقة التحويلات [4]

اذا كانت اذا كانت f(t) دالة مستمرة وكانت $L\{\,f(t)\} = f(s)$ [12]

فان

$$L\{\,f(t)\} = -\frac{d}{ds}f\,(s)$$

البرهان

$$\frac{d}{ds}f\,(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st})f(t)dt$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt$$

$$= -l\{tf(t)\}(s)$$

$$= l\{tf(t)\}(s) \; = -\frac{d}{ds} f(s)$$

لجميع قيم n

$$L\,\{t^n\, f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\, f(s)$$

اذا كانت $\boldsymbol{f(t) = L\{tsint\}}$ وبما ان [12]

$$L\{sint\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{f(t)\} = L\{tsint\} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\{f(t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

تحويل لابلاس للدالة $\boldsymbol{f(t) = t^2 e^t sint}$ [10]

$$L(sin4t) = \frac{4}{s^2+16}$$

$$L(e^t sin4t) = \frac{4}{(s-1)^2+16}$$

$$L(t^2 e^t sin4t) = -\frac{d}{ds}\frac{4}{s^2-2s+17}$$

$$= \frac{4(2s-2)}{(s^2-2s+17)^2}$$

$$L(t^2 e^t sin4t) = \; -4\frac{d}{ds}\frac{4(2s-2)}{(s^2-2s+17)^2}$$

$$= \frac{-4(s^2-2s+17)^2 2 - (2s-2)2(s^2-2s+17)(2s-2)}{(s^2-2s+17)^4}$$

$$= \frac{-4(2s^2 - 4s + 34 - 8s^2 + 16 - 8)}{(s^2 - 2s + 17)^3}$$

$$= \frac{-4(-6s^2 + 12s + 26)}{(s^2 - 2s + 17)^3}$$

$$= \frac{8(3s^2 - 6s - 13)}{(s^2 - 2s + 17)^3}$$

4-خاصية القسمة على t : [10]

اذا كانت f(t) دالة مستمرة وكانت $\frac{f(t)}{t}$ موجودة عندما تقترب t الى الصفر

من جهة اليمين وكانت $\{f(t) = f(s)$ فان

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty f(s)ds$$

البرهان :. من تعريف تحويل لابلاس نجد ان

$$f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty (f(t)e^{-st}dt)ds$$

$$f(s) = \int_0^\infty (f(t)\int_s^\infty e^{-st}\,dt)dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)[-\frac{e^{-st}}{t}]$$

$$= \int_0^\infty (\frac{f(t)}{t})e^{-st}\mathrm{dt}$$

$$\mathrm{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

تحويل لابلاس للدالة $f(t)=\frac{1-(cosat)}{t}$ [10]

$$\left(\frac{1-cos(at)}{t}\right)=\int_s^{\infty} L(\ 1-(cosat)ds$$

$$=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+a^2}\right)ds$$

$$[\ \ln(s)-\frac{1}{2}\ln(s^2+a^2)\ ]_s^{\infty}$$

$$[\ \ln\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right)]_s^{\infty}=\ \ln(1)-\ln(\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}})$$

$$=-\ln(\frac{s}{\sqrt{s^2+\ a^2}})$$

5_خاصية تحويل التكامل [5]

اذا كانت f(t) دالة مستمرة وكان L{f(t)} =f(s)

$$L\{\int_0^t f(t)dt\}=\frac{f(s)}{s}$$

البرهان نفرض ان

$$g(t)=\int_0^t f(t)dt$$

$$L\{g(t)\}=\ \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^t f(t)dt\right]dt$$

$$=-\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(t)dt\ \ ]_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s}f(s)=\frac{f(s)}{s}$$

ولذالك فان تحويل الدالة التالية [5]

$$f(t)=\int_0^t\frac{sin2t}{t}2t$$

$$l\{sint\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{2}{s^2+4}ds = 2\frac{1}{2}[tan^{-1}\frac{s}{2}]_s^\infty$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - tan^{-1}\frac{s}{2}\right] = cos^{-1}\frac{s}{2}$$

$$(l\{\int_0^t \frac{sin2t}{t}dt = \frac{1}{s}cos^{-1}\frac{s}{2}\}$$

(1-3)تحويل لابلاس لبعض الدوال الاساسية

1_اذا كانت [7] $f(t) = 1$

$$l\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt$$

اي ان $l\{1\} = \frac{1}{s}$

2_اذا كانت [7] $\boldsymbol{f(t) = t^n \,; n \geq 1}$

$$l\{t^n = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt$$

وبوضع $s\ t=u$

$$l\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}d\,u = \frac{N!}{s^{n+1}}$$

وعلى ذالك فان

3_اذا كان $f(x) = e^{at}$ [8]

$$l\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

$$= [\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

وبالتالي فان $l\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$; $s > a$

4_إذاكانت [8]

$$l(coshat) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$l(coshat) = \mathrm{L}\left[\frac{e^{at} + e^{-st}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} l(e^{at}) + \frac{1}{2} l(e^{-st}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}$$

5− اذا كانت [8]

$$l(sinhat) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$l(sinhat) = l\left[\frac{1}{2}\left(e^{iat} - e^{iat}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[l\left(e^{iat}\right) - l\left(e^{iat}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2}\right]$$

6_ اذا كانت [8]

$$l(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$l(\sin at) = l\left[\frac{e^{iat} - e^{iat}}{2i}\right]$$

$$\frac{1}{2i}[l(e^{iat} - e^{iat})] = \frac{1}{2i}[l(e^{iat}) - l(e^{iat})]$$

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s++ia}\right] = \frac{1}{2i} = \frac{2ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

7–اذاكان

$$L(\cos at = \frac{1}{s^2 + a^2}$$

البرهان

$$l(\cos at = L(\frac{e^{iat} + e^{iat}}{2})$$

$$\frac{1}{2}[L(e^{at} + e^{iat})] = \frac{1}{2}[L(e^{iat}) + L(e^{iat}) = [\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia}]$$

$$= \frac{\mathrm{s + ia + s - ia}}{s^2 + \mathrm{a}^2} = \frac{s}{s^2 + \mathrm{a}^2}$$

تحويلات لابلاس للدالة متعددة [1]

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 3 \\ 2 & t \geq \end{cases}$$

$$\mathrm{l\{f(t)\}} = \int_0^\infty \mathrm{e^{-st} f(t) dt} = \int_0^3 \mathrm{e^{-st}(0)} + \int_0^\infty \mathrm{e^{-st}(2)}$$

$$0 + 2\int_3^\infty e^{-st} dt = 2\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_3^\infty$$

$$= \left[\frac{-e^{-\infty}}{s} - \frac{e^{-3s}}{-s}\right]$$

$$= 2\left[0 + \frac{2e^{3s}}{s}\right] = \frac{2e^{3s}}{s}$$

(1-4) جدول تحويلات لابلاس لبعض الدوال [10]

	الدالة $f(x)$	تحويل لابلاس للدالة $f(s)$		الدالة $f(x)$	تحويل لابلاس للدالة $f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$	2.	$\mathbf{e}^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n,\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4.	$t^p,\ p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6.	$t^{n-\frac{1}{2}},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9.	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	10.	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
11.	$\sin(at)-at\cos(at)$	$\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	12.	$\sin(at)+at\cos(at)$	$\frac{2as^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
13.	$\cos(at)-at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2-a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	14.	$\cos(at)+at\sin(at)$	$\frac{s\left(s^2+3a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
15.	$\sin(at+b)$	$\frac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$	16.	$\cos(at+b)$	$\frac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19.	$\mathbf{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20.	$\mathbf{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21.	$\mathbf{e}^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22.	$\mathbf{e}^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23.	$t^n\mathbf{e}^{at},\quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t)=u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{\mathbf{e}^{-cs}}{s}$	26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	$\mathbf{e}^{-cs}$
27.	$u_c(t)f(t-c)$	$\mathbf{e}^{-cs}F(s)$	28.	$u_c(t)g(t)$	$\mathbf{e}^{-cs}\mathfrak{L}\{g(t+c)\}$
29.	$\mathbf{e}^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	30.	$t^n f(t),\quad n=1,2,3,\ldots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31.	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\,du$	32.	$\int_0^t f(v)\,dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	34.	$f(t+T)=f(t)$	$\frac{\int_0^T \mathbf{e}^{-st}f(t)\,dt}{1-\mathbf{e}^{-sT}}$
35.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	36.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
37.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$			

الفصل الثاني

معكوس لابلاس

(2−1) تعريف معكوس تحويل لابلاس [6]

يعرف معكوس تحويل لابلاس العكس للدالة $f(s)$ويرمز له بالرمز «l^{-1}» على انه مؤثر عكسي للمؤثر التكاملي «L»فاذا اثر المؤثر «L»على الدالة $f(t)$ فيحولها الى الدالة $f(s)$ فان المؤثر العكسي «l^{-1}»

يؤثر على الدالة $f(s)$ فيحولها الى شكلها الاصلي $f(t)$ اي ان

$$l(f(t) = f(t) \leftrightarrow l^{-1}\big(f(s)\big) = f(t)$$

2−2 خصائص معكوس تحويل لابلاس

لمعكوس لابلاس خصائص عديدة تناظر تماما خصائص تحويل لابلاس الاصلية

1- الخاصية الخطية [3]

معكوس تحويل لابلاس هو ايضا تحويل خطي حيث ان a وb ثوابت

$$l^{-1}\{f_1(s) + f_2(s)\} = l^{-1}\{f_1(s) + f_2(s)\}$$

$$l^{-1}\{kf(s)\} = kl^{-1}\{f(s)\}$$

لذا فان الدالة التالية $l^{-1}\left\{\frac{5}{s+2}\right\}$ معكوس لابلاس [6]

$$l^{-}\left\{\frac{5}{s+2}\right\} = 5\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 5e^{-2t}$$

وكذلك معكوس تحويل لابلاس للدالة التالية نستخدم الخاصية الخطية ثم نجد

معكوس تحويل لابلاس لها وباستخدام الخاصية الخطية [7]

$$l^{-1}\left\{\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$$

$$5l^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} - 6l^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \frac{3}{2}l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}$$

ومن خلال الاستعانة بالجدول معكوس لابلاس تحويل لابلاس نحصل على

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s-6}\right\} = e^{6t}$$

$$l^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos 3t$$

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} = e^{-2t}\sin t$$

$$l^{-1}\left\{\frac{5}{s-6} - \frac{6s}{s^2+9} + \frac{3}{2s^2+8s+10}\right\} =$$

$$5e^{6t} - 6\cos 3t + \frac{3}{2}e^{-2t}\sin t$$

2- خاصية الازاحة [5]

اذا كان $l^{-1}(f(s) = f(t)$ [5]

$$l^{-1}\{f(s-a) = e^{at}f(t) = e^{at}l^{-1}\{f(s)\}$$

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4+8}\right\}$$

وبطريقة اكمال المربع في المقام يكون لدينا

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4+8}\right\} = l^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2+4}\}$$

$$l^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2}\right\} = sin2t$$

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4+8}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+4}\right\}$$

$$\frac{1}{2}e^{2t}l^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t$$

3- خاصية مشتقة المعكوس [10]

$$l^{-1}\left\{\frac{d}{ds}f(s)\right\} = -tl^{-1}f(s) = -tf(s)$$

وكما في الدالة التالية

$$l^{-1}\left\{tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}$$

$$l^{-1}\left\{tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{-1}{t}l^{-1}\left\{\frac{d}{ds}tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}$$

$$\frac{-1}{t}l^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\left(\frac{-1}{s^2}\right)\right\}$$

$$\frac{-1}{t}l^{-1}\left\{\frac{1}{1+s^2}\right\} = \frac{\sin t}{t}$$

4– خاصية القسمة على t **[10]**

اذا كان $l^{-1}\{f(s)\} = f(t)$

$$l^{-1}\{\int_0^{\infty} f(s)ds\} = \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{t}l^{-1}\{f(s)\}$$

وكما في الدالة التالية

$$l^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1)^2}\right)$$

$$l^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1)^2}\right) = tl^{-1}\int_0^{\infty}\frac{2sds}{(s^2+1)^2}$$

$$tl^{-1}[\frac{-1}{s^2+1}]_0^{\infty} = tl^{-1}\left\{0+\frac{-1}{s^2+1}\right\}$$

$$= tsint$$

5-خاصية معكوس التكامل **[5]**

اذا كان $L^{-1}\{\mathrm{f(s)}\} = \mathrm{f(t)}$

$$l^{-1} = \left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(t)dt$$

وكما في الدوال التالية

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \sin t$$

ومن خلال الجدول نلاحظ ان

$$l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

وباستخدام الخاصية نحصل على

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin t dt$$

$$= [cos]_0^t = 1 - \cos t$$

(2-3)طرق ايجاد معكوس تحويل لابلاس .:

1- الحصول على معكوس تحويل لابلاس باستحدام الجداول [1][2]

هذه الطريقة تعتمد على مدى معرفتنا بجداول تحويلات لابلاس العكسية وهذه الجداول

عبارة عن صور لبعض تحويلات لابلاس العكسية المعروفة قد استنتجت ووضعت في جداول

بغرض تطبيقها بدون الخوض في كيفية الحصول عليها

ولهذا يمكن اضافة المزيد من تحويلات معكوس لابلاس الى الجداول بمجرد الحصول على

تحويل لابلاس لاي دالة جديدة فمثلا اذا حصلنا على تحويل لابلاس للدالة$f(t) = \sin(at)$

ووجدت ان $f(s) = \frac{a}{s^2+a}$

اي ان تحويل لابلاس فعند ئذ يمكن فورا الحصول على معكوس تحويل لابلاس$l^{-1}(f(s)$

حيث نجد ان

$$l^{-1}(f(s) = l^{-1}\left(\frac{a}{a^2+a^2}\right) = \sin(at)$$

لايجاد معكوس تحويل لابلاس للدالة $f(s) = \frac{15}{s^2+3^2}$ [2]

$$l^{-1}\left(\frac{15}{s^2+3^2}\right) = 5l^{-1}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)$$
$$= 5\sin(3t)$$

2- الحصول على معكوس تحويل لابلاس باستخدام الكسور الجزئية [1][2]

الدوال الكسرية والتي لا يمكن الحصول على تحويلات لابلاس العكسية

لها مباشرة باستخدام الجدوال يمكن ان يتم تبسيطها باستخدام نظرية الكسور

الجزئية $(partail\ fraction)$ ومن ثم يمكن استخدام الجدول تلعب الكسور

الجزيئية دورا هاما في تحويل لابلاس فهي تستعمل عملية ايجاد معكوس تحويل

لابلاس للكسور المرتبة وذالك تحويلها الى مجموعة من الكسور الجزئية المعروف

لها تحويل لابلاس .

الدالة التالية لها معكوس تحويل لابلاس لها باستخدام الكسور الجزئية :. **[1]**

$$l^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{{}^{-6}/_{5}}{s-1} + \frac{{}^{25}/_{6}}{s-2} + \frac{{}^{1}/_{30}}{s+4}$$

$$l^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = \frac{-16}{5}l^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}l^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}l^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$= \frac{-16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$$

2-4(نظرية الالتفاف) [2]

تقدم هذه النظرية طريقة ايجاد معكوس لابلاس لحاصل ضرب اي دالتين بصرف النظر عن نوعيها

اذا كان $L^{-1}(f(s) = f(t)\,, \quad l^{-1}(G(s) = g(t)$

فان التفاف الدالة f(t) مع الدالة g(t) والذي يرمز له بالرمز

F(t)*g(t) يعطى من العلاقة

$$f(t) * g(t) = l^{-1}[f(s)\ \ G(s)$$

حيث

$$l^{-1}(\mathrm{f(s)\ G(S)} = \int_0^1 \mathrm{f(t-a)\ g(a)da}$$

معكوس تحويل لابلاس باستخدام نظرية باستخدام نظرية للدالة [2]

$$l^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{s(s-2)^2}}\right)$$

$$l^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{s(s-2)^2}}\right) = \mathrm{L^{-1}}\big[\mathrm{f(s)G(s)}\big)$$

$$= \int_0^1 \mathrm{f(t-a)\ g(a)da}$$

$$\mathbf{f(s)=\frac{1}{s}} \qquad , \quad \boldsymbol{g(s)=\frac{1}{(s-2)^2}}$$

$$\boldsymbol{f(t)=l^{-1}(F(s)=l^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1}$$

$$\boldsymbol{f(t-a)=1}$$

$$\mathbf{g(t)=l^{-1}(G(s)=l^{-1}\big(G(s)\big)=l^{-1}(\frac{1}{(s-2)^2}=te^{2t}\ \rightarrow G(a)=ae^{2a}}$$

وهكذا نجد ان $\boldsymbol{l^{-1}(\frac{1}{s(s-2)^2}=\int_0^t(ae^{2a})da}$

$$\boldsymbol{=\frac{e^{2t}}{4}(2t-1)+\frac{1}{4}}$$

وكذلك ناتج التكامل [5]

$$\mathbf{\int_0^t J_0(x)J_0(t-x)dx}$$

حيث $\boldsymbol{J_0(t)}$ تمثل دالة بيسل من الرتبة صفر

$$\mathbf{J_0(x)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}$$

$$\int_0^t \mathrm{J_0(x)J_0(t-x)dx}$$

ومن خلال نظرية الالتفاف

$$l\{f(t)\}=l\{J_0(t).L\{J_0(t)\}$$

ومن خلال نظرية الالتفاف يكون

$$l\{f(t)\}=\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)=\frac{1}{s^2+1}$$

ومن هذا نجد ان

$$f(t) = l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

اي ان

$$\int_0^t J_0(x)\, J_0(t-x)\, dx = \sin t$$

(2-5)جدول معكوس تحويل لابلاس لبعض الدوال الهامة: [3]

يتضمن عدد من تحويلات لابلاس لدوال اساسية ومهمة بحيث تم ايجاد المعكوس لهذه الدوال .

معكوس تحويل لابلاس الدالة	تحويل لابلاس الدالة
$L^{-1}\left[\frac{a}{s}\right] = a$	$L[a] = \frac{a}{s}$
$L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{ax}$	$L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$
$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = sinax$	$L[sinax] = \frac{a}{s^2+a^2}$
$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = cosax$	$L[cosax] = \frac{s}{s^2+a^2}$
$L^{-1}\left[L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = x^n\right]$	$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$
$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = sinhax$	$L[sinhax] = \frac{a}{s^2-a^2}$
$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = coshax$	$L[coshax] = \frac{s}{s^2-a^2}$
$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = x^n e^{ax}$	$L[x^n e^{ax}] = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}, n = 1,2,3,\ldots$
$L^{-1}\left[\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = xcosax$	$L[xcosax] = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$L^{-1}\left[\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}\right] = xcosax$	$L[xsinax] = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

الفصل الثالث

تطبيقات تحويلات لابلاس

(3-1)تحويل لابلاس للمشتقات [9]

اذا كانت$f(t)$ ومشتقتها $f'(\mathrm{t})$ دالتان مستمرتان لكل قيم $t \geq 0$ ولهما تحول لابلاس فأن

$$l\{f'(t)\} = sl\{f(t) - f(0)$$

البرهان

$$l\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)\ e^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}$$

$$[\mathrm{f(t)}e^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}]_0^\infty + \mathrm{s}\int_0^\infty f'(t)\ e^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}$$

$$-f(0) + \int_0^\infty f'(t)\ e^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}$$

$$-f(0) + \mathrm{sLf(t)}$$

$$sL\{f(t) - f(0)$$

ومن خلال ذلك فان تحويل لابلاس للمشتقة الثانية $\mathrm{f}''(\mathrm{t})$ هو

$$L\{f''(t)\} = sL\{f'(t) - f'(0)$$

$$s\{sL\{f(t)\} - f(0)\} - f'(0)$$

$$s^2L\{f(t)\} - sf(t) - f'(t)$$

وبصورة عامة نستنتج ان تحويل لابلاس للمشتقة من الرتبة n للدالة f(t)هو

$$L\{f^n(t)\} = s^nL\{f(t)\} - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}f'(t) - \cdots - \mathrm{f}^{(\mathrm{n}-1)}(0)$$

بشرط ان تحويل تحويل لابلاس للمشتقة

الدالة التالية $f(t) = t\ cos\ aT$وباستخدام تحويل لابلاس للمشتقات [5]

$$\mathrm{f}''(\mathrm{t}) = \cos\mathrm{at} - \mathrm{at\ sinat}$$

$$\mathrm{f}(0) = 1$$

$$f''(\mathrm{t}) = \mathrm{a}\sin\mathrm{at} - \mathrm{a}\sin\mathrm{at} - \mathrm{a}^2\mathrm{t}\cos\mathrm{at}$$

$$= -2\sin at - a^2\cos at$$

$$-2\sin at - a^2 f(t)$$

$$s^2 L\{f(t)\} - 1 = -2a\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) - a^2 L\{f(t)\}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

وكذلك تحويل لابلاس للدالة $f(t) = sin'bt$ وباستخدام المشتقات نلاحظ ان [4]

$$f'(t) = b\cos bt$$

$$f(t) = 0$$

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

$$bL\{\cos bt\}(s) = \frac{sb}{s^2 + b^2}$$

$$L\{\cos bt\}(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

(2-3)حل المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة [11]

ان واحد من تطبيقات تحويلات لابلاس الرئيسية هو حل المعادلات التفاضلية الخطية حيث يطلب تحويل المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الخطية الى معادلة جبرية في $y(s)$ ويتم ذالك بتحويل المعاملات

الاشتقاقية $\frac{dy}{dx}$ ... ... $\frac{d^n y}{dx^n}$ والدوال الاخرى التى فيها الى تحويلات لابلاس وبعد ان تتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية نقوم بايجاد معكوس لابلاس لهذه المعادلة الجبرية ويكون الناتج هو المعادلة التفاضلية

خطوات حل المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام تحويلات لابلاس :

(1) نأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية.

(2) التعويض بالشروط الحدودية المرافقة للمعادلة لتبسيط المعادلة .

(3) نجعل f(s)او y(s) في طرف وباقي الحدود في طرف آخر

(4) ناخذ معكوس تحويل لابلاس للطرفين لايجاد الحل العام بدلالة xy .

المعادلة التفاضلية الاتية وباستخدام تحويل لابلاس :.

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}=0$$ العلم مع $$\rightarrow y(0)=u\,,y'(0)=\theta$$

[9]نجد تحويل لابلاس لطرفي المعادلة :.

$$2L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+5L\left\{\frac{dy}{dx}\right\}-3L\left\{\frac{dy}{dx}\right\}=L(0)$$

$$2[s^2L\{y\}-sy(0)+y'(0)\}+5[5L\{y\}-y(0)]-3L\{y\}=0$$

وبالتعويض عن

$$y(0)=u\quad ,y'(0)=9$$

$$2[s^2L\{y\}-4s-9]+5[sL\{y\}-4]-3L\{y\}=0$$

$$[2s^2-5s-3]L(y)=8s+38$$

$$L\{y\}=L^{-1}\{\frac{8s+38}{(2s-1)(s+3)}$$

وبمساواة معاملات قوى s بالمطابقة ينتج

$$8s+38=A(s+3)+B(2s-1)$$

$$s=\frac{1}{2}\rightarrow A=12$$

$$s=-3\rightarrow B=-2$$

وعلى هذا يمكن كتابة المعادلة الجبرية للصورة

$$\mathrm{y}=\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{8s+38}{2s^2+5s-3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{12}{2s-1}-\frac{2}{s+3}\right\}$$

$$y=l^{-1}\left\{\frac{12}{2\left(s-\frac{1}{2}\right)}\right\}-l^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\}$$

وبايجاد معكوس تحويل لابلاس وهو حل المعادلة

$$y = 6e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-3x}$$

المعادلة التفاضلية وباستخدام تحويل لابلاس ومعكوسه [10]

$$\mathrm{y}'' - 4\mathrm{y}' + 4\mathrm{y} = 64\sin 2\mathrm{t}$$

مع العلم ان

$$y(0) = 0 \qquad , \qquad y'(0) = 1$$

وباخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على

$$[s^2y - sy(0) - y(0)] - 4[sy - y(0)] + 4y = \frac{64 \times 2}{s^2 + 4}$$

وبالتعويض

$$y(0) = 0 \qquad , \quad y'(0) = 1$$

$$s^2 - 1 - 4sy + 4y = \frac{128}{s^2 + 4}$$

$$(\mathrm{s}^2 - 4\mathrm{s} + 4)\mathrm{y} = 1 + \frac{128}{s^2 + 4}$$

$$(s - 2)^2 y = 1 + \frac{128}{s^2 + 4}$$

$$y = \frac{1}{(s - 2)^2} + \frac{128}{(s - 2)^2(s^2 + 4)}$$

$$y = \frac{1}{(s - 2)^2} - \frac{17}{S - 2} + \frac{16}{(s - 2)^2} + \frac{8S}{s^2 + 4}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{-8}{s - 2} + \frac{17}{(s - 2)^2} + \frac{8s}{s^2 + 4}\right]$$

وبايجاد المعكوس لابلس وهو حل المعادلة :.

$$y = -8e^{2t} + 17te^{2t} + 8\cos 2t$$

(3_3)حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس [3]

ان احدى طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة n ذات المعاملات

الثابتة هي طريقة استخدام تحويلات لابلاس .

(3-4)تحويلات لابلاس للمشتقات الجزئية : [3]

لنفرض ان $u(x,t)$ دالة ذات متغيرين ، ستعمل على ايجاد تحويلات لابلاس للمشتقات

الجزئية u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx},.........بان تحويل لابلاس يحول المتغير (متغير التكامل)

فعندئذ يكون تحويل المشتقات الجزئية الاتية :

$$L[u_t] = su(x,s) - u(x,0)$$

$$L[u_{tt}] = s^2u(x,t) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

$$L[u_x] = \frac{d}{dx}u(x,s)$$

$$L[u_{xx}] = \frac{d^2}{dx^2}u(x,s)$$

حيث ان ، ويتبع تحويلا $u(x,s) = L[u(x,t)]$ ويتبع تحويل u_x, u_{xx} من العلاقة الاساسية

للتفاضل والتكامل الاتية :

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dt$$

كما يتبع تحويلا u_t, u_{tt} باستخدام التكامل الجزئي .

خطوات حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس : [3]

(1) نأخذ تحويل لابلاس لطرف المعادلة التفاضلية .

(2) نعوض بالشروط الحدودية المرافقة للمعادلة لتبسيط المعادلة.

3) عزل الحد الذي يحتوي على (x,s) $\frac{d}{dx}$ او $\frac{d^2}{dx^2}$ مع $sy(x,s)$ في طرف

وبقية الحدود في الطرف الآخر.

(4) بعد ايجاد الحل التام والعام نحسب لابلاس اذا كان لدينا شروط $u(0,t)$ وبعدها ايجاد

القيم واخذ l^{-1} للدالة النهائية

بعض الامثلة عن تحويل لابلاس في المعادلات التفاضلية الجزئية [3]

$$u_t = 3u_{\mathrm{x}}, \mathrm{x} > 0, t > 0$$

$$L[U_t = 3U_x]$$

$$L[U_t] = 3L[U_x]$$

$$L[U_t] = 3SU(x,s) - U(x,0)$$

$$L[U_x] = \frac{d}{dx}U(x,s)$$

$$SU(x,s) - U(x,0) = 3\frac{d}{dx}U(x,s)$$

$$SU(x,s) - e^{-2x} = 3\frac{d}{dx}U(x,s)$$

$$3\frac{d}{dx}U(x,s) - SU(x,s) = -e^{-2x}$$

$$\left[3\frac{d}{dx}U - SU = -e^{-2x}\right] \div 3$$

$$\left(D - \frac{s}{3}\right)U = \frac{-1}{3}e^{-2x}$$

$$m - \frac{s}{3} = 0 \rightarrow m = \frac{s}{3}$$

$$U_c = \emptyset(s)e^{\frac{1}{3}sx}$$

$$U_p = \frac{1}{f(D)}e^{ax} \quad , a = -2$$

$$U_p = \frac{1}{(-2-\frac{1}{3}s)} \frac{-1}{3} e^{-2x}$$

$$U_{\mathrm{p}} = \frac{1}{(6+\mathrm{s})} e^{-2x}$$

$$U = U_c + U_p$$

$$U = \emptyset(s) e^{\frac{-1}{3}sx} + \frac{1}{(6+\mathrm{s})} e^{-2x}$$

نسحب لابلاس للشرط الثاني $U(0.t) = e^{-6t}$

$$\mathrm{L[U(x,t) = U(x,s)}$$

$$[\,U(0.t)] = U(0.t) = [e^{-6t}] = \frac{1}{(6+s)}$$

$$U(0,s) = \frac{1}{(6+s)}$$

$$U(0,s) = \emptyset(s) e^{0} + \frac{1}{(6+s)} \mathrm{e}^{0} = \frac{1}{(6+s)}$$

$$\emptyset(s) = \frac{1}{(6+s)} - \frac{1}{(6+s)} \rightarrow \emptyset(s) = 0$$

$$U(x,s) = \emptyset(s) e^{\frac{-1}{3}sx} + \frac{1}{(6+s)} e^{-2x}$$

$$U(x,s) = 0) e^{\frac{-1}{3}sx} + \frac{1}{(6+s)} e^{-2x}$$

$$U(x,s) = \frac{1}{(6+s)} e^{-2x}$$

ناخذ L^{-1} للطرفين $L^{-1}[U(x,s) = L^{-1}\left[\frac{1}{(6+s)} e^{-2x}\right]$

$$U(x,t) = e^{-2x}\, e^{6t} = e^{-2x-6t}$$

المصادر

1- عمران قوبا، التحليل 4،منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،2018

2-Emil Shoukralla، Rules of calculation Laplace Transforms, Convolution Theorem,2018

3-منتصر أسماعيل عدوان،أستخدام تحويلات لابلاس لحل بعض مسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية، جامعة الانبار/كلية التربية للعلوم الصرفة، 2019

4-Nagle Saff Snider، Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems، Library of Congress Cataloging-in-Publication Data،2012

5-باسل يعقوب يوسف لوقا،طرق في الرياضيات التطبيقية مطابع التعليم،1989

6-Murray R. Spiegel، Advanced Mathematics for Engineers and Scientists، by The McGraw-Hill Companies, Inc.،1971

7-pual Dawkins, Differential Equations,2007

8-حسن مصطفى العويضي، المعادلات التفاضلية(الجزء الاول)، دار الرشد، 2005

9-John Bird،Higher Engineering Mathematics، Routledge Taylor & Francis Group،2017

10-DASS،ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS، by S. CHAND & COMPANY

PVT. LTD، 2014

11-خالد احمد السامرائي-يحيى عبد سعيد، طرق حل المعادلات التفاضلية، مؤسسة دار الكتب -جامعة المصادر1980

12 -Dean G. Duffy،

Advanced Engineering Mathematics، by Taylor & Francis Group, LLC، 2017