جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

بحث تقدم به الطالب
علي عبد الحسين كاظم

الى مجلس كلية التربية/ قسم الرياضيات
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في تربية الرياضيات

بإشراف
أ. م. د. مصطفى علي

٢٠٢٥م　　　　　　　　١٤٤٦هـ

(بسم الله الرحمن الرحيم)

﴿ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ ﴾

(الزمر: ٩)

- صدق الله العلي العظيم -

إقرار المشرف

اشهد ان اعداد هذا البحث بـــ **(الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية)** تقدم به الطالب **(علي عبد الحسين كاظم)** قد جرى بإشراف في قسم الرياضيات– كلية التربيـــة – جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في تربية الرياضيات.

المشرف

أ. م. د. مصطفى علي

التاريخ: / / ٢٠٢٥

رئيس قسم الرياضيات

التاريخ / / ٢٠٢٥

الإهـــداء...

الى منارة العلم والامام المصطفى الى الأمي الذي علم المتعلمين الى سيد الخلق الى رسولنا الكريم سيدنا محمد صلى الله عليه واله وسلم . . .

إلى من سعى وشقى لأنعم بالراحة والهناء الذي لم يبخل بشيء من أجل دفعي في طريق النجاح الذي علمنا أن نرتقي سلم الحياة بحكمة وصبر الى والدي العزيز. . .

الى الينبوع الذي لا يمل العطاء الى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها الى والدتي الغالية. . .

إلى من علمونا حروفاً من ذهب وكلمات من درر وعبارات من أسمى وأجلى عبارات في العلم إلى من صاغوا لنا علمهم حروفاً اساتذتي الاعزاء . . .

. . . . . اهدي هذا الجهد المتواضع. . . . .

الشكر والتقدير

من دواعي الحكمة وسداد الرأي ان نتوجه بالمقام الاول بالشكر والعرفان الى خالق الخلق وبارئ النسمة الله أذ من علينا بجوهرة لا نظير لها ألا وهي العقل .

والى خاتم النبيين والمرسلين أبي القاسم محمد (ﷺ) فهو المعلم الاول ومرشدنا الى طريق الحق والهداية كما اتوجه بجزيل الشكر الى مشرفي على هذا البحث الاستاذ الدكتور (أ . م . د . مصطفى علي) الذي لأزمني يوماً بيوم توجيهياً وإرشاديا لأنتج هذه الثمرة كما لا يفوتني ان اتقدم بالشكر الى عمادة كلية التربية ورئاسة قسم الرياضيات واساتذتنا كافة الذين مدوا يد العون وكانوا كالجندي المجهول فهم النور الذي اضاء طريقي . . . .

الباحث

مستخلص البحث

يقدم هذا البحث دراسة شاملة للطرق العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية(PDEs) ، والتي تُعد أداة أساسية في نمذجة الظواهر الفيزيائية والهندسية مثل انتقال الحرارة، انتشار الموجات، وديناميكا الموائع. نظراً لصعوبة الحصول على حلول تحليلية لهذه المعادلات في كثير من الأحيان، تأتي الطرق العددية كحل عملي وفعال.

الفصل الأول يستعرض المفاهيم الأساسية للمعادلات التفاضلية، موضحاً الفرق بين المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) والجزئية(PDEs) ، مع تصنيفها حسب الرتبة والخطية. كما يسلط الضوء على أهمية هذه المعادلات في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد.

الفصل الثاني يركز على طريقتين رئيسيتين:

١. **طريقة المميزات** :تُستخدم لحل المعادلات من الرتبة الأولى عن طريق تحويلها إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية.

٢. **طريقة الفروق المحدودة :(FDM)** تقوم على تقريب المشتقات الجزئية باستخدام الفروق المحدودة، مما يحول المعادلة إلى نظام معادلات جبرية قابلة للحل عددياً.

الفصل الثالث يتناول **طريقة التراخي الزائد(SOR)** ، وهي تحسين لطريقة جاوس–سايدل، حيث يتم تسريع التقارب باستخدام عامل تراخي .(ω) تُظهر هذه الطريقة كفاءة عالية في حل أنظمة المعادلات الخطية الناتجة عن تطبيقات مثل معادلة لابلاس.

يختتم البحث بتأكيد أهمية الطرق العددية في توفير حلول تقريبية دقيقة للمعادلات التفاضلية الجزئية، مع الإشارة إلى تطبيقاتها الواسعة في العلوم والهندسة. كما يقدم أمثلة عملية توضح كيفية تطبيق هذه الطرق وكيفية تحليل النتائج.

المحتويات

الفصل الأول

١ـ١ المقدمة [١]

إن المعادلات التفاضلية أساسية لفهم كثير من المسائل الفيزيائية والرياضية المهمة، لقد أدرك ذلك اسحاق نيوتن في القرن السابع عشر إذ استخدم المعادلات في دراسته لحركة الجسيمات والأجرام السماوية، تعتبر المعادلات التفاضلية من المواضيع المهمة في الرياضيات البحتة والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسية، فلم تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والميكانيكية والإنشائية من أنواع المعادلات التفاضلية. لا توجد طرق رياضية عامة لحل المعادلات التفاضلية، وهناك بعض الطرق يمكن تعميمها على مجموعة خاصة من المعادلات التفاضلية، حتى الطرق العددية وطريقة العناصر المنتهية ليستا طرق عامة لحل جميع المعادلات التفاضلية في كل الشرائط.

وما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والكيميائية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها.

١ـ٢ المعادلات التفاضلية: [٣]

المعادلات التفاضلية هي معادلات تحتوي على مشتقات (تفاضلات) لدالة مجهولة تستخدم هذه المعادلات لوصف العديد من الظواهر الطبيعية والفيزيائية مثل حركة الأجسام، انتقال الحرارة، انتشار الأمراض، التيارات الكهربائية وغير ذلك.

يوجد نوعان رئيسيان من المعادلات التفاضلية:

1) المعادلات التفاضلية العادية (ODEs):

تحتوي على مشتقات بالنسبة لمتغير مستقبل واحد

مثال: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

2) المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs):

تحتوي على مشتقات بالنسبة لأكثر من متغير مستقل

مثال: $\frac{\partial u}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3) أنواع الحلول:

أ) الحل التحليلي: باستخدام التكامل أو الطرق الرمزية.

ب) الحل العددي: عند صعوبة الحل التحليلي نستخدم الطرق العددية والتي سوف نتعرف عليها في الفصول القادمة.

١-٣ المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE): [١]

هي معادلات تحتوي على مشتقات جزئية لدالة مجهولة تعتمد على متغيرين مستقلين أو أكثر.

مثال: $\mathbf{7\frac{\partial z}{\partial x} + 8\frac{\partial z}{\partial y} = 0}$

الفرق بين المعادلات التفاضلية الجزئية والعادية (ODE)

عدد المتغيرات المستقلة	المشتقات	النوع
متغير مستقل واحد	مشتقات عادية	ODE
متغيران أو أكثر	مشتقات جزئية	PDE

أشهر أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية:

1- معادلة لابلاس (Laplace Equation)

2- معادلة بواسون (Poisson's Equation)

3- معادلة الحرارة (Heat Equation)

4- معادلة الموجة (Wave Equation)

طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية:

1- فصل المتغيرات

2- تحويلات فوريه أو لابلاس

3- طرق عددية مثل الفروق المحددة

٤-١ تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية [٣]

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE) يعد خطوة مهمة لفهم طبيعتها واختيار الطريقة المناسبة لحلها. تصنف بناء على عدة معايير:

1- التصنيف حسب الرتبة (Order):

يعتمد على أعلى مشتقة جزئية موجودة في المعادلة:

رتبة أولى $a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y)$

رتبة ثانية $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cdots=0$

2- التصنيف حسب الخطية (Linearity):

خطية (Linear): جميع الحدود تحتوي على الدالة ومشتقاتها من الدرجة الأولى

مثال: $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

غير خطية (Nonlinear): المتغير التابع أو مشتقاته يظهرون بدرجات أعلى أو مضروبين ببعضهم مثلاً: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial u}{\partial y}$

3- التصنيف حسب الشكل: (للدرجة الثانية)

مهم جداً لفهم سلوك الحل ويعتمد على المميز (Discriminant)

$$D = B^2 - AC$$

حيث المعادلة تكتب عادة كالتالي:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cdots = 0$$

١ـ٥ الطرق العددية: [٢]

الطرق العددية هي تقنيات رياضية تستخدم لإيجاد حلول تقريبية للمسائل الرياضية التي يصعب أو يستحيل حلها بشكل دقيق (تحليلي). يتم تنفيذ هذه الطرق عادة باستخدام الحاسوب لأنها تعتمد على التكرار والحسابات الكثيرة.

أهداف الطرق العددية:

تقريب الحلول: عندما لا يكون الحل الدقيق ممكناً

تسريع الحل: في المسائل المعقدة التي تستغرق وقتاً طويلاً باستخدام الطرق التقليدية

تمكين الحل الآلي: استخدام الحواسيب لحل المعادلات أو تحليل البيانات.

أنواع الطرق العددية الشائعة:

الاستخدام	النوع
طريقة نيوتن طريقة القطع	حل المعادلات غير الخطية
طريقة جاوس طريقة جاوس – سايدل	حل أنظمة المعادلات الخطية
طريقة شبه المنحرف	التكامل العددي

	طريقة سمبسون
الاشتقاق العددي	تقريب المشتقات باستخدام الفروق المحدودة
حل المعادلات التفاضلية	طريقة اويلر طريقة رانج – كوتا

مميزات الطرق العددية:

- يمكن استخدامها مع الحواسيب.
- تعطي نتائج دقيقة بما يكفي في كثير من التطبيقات.
- مرنة وتصلح لمجموعة كبيرة من المسائل

عيوب الطرق العددية:

- الحل تقريبي وليس دقيقاً تماماً.
- تحتاج إلى معرفة بكيفية تحليل الخطأ والتقارب.
- بعض الطرق قد تكون غير مستقرة أو بطيئة.

في الفصول التالية سوف نتناول الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية.

الفصل الثاني

٢-١ طريقة المميزات Method of Characteristics [٤]

طريقة المميزات هي واحدة من الطرق الأساسية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) خاصة تلك من النوع الخطية أو شبه الخطية. تستخدم هذه الطريقة بشكل رئيسي لحل معادلات تفاضلية من النوع الأول (First – Order PDE) الفكرة الرئيسية وراء هذه الطريقة هي تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) يمكن حله بسهولة.

الخطوات الأساسية لاستخدام طريقة المميزات:

1- صيغة المعادلة التفاضلية الجزئية: نفترض ان المعادلة العامة من النوع الأول تعطى كالتالي:

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u)$$

حيث $u=u(x,y)$ هو الحل المطلوب.

2- إنشاء نظام المميزات: نقوم بتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى نظام من المعادلات التفاضلية العادية (ODEs).

نظام المميزات يكون على الشكل: $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{du}{c}$

حيث dx, dy, du تمثل التغيرات في u, y, x على طول المميزات.

3- حل نظام المميزات: نقوم بحل النظام السابق باستخدام التكامل أو الطرق العددية المناسبة.

يمكن أن ينتج عن الحل دوال تعبّر عن u, y, x بدلالة وسيط جديد (مثلاً t)

4- إعادة صياغة الحل: باستخدام الحلول الناتجة من نظام المميزات بإعادة صياغة الحل لإيجاد التعبير العام لـ$u(x,y)$.

مثال(1): حل المعادلة: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

الحل: نعيد كتابة المعادلة بالشكل

$$1\frac{\partial u}{\partial x} + 1\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

هنا: $c = 0 , b = 1 , a = 1$

نظام المميزات يكون: $\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{1} = \frac{\partial u}{0}$

من $\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{1}$ تحصل على:

$x - y = C_1$ (حيث C_1 ثابت)

من $\frac{\partial u}{0} = 0$ نحصل على $u = C_2$ (حيث C_2 ثابت)

الحل العام يكون:

$$u(x, y) = f(x - y)$$

حيث f هي دالة تعسفية تحددها شروط البداية أو الحدود

مثال(2): حل المعادلة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

مع الشرط الابتدائي: $u(x, 0) = e^{x}$

الحل:

المعادلة معطاة في الشكل القياسي: $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = c$

حيث: $c = 0, b = 1, a = 1$

نحول المعادلة إلى نظام المميزات: $\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{1} = \frac{\partial u}{0}$

من $\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{1}$ نحصل على:

$x - y = C_1$ (حيث C_1 ثابت)

من $\frac{\partial u}{0} = 0$ نحصل على $u = C_2$

الحل العام يكون: $u = f(x - y)$

لدينا الشرط الابتدائي: $u(x, 0) = e^x$

عندما $y = 0$ يصبح $x - y = x$

وبالتالي:

$$u(x, 0) = f(x - 0) = f(x)$$

$$\therefore f(x) = e^x$$

$$\because f(x - y) = e^{x-y}$$

فان الحل العام للمعادلة مع الشرط الابتدائي هو:

$$u(x, y) = e^{x-y}$$

مثال(3): حل المعادلة التفاضلية الجزئية: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$ مع الشرط الابتدائي $u(x, y) = x^2$

الحل:

من الواضح أن: $c = u \, , b = x \, , a = 1$

نحول المعادلة إلى نظام المميزات باستخدام العلاقة:

$$\frac{\partial x}{a} = \frac{\partial y}{b} = \frac{\partial u}{c}$$

بتعويض القيم: $c = u \,, b = x \,, a = 1$ نحصل على:

$$\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{x} = \frac{\partial u}{u}$$

من $\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{x}$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1$$

من $\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial u}{u}$ نحصل على:

$$\frac{du}{u} = dx \Rightarrow \ln|u| = x + C_2$$

$$u = e^{x+C_2}$$

$$u = e^x e^{C_2} \Rightarrow u = C_3 e^x$$

من الخطوتين السابقتين لدينا:

$$u = C_3 e^x \quad , \quad y = \frac{x^2}{2} + C_1$$

نلاحظ أن C_1 و C_3 ثابتان مرتبطان وبالتالي يمكن التعبير عن u بدلالة y, x

من $C_1 = y - \frac{x^2}{2}$ نحصل على:

$$u = f\left(y - \frac{x^2}{2}\right) e^x$$

الشرط الابتدائي: $u(x,0) = x^2$ عندما $y = 0$ تصبح العلاقة:

$$u(x,0) = f\left(0 - \frac{x^2}{2}\right) e^x = x^2$$

إذن: $f\left(-\frac{x^2}{2}\right)e^{x} = x^2$

بقسمة الطرفين على e^{x}

$$f\left(-\frac{x^2}{2}\right) = x^2 e^{-x}$$

بالتعويض بـ $z = \frac{x^2}{2}$ نجد أن:

$$f(z) = (-2z)e^{\sqrt{-2z}}$$

نعوض الدالة f في الحل العام وبالتالي:

$$u(x,y) = \left(-2\left(y-\frac{x^2}{2}\right)\right)e^{\sqrt{-2\left(y-\frac{x^2}{2}\right)}}\,e^{x}$$

$$u(x,y) = -2\left(y-\frac{x^2}{2}\right)e^{x+\sqrt{-2\left(y-\frac{x^2}{2}\right)}}$$

٢-٢ طريقة الفروق المحدودة Finite Difference Method – FDM [٥]

طريقة الفروق المحدودة تستخدم بشكل شائع لحل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) تعتمد على تقريب المشتقات الجزئية باستخدام تعبيرات فرق (Difference Expression) واستبدالها بالمعادلة الأصلية للحصول على معادلات خطية أو غير خطية يمكن حلها عددياً.

الفكرة الأساسية:

تقسيم المجال الذي تعرف عليه المعادلة إلى شبكة (Grid) من النقاط

ثم تقريب المشتقات الجزئية في المعادلة باستخدام صيغ الفرق:

المشتقات الزمنية: باستخدام خطوات زمنية صغيرة (Δt)

المشتقات المكانية: باستخدام خطوات مكانية صغيرة $(\Delta x, \Delta y)$

٢-٣ أمثلة على تقريبات الفروق: [٤]

المشتقة الأولى (Derivative First):

تقريب للأمام (Difference Forward):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x * 2}$$

المشتقة الثانية (Derivative Second):

تقريب مركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

خطوات حل المعادلة التفاضلية الجزئية باستخدام FDM

1- صياغة المعادلة التفاضلية الجزئية: لنأخذ معادلة الحرارة كأحد الأمثلة

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2- تقسيم المجال: قم بتقسيم المجال الزمني إلى خطوات:

$t_\circ, t_1, \dots, t_n$ بفاصل زمني Δt

قسم المجال المكاني إلى نقاط:

$x_\circ, x_1, \dots, x_m$ بفاصل مكاني Δx

3- تقريب المشتقات: المشتقة الزمنية

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

4- استبدال المشتقات في المعادلة الأصلية: استبدل المشتقات التي تم تقريبها باستخدام الفروق المحددة في المعادلة الأصلية، على سبيل المثال إذا كانت معادلة الحرارة هي:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \propto \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

5- حل المعادلة العددية: بعد استبدال المشتقات تحصل على معادلة جبرية في الشكل:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

6- التكرار عبر الزمن: يتم تكرار العملية الزمنية لحساب القيم في المراحل الزمنية التالية، تبدأ من الحالة الابتدائية u_i° (القيم الأولية) وتستخدم المعادلة لتحديث القيم في كل خطوة زمنية.

تتكرر هذه العملية لكل خطوة زمنية حتى الوصول إلى الزمن المطلوب t_m

7- اعتبارات الاستقرار: في بعض الحالات قد تكون المعادلة غير مستقرة أو كانت قيمة λ كبيرة جداً. لحل هذه المشكلة يجب اختيار قيم مناسبة للخطوات Δx وΔt بحيث تحقق الاستقرار.

على سبيل المثال في معادلة الحرارة ينصح بأن تقول λ أقل من أو تساوي 0.5 لضمان الاستقرار.

8- التحقق من الدقة: يمكن مقارنة النتائج المحسوبة مع حلول تحليلية (إن وجدت) أخرى للتحقق من دقة الطريقة.

يمكن أيضاً تحسين دقة الحل بزيادة عدد النقاط في الشبكة (Δx) وتقليل الخطوات الزمنية (Δt)

مثال: حل معادلة الحرارة باستخدام طريقة الفروق المحددة FDM حيث:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \propto \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$\propto = 0.01$ هو معامل الانتقال الحراري

$\Delta x = 0.1$ الخطوة المكانية

$\Delta t = 0.01$ الخطوة الزمنية

الشروط الابتدائية

$u(x,0) = Sin(\pi x)$ حيث $x \in [0,1]$

الحدود: $u(0,t) = u(1,t)$

الحل:

نقسم المجال المكاني والزماني

المجال المكاني: $x_i = i\Delta x \;,\; i = 0,1,2,\dots\dots.10$

$x_i = 0 \,, x_1 = 0.1 \,, x_2 = 0.2, \dots\dots\dots, x_{10} = 1$

المجال الزمني: $t_n = n\Delta t \;,\; n = 0,1,2,3,\dots\dots\dots.$

$t_\circ = 0 \,, t_1 = 0.01 \,, t_2 = 0.02, \dots\dots\dots$

نحسب قيمة λ باستخدام العلاقة:

$$\lambda = \frac{\propto \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{0.01 \times 0.01}{(0.1)^2} = \frac{0.0001}{0.01} = 0.01$$

نحسب قيم $u(x,0)$ باستخدام

$$u(x,0) = Sin(\pi x)$$

$$u(0,0) = Sin(0) = 0$$

$$u(0.1,0) = Sin(\pi \times 0.1) \approx 0.309$$

$$u(0.2,0) = Sin(\pi \times 0.2) \approx 0.588$$

$$u(0.3,0) = Sin(\pi \times 0.3) \approx 0.809$$

$$u(0.4,0) = Sin(\pi \times 0.4) \approx 0.951$$

$$u(0.5,0) = Sin(\pi \times 0.5) \approx 1$$

$$u(0.6,0) = Sin(\pi \times 0.6) \approx 0.951$$

$$u(0.7,0) = Sin(\pi \times 0.7) \approx 0.809$$

$$u(0.8,0) = Sin(\pi \times 0.8) \approx 0.588$$

$$u(0.9,0) = Sin(\pi \times 0.9) \approx 0.309$$

$$u(1,0) = Sin(\pi \times 1) \approx 0$$

نطبق معادلة الفروق المحددة

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

الآن سنقوم بحساب القيم الزمنية التالية باستخدام هذه المعادلة

الخطوة الزمنية الأولى (من $t_\circ = 0$ إلى $t_1 = 0.01$)

نبدأ بحساب u_i^1 لكل i من 1 إلى 9 (نستثني النقاط الحدودية لأن قيمتها صفر)

عند $i = 1 \quad (x = 0.1)$

$$u_1^1 = u_1^0 + 0.01(u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0)$$

$$u_1^1 = 0.309 + 0.01(0.588 - 0.618) = 0.306$$

عند $i = 2 \quad (x = 0.2)$

$$u_2^1 = u_2^0 + 0.01(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0)$$

$$u_2^1 = 0.588 + 0.01(0.809 - 1.176 + 0.309) = 0.5822$$

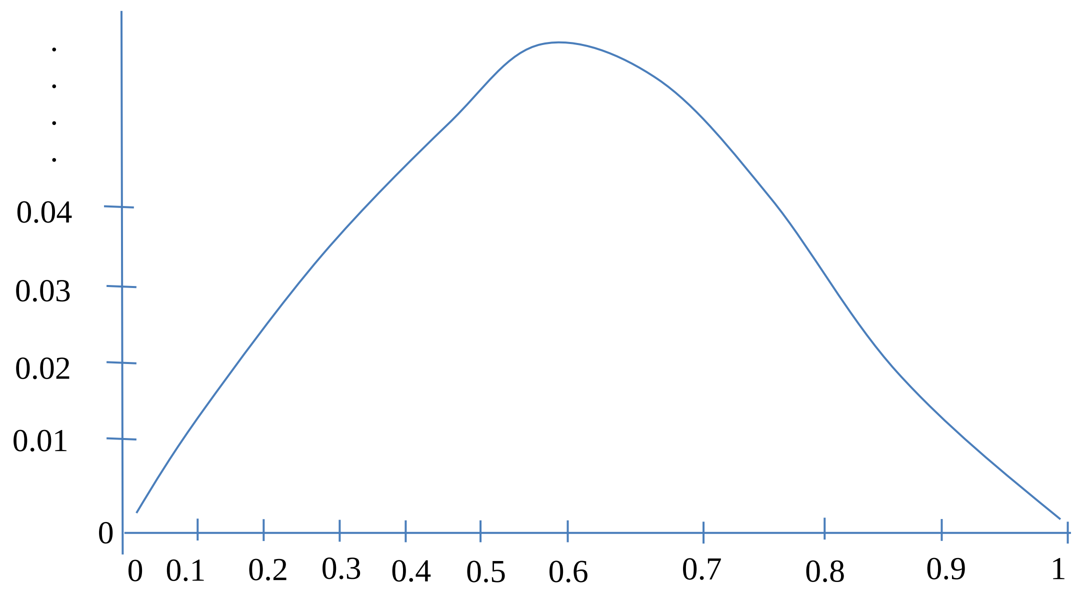
عند $i = 3 \quad (x = 0.3)$

$$u_3^1 = u_3^0 + 0.01(u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0)$$

$$u_3^1 = 0.809 + 0.01(0.951 - 1.618 + 0.588) = 0.8011$$

وهكذا نقوم بحساب القيم الزمنية التالية باستخدام نفس المعادلة عبر الخطوات الزمنية المتعاقبة

النتيجة: بعد تكرار العمليات الحسابية عبر الزمن سنحصل على قيم u_i^n عبر الشبكة المكانية والزمانية والتي تمثل الحل العددي لمعادلة الحرارة



الرسم البياني لمعادلة الحرارة باستخدام طريقة الفروق المحددة يوضح الرسم تطور توزيع درجة الحرارة بمرور الزمن

٣-١ طريقة التراخي الزائد (Successive Over – Relaxation, SOR) [٦]

هي تحسين لطريقة جاوس – سايدل (Gauss – Seidel) لحل المعادلات التفاضلية الجزئية تهدف هذه الطريقة إلى تسريع التقارب باستخدام عامل التراخي (ω) حيث يتم تعديل التحديث للقيم الداخلية للشبكة لتحقيق حل عددي أسرع.

المعادلة المستخدمة:

إذا كان الحل عند نقطة معينة يرمز له $u_{i.j}$ فان المعادلة في طريقة التراخي الزائد تكتب على الشكل التالي:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega).u_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{4}\left(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)}\right)$$

$u_{i,j}^{(k+1)}$: القيمة الجديدة للنقطة (i,j)

$u_{i,j}^{(k)}$: القيمة القديمة للنقطة (i,j)

ω : عامل التراخي (Factor of Relaxation)

إذا كان $1 < \omega < 2$: تسريع التقارب

إذا كان $\omega = 1$: تحول الطريقة إلى جاوس – سايدل

إذا كان $0 < \omega < 1$: تباطؤ التقارب

٣-٢ خطوات الحل بطريقة التراخي الزائد: [٦]

1- صياغة المعادلة التفاضلية الجزئية: على سبيل المثال معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

2- إعداد الشبكة: إنشاء شبكة نقطية $N \times M$ وتحديد القيم الحدودية *(Conditions Boundary)*.

3- التكرار مع عامل التراخي: ابدأ بحل تقريبي *(Initial Guess)* حدث القيم في كل نقطة باستخدام المعادلة أعلاه مع عامل التراخي.

4- التقارب: كرر الخطوات حتى يصبح الفرق بين القيم الجديدة والقديمة أقل من عتبة صغيرة (ϵ)

Note:

- قيمة ω المثلى تعتمد على المشكلة، عادة تعتبر قيم بين *1.1* و*1.9*
- القيم التقريبية من *2* تؤدي إلى عدم استقرار الحل

مثال: جد حل معادلة لابلاس في بعدين: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

مع الشروط الحدودية

$$u(x,0) = 0\,, u(x,2) = 100$$
$$u(0,y) = 0\,, u(2,y) = 100$$

الحل:

الشبكة هي 3×3

تمثيل الشبكة:

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 0$	0	0	0
$i = 1$	0	$u_{1,1}$	100
$i = 2$	100	100	100

النقطة $u_{1,1}$ هي النقطة الداخلية الوحيدة التي يجب حسابها

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \omega\left(\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k+1)}\right) - u_{i,j}^{(k)}\right)$$

حساب الدورة الأولى $k = 0$

$$u_{1,1}^{(1)} = u_{1,1}^{(0)} + \omega\left(\frac{1}{4}\left(u_{2,1}^{(0)} + u_{0,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)} + u_{1,0}^{(0)}\right) - u_{1,1}^{(0)}\right)$$

$$u_{1,1} = 0 + 1.5\left(\frac{1}{4}(100 + 0 + 100 + 0) - 0\right) = 75$$

الدرجة الثانية $k = 1$

حساب $u_{1,1}^{(2)}$

$$u_{1,1}^{(2)} = u_{1,1}^{(1)} + \omega\left(\frac{1}{4}\left(u_{2,1}^{(1)} + u_{0,1}^{(1)} + u_{1,2}^{(1)} + u_{1,0}^{(1)}\right) - u_{1,1}^{(1)}\right)$$

$$u_{1,1} = 75 + 1.5\left(\frac{1}{4}(100 + 0 + 100 + 0) - 75\right) = 37.5$$

تتكرر الخطوات نفسها في كل دورة حتى يتحقق شرط التقارب (أي عندما يكون الفرق بين القيمتين $u_{1,1}^{(k+1)}$ و $u_{1,1}^{(k)}$ أصغر من حد معين مثل $\epsilon = 0.01$)

المصادر

١. أ.د. حسن مصطفى العويضي، المعادلات التفاضلية، الجزء الثاني، مكتبة الرشيد، الرياض، المملكة العربية السعودية، ١٤٢٦هـ – ٢٠٠٥م.

2. Numerical Methods for Engineers, Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, New York, 2015.
3. An Introduction to Partial Differential Equations, Yehuda Pinehover, Jacob Rubinstein, Cambridge University Press, 2005.
4. Partial Differential Equations, America, 1998, Lawrence C. Evans.
5. The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, D. F. Griffiths and A. R. Mitchell, 1980.
6. Alterative Solution of large linear systems, David M. Young, Jr, New York, 1971.