جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـامعة ميسان
كليـة التربية
قسم الرياضيات

عنوان البحث

(خصائص متعددات حدود برنشتاين)

بحث

مقدم الى مجلس كلية التربية/ جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل درجة

البكالوريوس في الرياضيات

تقدم بها

الطالب

(محمد حسن شنين)

باشراف

(م. تغريد عبد الكريم)

2025 م

1446 هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

شهد الله انه لا اله الا هو والملائكة

واولوا العلم قائما بالقسط

لا اله الا هو العزيز الحكيم

صدق الله العلي العظيم

سورة آل عمران ... آية 18

شكر وتقدير

في البداية أود أن أعبر عن امتناني لله تعالى على توفيقه لي في إنجاز هذا البحث، فله الحمد والثناء

كما يسرني ان اتقدم بالشكر الجزيل والثناء الجميل الى مشرفي

الدكتورة (تغريد عبد الكريم)

التي كان لها اثر طيب في انجاز البحث ولولا خبرتها التي لا تقدر بثمن في صياغة أهم مواضيع البحث ومنهجيته، لقد ساهمت ملاحظاتها الثاقبة في تطوير أفكاري ورفع مستوى عملي إلى آفاق جديدة، فجزاها الله خير جزاء المحسنين .

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع اساتذتي في قسم الرياضـيات

كلية التربية / جامعة ميسان

الباحث

محمد حسن شنين

الاهداء

الى من استنشق الوجود ذرات حبه ورحمته .... (الرحمن ربي)

الى من اذهب الله عنهم الرجس وطهرهم تطهير ...... (النبي وآله)

الى ملاكنا في الحياة ... الى معنى الحب والحنان

الى اجمل ابتسامات في الحياة ...... الى اروع النساء في الوجود

إلى من كان دعائهن سر نجاحنا وحنانهن بلسم جراحنا .... (أمهاتنا الغاليات)

الى من كللهم الله بالهيبة والوقار .... الى من علمونا العطاء دون انتظار

الى من نحمل أسمائهم بكل فخر.........(أبائنا الأعزاء)

الى من نشد بهم ازرنا عنوان المحبة .... (أخوتنا واصدقائنا)

الى صانعي الاجيال وبناة المجتمع ومنبع العطاء .... (أساتذتنا الأفاضل)

نهدي هذا الجهد المتواضع

خلاصة

نتناول في هذا البحث ثلاثة فصول, في الفصل الأول ، تكلمنا عن تعريف وجبر كثيرات الحدود ومعاملات وقابلية القسمة وعدم قابلية الاختزال والتحليل ونظرية البواقي لكثيرات الحدود , واما الفصل الثاني يتم تقديم مقدمة الى كثيرات الحدود لبرنشتاين وبعد ذلك تتم دراسة اهم خصائص كثيرات حدود برنشتاين وكونها تعريفا تكراريا لكثيرات حدود برنشتاين هي : رفع الدرجة , وتشكيل كثيرات حدود برنشتاين تقسيما للوحدة , والتحويل من اساس برنشتاين الى اساس الاس , وان كثيرات حدود برنشتاين جميعها غير سالبة , والمشتقات , وتمثيل مصفوفي لكثيرات حدود برنشتاين .

اما الفصل الثالث فيحتوي على اثباتات متعددات حدود برنشتاين وامثلة حول كثيرات الحدود .

فهرست المحتويات

م/ مقدمة [1]

بدأت دراسة أساس كثيرات حدود برنشتاين باستعراض التقدم التاريخي والوضع المعاصر للنظرية والخوارزميات وتطبيق طريقة كثيرات الحدود للمجالات المحدودة. قدّمها في البداية س. ن. برنشتاين لتسهيل إثبات مبرهنة تقريب فايرستراس، إلا أن معدل التقارب البطيء لتقريبات كثيرات حدود برنشتاين للدوال المتصلة أدى إلى اختفائها، حتى ظهور الحواسيب الرقمية.

بدأت صيغة برنشتاين تحظى بالاستخدام الشائع كوسيلة متعددة الجوانب لإنشاء الأشكال الهندسية والعمل عليها بشكل بديهي. وفي الوقت نفسه، شجعت على تطوير النظريات الأساسية، وتحديد خصائصها الممتازة في الاستقرار العددي، وتنوع تطبيقاتها بشكل متزايد، وخوارزميات تكرارية بسيطة وفعالة، مع السعي إلى الاستفادة من قوة الحواسيب في تطبيقات التصميم الهندسي.

قدم كارل فايرستراس أول برهان لنظريته (الأساسية) في التقريب باستخدام كثيرات الحدود الجبرية والمثلثية عام ١٨٨٥. كان هذا البرهان مهمًا لتطوير نظرية التقريب. كان البرهان طويلًا ومعقدًا، وقاد نخبة من علماء الرياضيات إلى إيجاد براهين أبسط وأكثر فائدة. في عام ١٩١٢، صاغ عالم الرياضيات الروسي سيرجي ن. بيرنشتاين متوالية من كثيرات الحدود، وهي:

كثيرات حدود بيرنشتاين:

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-x)^{n-k}$$

(1.0.1)

لأي قيمة $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ و $n \in N$

الفصل الاول

متعددات الحدود

(1-1) تعريف وجبر كثيرات الحدود [2]

المجموعات التي نتناولها في هذا الفصل هي مجموعات كثيرات الحدود في المتغير x. كثيرة الحدود النموذجية هي $a^n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$، حيث تُسمى الأعداد مثل $a_n,a_{n-1},\ldots, a_0$ معاملات، وإذا كانت $a_n\neq 0$، فإن n هي درجة كثيرة الحدود. سيكون معظم هذا العمل مألوفًا للطالب من الجبر الابتدائي، وقد يبدو الكثير منه بديهيًا: تكمن أهميته مرة أخرى في أننا نطبق قواعد جبرية عادية على مجموعات أخرى غير مجموعات الأعداد، حيث أن عناصرنا هنا هي كثيرات الحدود. ومن الأهمية بمكان في هذا الفصل أننا سنكتشف أن جبر كثيرات الحدود لدينا مشابه جدًا لجبر الأعداد الصحيحة، وبالتالي يمكن تطبيق العديد من عمليات الفصل الرابع.

قد تكون معاملات كثيرة الحدود عناصر من مجموعات متنوعة: سنعتبرها حاليًا أعدادًا حقيقية.

يمكن تفسير "x" في كثيرة الحدود $P(x)\equiv a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a$ بطريقتين. في الأعمال البسيطة، عادةً ما نعتبرها رمزًا لعدد ما، وإدراجها في p(x) يعطي P قيمة عددية، مما يجعل p(x) "دالة كثيرة حدود" لـ x. إذا كان لعديدين حدوديين نفس القيمة لقيمة ما x، نقول إن (P(x) = Q(x)، باستخدام علامة التساوي. مع تقدمنا في الجبر، نبدأ في التفكير في كثيرة الحدود كعنصر قائم بذاته، حيث يصبح x مجرد رمز قيمته غير مهمة. تكون كثيرتا حدود متماثلتين فقط إذا كانت معاملاتهما متطابقة، فنكتب P(x) = Q(x) بعلامة التماثل، و(P(x), Q(x) لهما نفس القيمة إذا أعطينا x أي قيمة عددية. بما أن اهتمامنا منصبّ بشكل رئيسي على كثيرة الحدود كعنصر من عناصر المجموعة، فإن النهج الثاني من النهجين المذكورين أعلاه سيكون النهج الذي نعتمده في معظم أعمالنا. "x"، وهو رمز يمكن استبداله بأي رمز آخر أو حتى حذفه في

في ظروف معينة، تُسمى غير محددة. تُكتب كثيرات الحدود بأحرف كبيرة، وغالبًا ما يُحذف x غير المحدد، ولذلك تُكتب عناصر كثيرات الحدود لدينا على النحو التالي:...,P ,Q إذا كانت P و Q متطابقتين، فسنقول إن $P = Q$, باستخدام علامة التساوي بدلًا من علامة المطابقة للتسهيل. هذا لا يُسبب أي لبس، بشرط أن نفسر $P = Q$ بمعنى أن P هي نفس كثيرة الحدود Q، وليس أن P و Q لهما نفس القيمة.

يمكننا جمع أو طرح أو ضرب كثيرات الحدود بالطريقة المعتادة. وبالتالي، إذا كانت

$$P \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n ,$$

$$Q \equiv b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m , \quad \text{حيث } m < n$$

يكون لدينا

$$P \pm Q \equiv (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \ldots + (a_m \pm b)x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n ,$$

$$PQ \equiv a_0 b_0 + (a_o b_1 + a_1 b_o)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 + b_0)x^2 + \ldots + a_n b_m x^{m+n} .$$

(1-2) التعريف المجرد لكثيرات الحدود [2]

بدلاً من الاعتماد على معرفتنا السابقة بالجبر الابتدائي، من المفيد أن يكون لدينا تعريف تجريدي تمامًا لكثيرات الحدود من حيث المعاملات، وأن نُعرّف عمليات الجبر من خلال هذا التعريف. يمكننا حينها إثبات القوانين الأساسية للجبر مباشرةً من خلال التعريف، متجنبين أي مفاهيم بديهية لما يجب أن يكون صحيحًا. عندما نصيغ التعريف، يكون لدينا، بالطبع، في أذهاننا العمل الابتدائي، لكن التجريد يجعل العمل مستقلاً عنه نظريًا.

نُعرّف كثيرة الحدود P بأنها مجموعة المعاملات المرتبة $(a_0 , a_1 ,\ldots)$، حيث كل a، بعد واحد معين، يساوي صفرًا. قد تنتمي a_i إلى مجموعات متنوعة، لكنها في الوقت الحالي أعداد حقيقية. من الأنسب أخذ مجموعة المعاملات اللانهائية، بحيث يكون جميعها صفرًا باستثناء عدد محدود. إذا كان آخر a غير صفر هو a_n هو a_i، فإن n هي درجة كثيرة الحدود، وتُكتب d(P). (من المتعارف عليه أن

$d(0,0,0,\ldots) = -\infty$)

إذا كانت $p = (a_i)$ و $Q = (b_i)$ تساويان نعرف p+Q (a_i+b_i) و p-Q بانها $(a_i - b_i)$

تُعرّف PQ بأنها (c_i) حيث =

$$c_i = \sum_{r+s=i} a_r\, b_s \,. \qquad (1)$$

(1-3) جبر كثيرات الحدود [2]

نبحث الآن في مدى قابلية تطبيق القوانين الأساسية العادية للجبر على كثيرات الحدود. في معالجة دقيقة، ستُثبت ذلك من التعريف المجرد أعلاه، ولكننا هنا سنكتفي بالإشارة إلى النتائج، وهي جميعها فورية إلى حد ما، إما بشكل تجريدي أو باستخدام أفكار بديهية.

الجمع إبدالي وتجميعي.

الطرح. كثيرة الحدود (0,0,...) لا تُغير أي كثيرة حدود أخرى عند إضافتها إليها. نُسمي هذا كثيرة الحدود الصفرية. سالب $P = (a_i)$ هو $-P = (-a_i)$ وله خاصية أنه عند إضافته إلى P يعطي صفرًا.

$P-Q=P + (-Q)$. ينطبق قانون الإلغاء: $P + Q = P + R \Rightarrow Q = R$.

الضرب. وهو أيضًا عملية تبديلية وتجميعية، وقوانين التوزيع تنطبق. كثير الحدود (1,0,0,...) له خاصية أنه عند ضربه في P، فإنه لا يغير P، ويُسمى واحدًا.

مبرهنة (1-1). كثيرات الحدود ليس لها قواسم صفرية، أي أن Q=0 او p=0 اما $PQ = 0 \Rightarrow$

افترض أن P و Q ليسا صفرًا. إذا كان $b = (a_i), Q = (b_i)$ و $d(p) = n, d(Q) = m, a_n$ و b_m

ليسا صفرًا. لكن $PQ = (c_i)$ حيث $c_{m+n} = a_n b_m \neq 0$، وبالتالي $PQ \neq 0$.

النتيجة المترتبة. $d(PQ) = n+m$.

مبرهنة (1-2) . قانون الإلغاء للضرب صحيح في كثيرات الحدود، أي $PQ= PR\Rightarrow Q=R$ بشرط أن يكون $P \neq 0$.

بالنسبة لـ $P(Q-R)=0$. $PQ-PR=0$، ، وبالتالي، وفقًا للمبرهنة 7.1.1، إما $P=0$ أو $Q-R=0$. وبالتالي، إذا كان $P\neq0$، فإن $Q = R$.

القسمة. هذا ليس ممكنًا دائمًا، أي أن $PX= Q$ ليس له حل دائمًا، مع أنه قد يكون له حل في بعض الحالات.

لا يمكن أن يكون هناك أكثر من حل واحد وفقًا لقانون الإلغاء، إلا إذا كان $p = Q = 0$.

مثال: إذا كانت $P\equiv1+x$ و $Q\equiv1+x^2$، فلا يوجد حل، بينما إذا كانت $Q\equiv1-x^2$، يكون الحل الوحيد

$X \equiv 1- x$.

الترتيب والاستقراء: لا توجد طريقة بسيطة لترتيب مجموعة كثيرات الحدود، والاستقراء المباشر غير ممكن. يمكننا استخدام الاستقراء المعدل على الدرجة، أي نفترض أن النتيجة صحيحة لجميع كثيرات الحدود من الدرجة k، ثم نستنتجها لجميع كثيرات الحدود من الدرجة $k + 1$.

باختصار، نرى أن كثيرات الحدود يمكن جمعها وطرحها وضربها، وأن الواحد واحد، ولا يوجد قواسم صفرية. القسمة ليست ممكنة دائمًا. هذه هي الخصائص الأساسية لمجموعة الأعداد الصحيحة (باستثناء أن الأخيرة مرتبة)، وبالتالي نتوقع أن تشترك مجموعة كثيرات الحدود في العديد من الخصائص مع الأعداد الصحيحة. وهذا صحيح، وسيكون هذا الفصل مشابهًا في جزء كبير منه للفصل الرابع. ينبغي على القارئ دراسة أوجه التشابه والاختلاف بعناية، وملاحظة كيفية اعتمادها على القوانين الأساسية الكامنة. تُشكل كلتا المجموعتين ما يُسمى "المجال التكاملي".

(1-4) معاملات كثيرة الحدود [2]

على الرغم من أننا اعتبرنا في القسم السابق المعاملات a_i أعدادًا حقيقية، إلا أن هذا ليس ضروريًا بأي حال من الأحوال. لكي يسمح التعريف المجرد المقدم بالجمع والطرح والضرب، يكفي أن تكون المعاملات عناصر مجموعة تكون هذه العمليات ممكنة ضمنها. المجموعات الممكنة هي الأعداد الصحيحة، أو الأعداد الكسرية، أو الأعداد الحقيقية، أو الأعداد المركبة، أو فئات البقايا مقاس أي عدد صحيح. اعتمد إثبات النظرية 7.1.1 على أن $a_n\neq 0$ و $b_m\neq0 \Rightarrow a_n b_m \neq 0$، أي أن المجموعة التي تقع فيها المعاملات ليس لها قواسم صفرية. وبالتالي، إذا لم يكن لمجموعة المعاملات قواسم صفرية، فلن يكون لمجموعة كثيرات الحدود عليها أيضًا قواسم صفرية. ولكن حتى لو كانت مجموعة المعاملات قابلة للقسمة (مثل الأعداد الحقيقية)، فإن مجموعة كثيرات الحدود لن تكون كذلك دائمًا. علاوة على ذلك، ستكون مجموعة كثيرات الحدود دائمًا غير محدودة، حتى عندما تُشكل المعاملات مجموعة منتهية.

سنرى أنه من المهم تحديد المجموعة التي يجب أن تنتمي إليها المعاملات. إذا كانت مجموعة المعاملات هي A، فإننا نتحدث عن كثيرات الحدود "على المجموعة A".

لاحظ أن مجموعة كثيرات الحدود تحتوي دائمًا على مجموعة جزئية تتصرف مثل مجموعة المعاملات، وهي جميع كثيرات الحدود من الدرجة 0.

(1-5) قابلية القسمة وعدم قابلية الاختزال. [2]

كان من أهم المواضيع في دراستنا للأعداد الصحيحة قابلية القسمة والأعداد الأولية. وينطبق الأمر نفسه على كثيرات الحدود، وتعريفاتها متشابهة.

يُعتبر Q عاملًا لـ P إذا وُجدت كثيرة حدود R بحيث يكون P=QR. نقول إن P قابل للقسمة على Q أو أنه من مضاعفات Q. هذا يعني بالطبع أنه يمكننا قسمة P على Q. (لا P ولا Q يساوي صفرًا). نكتب Q/P.

يُسمى عامل الواحد 1 اسم وحده (ميّز بدقة بين الواحد والوحده). بالنسبة لمجموعة الأعداد الصحيحة، كانت الآحاد الوحيدة هي 1 و1-، ولكن بالنسبة لكثيرات الحدود، قد يكون هناك أكثر من ذلك.

مبرهنة (1-3) : إذا لم يكن للمعاملات قواسم صفرية، بحيث يكون $d(PQ) = d(P)+d(Q)$

(i) يجب أن تكون الوحدة من الدرجة صفر.

(ii) تتوافق الوحدات مع الوحدات في مجموعة المعاملات. وبالتالي، تكون كثيرة الحدود

U ((i.e.(u, 0,...)) وحدة إذا وفقط إذا كان العدد u وحدة في مجموعة المعاملات.

(i) إذا كانت U وحدة، فإن R موجودة بحيث يكون UR= 1. وبالتالي،

$d(U)+d(R) = d(UR) = 0$ و $d(R) \geq 0$. وبالتالي، $d(U) = 0$.

(ii) إذا كانت (u, 0,...) وحدة، فيجب أن تكون R أيضًا وحدة، وبالتالي تكون درجتها 0. ليكن

R= (r, 0,...). عندئذٍ 1=ur، وبالتالي تكون u وحدة في مجموعة المعاملات. على العكس من ذلك، إذا كانت u وحدة من مجموعة المعاملات، فإن ur = 1. وبالتالي، فإن U= (u, 0 ,...) وحدة من مجموعة كثيرات الحدود، لأنه إذا كانت UR = 1 (r, 0 ,...) = R .

بموجب النظرية أعلاه، نرى أنه في مجموعة كثيرات الحدود على الأعداد الحقيقية، فإن أي كثيرة حدود من الدرجة 0، أي أي ثابت، هي وحدة (باستثناء 0 نفسه، الذي يُستبعد دائمًا). وبالمثل، بالنسبة لكثيرات الحدود على الأعداد المركبة، وتلك على الأعداد الكسرية. بالنسبة لكثيرات الحدود على الأعداد الصحيحة، فإن الوحدات الوحيدة هي 1 و-1.

تتضح أهمية الوحدات من خلال النظريات التالية.

مبرهنة (1-4) : إذا كان Q عاملًا لـ P وكان U وحدة، فإن UQ عامل لـ P.

يوجد 'U بحيث $UU' = 1$. ويوجد R بحيث $P=QR$. وبالتالي، $P = UU'QR = (UQ)(U'R)$، وبالتالي UQ عامل لـ P.

مبرهنة (1-5) : إذا كانت U وحدة، فهي عامل لجميع كثيرات الحدود P.

فإذا كانت $UU' = 1, P=(UP)$ و U فانها عامل لـ P.

سنتناول قريبًا الأعداد الأولية وتحليلها إلى عواملها الأولية. يتضح من المبرهنات السابقة أنه يجب تجاهل الآحاد كعوامل محتملة، وأن فرادة التحليل إلى عواملها يجب ألا تأخذ في الاعتبار أيضًا عوامل الوحدة المحتملة. سنستخدم، إن صح التعبير، وحدات مقاس. (كما هو الحال في البقايا، نستخدم وحدات مقاس n ، متجاهلين مضاعفات n). كانت هذه التقنية نفسها ضرورية مع الأعداد الصحيحة، وإن كانت غير واضحة بسبب ندرة الآحاد. الأعداد الصحيحة الوحدوية الوحيدة هي 1 و-1، وتجاهلهما يعني عمليًا أننا نتعامل دائمًا مع الأعداد الأولية الموجبة عند التحليل إلى عوامل، ونكتفي بوضع علامة

'-' أمامها عند تحليل عدد صحيح سالب إلى عوامل.

أمثلة: $x+1$ كثيرة حدود أولية، أي ليس لها عوامل بالمعنى التقليدي للكلمة. ولكن بالطبع، أي عدد حقيقي λ هو عامل، لأن $\lambda\ [(1/\lambda)x+(1/\lambda)] = x+1$. ومع ذلك، λ هي وحدة، وبالتالي فإن $x+1$ لا يزال أوليًا عند حساب وحدات القياس.

للعدد x^2-1 عاملان فريدان $x+1$ و$x-1$، لكنهما لا يكونان فريدين إلا إذا تجاهلنا الضرب في وحدات، لأن $\lambda(x+1)$ و $(x-1)(1/\lambda)$ هما أيضًا زوج من العوامل.

العوامل المرتبطة. إذا كانت U وحدة، فإن كثيرتي الحدود P وUP تُسميان عوامل مرتبطة، ولا يتغير التحليل إلى عوامل إذا استبدلنا عاملًا بأي عامل مرتبط (ربما مع تعديل عوامل أخرى).

مبرهنة (1-6) . علاقة الارتباط هي علاقة تكافؤ.

انعكاسية.$P = 1. P$ وحدة.

متماثلة. إذا كانت $P=UQ$ وU' بحيث $UU' = 1$، فإن $U'P=UU'Q = Q$.

متعدية. إذا كانت $P=UQ$ و$Q=VR$ ، فإن $P = UVR$. لكن UV وحدة. لأنه إذا كانت $UU'= VV' = 1$، فإن $UU'VV' = (UV)(U'V') = 1$.

وبالتالي، تنقسم مجموعة كثيرات الحدود لدينا إلى فئات تكافؤ، أي عنصرين من نفس الفئة يكونان مرتبطين. إذا كانت Q هي a

عامل P، فإن أي عنصر من الفئة التي تحتوي على Q يكون كذلك. (وبالطبع، Q عامل لأي عنصر من الفئة التي تحتوي على P، لأن Q يجب أن يقسم UP أيًا كانت قيمة U، وبالتالي، خاصةً عندما تكون U وحدة).

في كثيرات الحدود على الأعداد الحقيقية أو النسبية أو المركبة، تكون عناصر الفئة التي تحتوي على P مجرد $\{\lambda P\}$ لأي λ غير صفري في مجموعة المعاملات.

عدم القابلية للاختزال

تُسمى كثيرة الحدود التي لها خاصية مشابهة للعدد الأولي غير قابلة للاختزال. أي كثيرة حدود لها قواسم أي وحدة وأي مُرافق. أما التي ليس لها قواسم سوى هذه، فتُسمى غير قابلة للاختزال.

لاحظ أنه من المهم تحديد المجموعة التي تنتمي إليها المعاملات. وبالتالي، فإن x^2-2 غير قابلة للاختزال على المعاملات النسبية، ولكنها ليست غير قابلة للاختزال على المعاملات الحقيقية، لأنه في الحالة الأخيرة يمكن تحليلها إلى $(x-\sqrt{2})\ (x + \sqrt{2})$. وبالمثل، فإن $x^2 + 1$ غير قابلة للاختزال على كل من الأعداد النسبية والحقيقية، ولكن ليس على مجموعة الأعداد المركبة.

تُعرف العوامل المرتبطة والوحدات أحيانًا بالعوامل التافهة، وأي عوامل أخرى غير تافهة؛ وبالتالي فإن كثيرة الحدود غير قابلة للاختزال إذا لم يكن لديها عوامل غير تافهة. في حالة قبول مجموعة المعاملات للقسمة (مثل الأعداد النسبية، أو الأعداد الحقيقية، أو الأعداد المركبة، وما إلى ذلك، ولكن ليس الأعداد الصحيحة)، يجب أن يكون أي عامل غير تافه وغير t من الدرجة أكبر من 0 وأقل من درجة كثيرة الحدود، لأن أي عامل من الدرجة 0 هو وحدة. لا يلزم أن يكون الأمر كذلك إذا كانت مجموعة المعاملات لا تقبل القسمة؛ وبالتالي، فإن $x+1$ هو عامل غير بديهي لـ $3x+3$ على الأعداد الصحيحة، كما هو الحال مع العدد 3 نفسه، لأن أياً منهما ليس وحدة أو مُرافقًا في هذه المجموعة.

مبرهنة (1-7) . كثيرات الحدود غير القابلة للاختزال على الأعداد المركبة هي جميع تلك من الدرجة الأولى.

بموجب المبرهنة الأساسية في الجبر، يمكن تحليل أي كثيرة حدود من الدرجة الأكبر من واحد. تلك التي من الدرجة 0 هي وحدات، بينما عوامل تلك التي من الدرجة 1 الوحيدة هي إما وحدات أو مُرافقات.

مبرهنة (1-8) . في مجموعة كثيرات الحدود على الأعداد الحقيقية، جميع تلك التي من الدرجة 1 غير قابلة للاختزال، بينما العوامل الأخرى الوحيدة غير القابلة للاختزال هي من الدرجة 2.

أي عامل في متعددة حدود من الدرجة الأولى هو وحدة أو مُرافق. بما أن الجذور المركبة لمعادلة متعددة حدود ذات معاملات حقيقية تظهر في أزواج مُترافقة، يُمكن تحليل أي كثيرة حدود من هذا القبيل إلى حاصل ضرب عوامل خطية وتربيعية. وبالتالي، فإن العوامل غير القابلة للاختزال هي الوحيدة التي لها الدرجة 1 أو 2. بالطبع، ليست جميع العوامل من الدرجة 2 غير قابلة للاختزال - في الواقع،

$ax^2 + bx + c$ تكون غير قابلة للاختزال إذا وفقط إذا كانت $4ac > b^2$.

لا توجد طريقة سهلة لتحديد ما إذا كانت كثيرة حدود على الأعداد الكسرية أو الصحيحة غير قابلة للاختزال أم لا. سنتناول هذه المسألة بمزيد من التفصيل في الفقرة 7.8 § .

مبرهنة (1-9) : إذا كان Q عاملًا في P و P عاملًا في Q، فإن P و Q مُرافقان.

$P=QR$ و $Q=PS$ لبعض قيم R و S. وبالتالي، $P = PRS$، وبالتالي وفقًا لقانون الإلغاء $RS= 1$. وبالتالي، R و S هما وحدتان، وبالتالي P و Q هما مجموعتان.

(1-6) أكبر عامل مشترك [2]

كما فعلنا مع الأعداد الصحيحة، نواصل دراستنا لكثيرات الحدود من خلال دراسة العامل المشترك الأكبر (H.C.F) لاثنين أو أكثر، مما يؤدي إلى دراسة التحليل إلى عوامل أولية. ستكون هذه العملية مشابهة جدًا لتلك المذكورة في الفصل 4.

تنطبق هنا الملاحظة الواردة في بداية الفقرة 4.5 § حول الحاجة إلى نهج متقن إلى حد ما. قد يعتقد القارئ أن أفضل طريقة لإيجاد العامل المشترك الأكبر (H.C.F) هي تحليل كل كثيرة حدود إلى عوامل واختيار جميع العوامل المشتركة، وبالطبع في العديد من الأمثلة الخاصة، تُعد هذه أسهل طريقة. ولكن بصرف النظر عن حقيقة أن تفرد التحليل إلى عوامل أولية لم يُثبت بعد، فليس من السهل دائمًا إيجاد التحليل إلى عوامل باستخدام طرق خاصة. في حالة كثيرات الحدود على الأعداد المركبة أو الحقيقية، نعلم أنه من الناحية النظرية يمكننا دائمًا التحليل إلى عوامل غير قابلة للاختزال من الدرجة الأولى أو الثانية، ولكن بالنسبة لكثيرات الحدود من الدرجة العليا (5 فما فوق)، لا توجد طريقة عامة لإيجاد العوامل. أما بالنسبة لكثيرات الحدود على الأعداد النسبية، فالوضع أسوأ، إذ ليس من السهل دائمًا اكتشاف ما إذا كان عامل معين غير قابل للاختزال أم لا، وبالتالي ليس لدينا ضمان بأن التحليل إلى عوامل الذي توصلنا إليه هو التحليل النهائي.

تتجنب هذه الطريقة مشكلة تحليل كثيرات الحدود المعطاة إلى عوامل لإيجاد معاملها الأكبر (H.C.F). سنثبت لاحقًا أن التحليل إلى عوامل أولية فريد، ولكننا لن نمتلك طريقة عامة لإيجاد العوامل الفعلية.

يعتمد عمل هذا القسم والقسم التالي على إمكانية القسمة ضمن مجموعة المعاملات. تُسمى المجموعة التي تكون فيها عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة ممكنة وفقًا للقواعد المعتادة "حقلًا"، وينطبق عملنا على أي مجال. وبالتالي، ينطبق هذا على المعاملات في مجال الأعداد الكسرية أو الحقيقية أو المركبة، ولكن ليس على تلك الموجودة في مجموعة الأعداد الصحيحة. كما ينطبق على المعاملات في مجموعة البقايا مقاس بالنسبة لعدد أولي، ولكن ليس بالنسبة لعدد مركب. قد يرغب القارئ في اعتبار المعاملات أعدادًا حقيقية، للتبسيط، ولكن يجب عليه ملاحظة أن أي خصائص لمجموعة المعاملات التي يستخدمها تنطبق على المجالات الأخرى أيضًا.

التعريف كثيرة الحدود H هي معامل ارتباط كبير وحيد (H.C.F) لكثيرتي الحدود A وB (غير صفرية) إذا:

(i) H/A وH/B، أي أن H عامل لكل من A وB؛

(ii) إذا كانت C/A وC/B، فإن C/H، أي أن أي عامل مشترك لـ A وB هو عامل لـ H.

مبرهنة (10-1) : معامل ارتباط كبير وحيد (H.C.F) فريد ضمن فئة من الحدود المرتبطة. إذا كانت H و'H كلاهما معامل ارتباط كبير وحيد (H.C.F) لكثيرتي الحدود A وB، فإنهما عاملان مشتركان بموجب (i)، وبالتالي بموجب (ii) يكون لدينا H/H' وH'/H. والنتيجة تتبعها المبرهنة 7.3.7.

تُظهر الخوارزمية الإقليدية وجود معامل ارتباط كبير وحيد (H.C.F) كما سبق.

مبرهنة (1-11) : خوارزمية القسمة لكثيرات الحدود. إذا كانت أي كثيرتي حدود A وB، $B\neq 0$، فعندئذٍ توجد كثيرتا حدود Q وR فريدتان بحيث يكون $A=BQ+R$ ويكون $d(R) < d(B)$. (قد يكون R صفرًا).

يُعطي هذا بيانًا رسميًا لعملية القسمة المعتادة للحصول على حاصل القسمة Q والباقي R.

لإثبات وجود Q وR، نستخدم الاستقراء، ونفترض أن النتيجة صحيحة لجميع كثيرات الحدود من الدرجة الأقل من A، أي إذا كانت درجة 'A أقل من $d(A)$ ، فإن 'Q و'R موجودتان، $(d(R) < d(B)$ بحيث يكون $A'=Q'B+R'$.

إذا كانت $(d(A) < d(B)$، فإن النتيجة تكون بديهية، مع $Q=0$. لنفترض إذن أن $(d(A) \geq d(B)$. لنفترض أن $A \equiv a_n x^n + \dots$ و $B \equiv b_m x^m + \dots,$ ولنأخذ كثيرة الحدود $A' \equiv A-(a_n/b_m)x^{n-m} B$. عندها تكون درجة $(n-1)$ 'A على الأكثر، أي أقل من $d(A)$ ، وبالتالي، وفقًا للفرضية الاستقرائية، يمكننا إيجاد

'Q و'R، $d(R') < d(B)$ ، بحيث يكون $A'=Q'B+R'$. وبالتالي، $A=QB+R$ حيث

$Q = Q'+(a_n/b_m)x^{n-m}$ و$R = R'$،

بحيث يكون $d(R) < d(B)$ كما هو مطلوب. النتيجة صحيحة $d(A) < d(B)$.

وبالتالي، يمكن بدء الاستقراء. وبالتالي، يكون صحيحًا بشكل عام. لإثبات التفرد، افترض أن $A=BQ+R$ و$A=BQ'+R'$ مع كون $d(R)$ و$d(R')$ كلاهما $> d(B)$. عندها، $B(Q-Q)=R-R'$.

لكن درجة الطرف الأيسر $d(B)+d(Q-Q') \geq d(B)$ و$d(R-R') < d(B)$. وبالتالي، كلا الطرفين يساوي 0، وبالتالي، $Q = Q'$ و$R = R'$.

في الدليل السابق، نحتاج إلى حقيقة أن مجموعة المعاملات يجب أن تكون قابلة للقسمة، لأنه عند تكوين 'A، نحتاج إلى تكوين النسبة a_n/b_m.

لإيجاد Q وR، نستخدم عملية القسمة المألوفة، والتي تُوجد 'A، وتُكرر لإيجاد "A وهكذا.

خوارزمية إقليدس لكثيرات الحدود. لإيجاد معامل التكافؤ الأكبر (H.C.F) لـ A وB. باستخدام خوارزمية القسمة، يمكننا إيجاد Q_1 وR_1 بحيث:

$A=BQ_1+R_1$ مع $d(R_1) < d(B)$.

وبالمثل، نكمل سلسلة المعادلات

$A = BQ_1 + R_1$

$B = R_1Q_2 + R_2$

$R_1 = R_2 Q_2 + R_3$

....

$R_{n-2} = R_{n-1} Q_n + R_n$

$R_{n-1} = R_n Q_{n+1}$

حيث ... < $d(B) > d(R_1) > d(R_2)$ وبالتالي يجب أن تنتهي السلسلة بعد... على الأكثر $d(B) + 1$ خطوات.

إذن، R_n هي متعددة حدود رئيسية وحيدة لـ A وB، والبرهان مطابق تمامًا للفقرة §4.5.

وبالتالي، لكل متعددتي حدود متعددتي حدود فريد وحيد ضمن حدودهما المشتركة. نسمي متعددة الحدود ضمن هذه الفئة من الحدود التي لها معامل رئيسي واحد، متعددة الحدود الرئيسية، ونكتبها على النحو التالي: (A, B). إذا كانت متعددة الحدود الرئيسية تساوي 1، نقول إن A وB عددان أوليان مشتركان.

مبرهنة (1-12) : إذا كان H= (A, B) ، فإن هناك كثيرتي حدود S وT بحيث يكون H=SA+TB.

مثبتة كما في المبرهنة 4.5.3.

النتيجة (1-13) : إذا كان A وB عددان أوليان مشتركان، فإن هناك كثيرتي حدود S وT بحيث يكون 1=SA+TB

متعددة الحدود الرئيسية يمكن تعريف وإيجاد أكثر من كثيرتي حدود كما في الفقرة §4.5.

(1-7) تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية [2]

سنثبت هنا أن أي كثيرة حدود ذات معاملات في مجال ما يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب كثيرات حدود غير قابلة للاختزال في ذلك المجال، وأن ذلك يمكن إجراؤه بطريقة واحدة فقط. بالنسبة لكثيرات الحدود في المجال المركب، تكون جميع العوامل خطية، وبالنسبة لكثيرات الحدود في المجال الحقيقي، تكون خطية أو تربيعية، بينما بالنسبة للمعاملات في المجال الكسري، قد تكون بدرجات مختلفة. تجدر الإشارة إلى أن نظرياتنا لا تُعطينا طريقة فعلية لإيجاد العوامل. فخاصية التحليل إلى عواملها لا تعمل إلا بمعاملات وحدات ووحدات.

مبرهنة (1-14) . إذا كانت P غير قابلة للاختزال وP/AB، فإما P/A أو P/B. مُثبتة كما في المبرهنة 4.6.1.

مبرهنة (1-15) . نظرية التحليل إلى عواملها الفريدة.

يمكن التعبير عن أي كثيرة حدود ذات معاملات في مجال ما بالشكل $cP_1P_2...P_n$، حيث $P_1,P_2,...,P_n$ حدود غير قابلة للاختزال، وc ثابت، وهذه العبارة فريدة باستثناء ترتيب العوامل، بمعامل الارتباط.

نثبت ذلك كما في النظرية 4.6.2، باستخدام 7.5.1 أعلاه، باستخدام الاستقراء على درجة كثيرة الحدود في جزء الاحتمالية من الإثبات، وفي جزء التفرد، مع ملاحظة أنه يمكن استبدال أي عامل بعامل ارتباط مع تعديل مماثل للوحدة c.

أصغر مضاعف مشترك

هذا العمل مشابه تمامًا للمعادلة §4.7، مع تعديلات واضحة لمراعاة المشتقات.

(1-8) أصفار كثيرة الحدود: نظرية الباقي [2]

بالنسبة لكثيرة حدود P(x) ذات معاملات في أي مجموعة تقبل الجمع والطرح والضرب، يمكننا استبدال x بأي عنصر عددي c في مجموعة المعاملات. وهكذا، تصبح كثيرة الحدود دالة على هذه المجموعة، ونكتب قيمتها (التي ستكون بدورها عنصرًا من عناصر المجموعة) على أنها P(c).

وبالتالي، إذا كان $P(x) \equiv a_0+a_1x+ ... +a_n x^n$

فإن $P(c) = a_0+a_1c + ... +a_n c^n$

يُسمى العنصر c الذي يكون $P(c) = 0$ صفرًا لـ P.

ينطبق ما تبقى من هذا القسم فقط على كثيرات الحدود في حقل، لأنه يعتمد على خوارزمية القسمة. لاحظ أنه لا يمكن أن يكون للحقل قواسم صفرية، لأنه إذا كان $ab = 0$ و$a \neq 0$، فإننا نعلم أن $1/a$ موجود، وبالتالي $b = 0$, i, e, $(1/a)ab = 0$.

مبرهنة (1-16) : نظرية الباقي.

إذا قُسِم $A(x)$ على $(x-c)$، يكون الباقي ثابتًا ويساوي $A(c)$.

طبّق خوارزمية القسمة بحيث يكون $B = x-c$. عندها $d(R) < d(B) = 1$،

وبالتالي R ثابت. عندها $A(x) \equiv (x-c)Q(x) + R$، وهذه بالطبع متطابقة. وبالتالي، بوضع $x \equiv c$ على كلا الطرفين، نحصل على $A(c) = R$.

النتيجة: نظرية العوامل.

$(x-c)$ عامل لـ $A(x)$ إذا وفقط إذا كان $A(c) = 0$، أي إذا وفقط إذا كان c صفرًا لـ $A(x)$.

مبرهنة (1-17) : كثيرة حدود غير صفرية $P(x)$ من الدرجة n تحتوي على n صفر مميز على الأكثر.

(قارن الفقرة §4.3، المثال 2، والنظرية 6.5.1).

البرهان بالاستقراء. نفترض أنه لا توجد كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ تحتوي على أكثر من $n-1$ صفر مميز. ليكن $c_1,c_2,\dots,c_m$

تكون أصفارًا مميزة لـ $P(x)$. بناءً على نظرية العوامل، يكون لـ $P(x)$ عامل $(x-c_1)$، وبالتالي فإن $P(x) \equiv (x-c_1)Q(x)$ حيث تكون $Q(x)$ من الدرجة $n-1$. إذا كانت $i \neq 1$ ، فإن c صفر لـ $P(x)$، وبالتالي فإن $(P(c_i) = 0)$ وبالتالي، $(c_1 - c_i)\, Q(c_i) = 0$ ، وبما أن المعاملات لا تحتوي على قواسم صفرية، فمن الطبيعي، بما أن $ci \neq c_1$، أن $Q(c_i) = 0$ وc_i صفر لـ $Q(x)$. وبالتالي،

فإن $c_2, c_3 \dots c_m$ هما أصفار مميزة لـ $Q(x)$، وبناءً على الفرضية الاستقرائية، يكون لـ $n-1$ $Q(x)$ من هذا النوع على الأكثر. وبالتالي، تكون $m \leq n$ النتيجة صحيحة لـ $P(x)$.

لكن كثيرة الحدود من الدرجة صفر، كونها ثابتة، لا تحتوي على أصفار إلا إذا كانت هي نفسها صفرًا، وبالتالي فإن النتيجة تُتبع بالاستقراء.

النتيجة (1-18).

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وتتلاشى لأكثر من n قيمة مميزة لـ x، فإن $P(x)$ هي كثيرة الحدود الصفرية وتتلاشى لجميع قيم x.

النتيجة (1-19).

إذا كانت $c_1, c_2, \ldots, c_m,$ حيث $m \le n$، أصفارًا مميزة لـ $P(x)$ ،

فإن $P(x)$ يكون لها $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_m)$ عاملًا. بالنسبة إلى $c_2, c_3, \ldots, c_m$ ، هي أصفار لـ $Q(x)$

في إثبات النظرية، والنتيجة تُتبع بالاستقراء.

الفصل الثاني

متعددات حدود برنشتاين

في هذا الفصل، ندرس الخصائص الأساسية لمتعددات حدود برنشتاين.

*خصائص متعددات حدود برنشتاين

(2-1) الخاصية. تعريف تكراري لمتعددات حدود برنشتاين [1]

يمكن استحداث متعددة حدود برنشتاين من الدرجة n بدمج متعددتي حدود برنشتاين من الدرجة $(n-1)^{st}$ مع بعضهما البعض. أي أنه يمكن صياغة متعددة حدود برنشتاين من الدرجة k^{th} من الدرجة n^{th} بالصيغة التالية:

$$B_{k,n}(t) = (1-t)\,B_{k,n-1}(t) + tB_{K-1,n-1}(t)\,.$$

الإثبات: لإثبات ذلك، سنستخدم التعريف الأساسي لمتعددات حدود برنشتاين، والذي يُعطى بالصيغة التالية:

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^{k} (1-t)^{n-k}$$

حيث

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k!(n-k)!}$$

بالنسبة لـ $k = 0,1,\dots n$.

$$(1-t)B_{k,n-1}\,(t)+Tb_{K-1,n-1} = (1-t)\binom{n-1}{k} t^{k}(1-t)^{n-1-k} + t\binom{n-1}{k-1} t^{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)}$$
$$= \binom{n-1}{k} t^{k}(1-t)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} t^{k}(1-t)^{n-k}$$
$$= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] t^{k}(1-t)^{n-k}$$
$$= \binom{n}{k} t^{k}(1-t)^{n-k}$$
$$= B_{k,n}(t)\,.$$

(2-2) الخاصية. جميع كثيرات حدود برنشتاين غير سالبة [1]

$f(t)$ دالة غير سالبة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت $f(t) \geq 0$ بالنسبة لـ $t \in [a,b]$. في هذه الحالة، تكون كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n غير سالبة على الفترة [0.1].

الإثبات: لإثبات ذلك، نستخدم الاستقراء الرياضي مع التعريف التكراري لكثيرات حدود برنشتاين.
يتضح أن الدالتين $B_{1,1}(t) = t$ و $B_{0,1}(t) = 1 - t$ كلاهما غير سالبة على الفترة [0,1]. إذا افترضنا أن جميع كثيرات حدود برنشتاين ذات الدرجة الأقل من k غير سالبة، فيمكننا في الحالة الأخرى استخدام التعريف التكراري لكثيرة حدود برنشتاين، ويُكتب على النحو التالي:

$$B_{n,k}(t) = (1-t)\,B_{n,k-1}(t) + tB_{n-1,k-1}(t)$$

وإثبات أن $B_{n.k}(t)$ غير سالبة أيضًا على الفترة [0,1]، لأن جميع المركبات على الجانب الأيمن من المعادلة هي مركبات غير سالبة على الفترة [0,1]. وبالاستقراء، تكون جميع كثيرات حدود برنشتاين غير سالبة على الفترة [0,1].

في الوقت نفسه، أثبتنا أن كل كثيرة حدود برنشتاين تكون موجبة عند $t\in(0،1)$.

(2-3) الخاصية. تُشكل كثيرات حدود برنشتاين تقسيمًا للوحدة [1]

إذا كان مجموع جميع قيم t يساوي واحدًا، فإن $f_n(t)$ تُسمى وحدة تقسيم. تُشكل كثيرات حدود برنشتاين k+1 من الدرجة k^{th} تقسيمًا للوحدة، حيث إن مجموعها يساوي واحدًا.

البرهان : إذا افترضنا صحة هذا، فمن السهل إظهار حقيقة مختلفة تمامًا لكل k، وهي أن مجموع k+1 من الدرجة k يساوي مجموع k من كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة k-1. أي أن ,

$$\sum_{n=0}^{k} B_{n,k}(t) = \sum_{n=0}^{k} B_{n,k-1}(t).$$

هذه العملية الحسابية واضحة تمامًا، باستخدام التعريف التكراري لكثيرة حدود برنشتاين وإعادة ترتيب المجاميع:

$$\sum_{n=0}^{k} B_{n,k}(t) = \sum_{n=0}^{k} [(1-t) B_{n,k-1}(t) + t B_{n-1,k-1}(t)]$$

$$= (1-t) \left[\sum_{n=0}^{k-1} B_{n,k-1}(t) + B_{k,k-1}(t)\right] + t \left[\sum_{n=1}^{k} B_{n-1,k-1}(t) + B_{-1,k-1}(t)\right]$$

حيث استخدمنا $B_{k-k}-1(t)=B_{-1,k-1}(t) = 0)$

$$= (1-t)\sum_{n=0}^{k-1} B_{n,k-1}(t)+t\sum_{n=1}^{k} B_{n-1,k-1}(t)$$

$$= (1-t)\sum_{n=0}^{k-1} B_{n,k-1}(t)+t\sum_{n=0}^{k-1} B_{n,k-1}(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1} B_{n,k-1}(t) .$$

بمجرد ترسيخ هذه المساواة، يصبح من السهل كتابة

$$\sum_{n=0}^{k} B_{n,k}(t) = \sum_{n=0}^{k-1} B_{n,k-1}(t) = \sum_{n=0}^{k-2} B_{n,k-2}(t) = \ldots = \sum_{n=0}^{1} B_{n,1}(t)=(1-t)+t=1.$$

(2-4) الخاصية رفع الدرجة [1]

يمكن تعريف أيٍّ من كثيرات حدود برنشتاين ذات الدرجة الأدنى من n بأنها تركيبة خطية من n^{th} من كثيرات حدود برنشتاين ذات الدرجة. في هذه الحالة، يمكن كتابة أي كثيرة حدود برنشتاين من الدرجة $(n-1)^{th}$ كتركيب خطي من كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n^{th}.

البرهان: أولًا، نلاحظ أن

$$tB_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-k}$$

$$=\binom{n}{k} t^{k+1} (1-t)^{(n+1)-(k+1)}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} B_{k+1,n+1}(t)$$

$$= \frac{k+1}{n+1} B_{k+1,n+1}(t)$$

و

$$(1-t)B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}} B_{k,n+1}(t)$$

$$= \frac{n-k+1}{n+1} B_{k,n+1}(t),$$

وأخيرًا

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} B_{k,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} B_{k+1,n}(t) = t^k (1-t)^{n-k} + t^{k+1} (1-t)^{n-(k+1)}$$

$$= t^k (1-t)^{n-k-1} ((1-t)+t)$$

$$= T^k (1-t)^{n-k-1}$$

$$= \frac{1}{\binom{n-1}{k}} B_{k,n-1}(t) .$$

باستخدام هذه المعادلة النهائية، يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$B_{k,n-1}(t) = \binom{n-1}{k} \left[\frac{1}{\binom{n}{k}} B_{k,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{k+1}} B_{k+1,n}(t)\right]$$

$$= \left(\frac{n-k}{n}\right) B_{k,n}(t) + \left(\frac{k+1}{n}\right) B_{k+1,n}(t)$$

والتي تُعبر عن كثيرة حدود برنشتاين من الدرجة n-1 بدلالة تركيبة خطية من كثيرات حدود برنشتاين من الدرجة n .

(2-5)الخاصية التحويل من أساس برنشتاين إلى أساس الأس [1]

يمكن كتابة أي كثيرة حدود برنشتاين من الدرجة n^{th} بدلالة أساس الأس، المعبر عنه بالمعادلة $\{1, t, t^2, \ldots\ldots t^n\}$.

البرهان : يمكن حساب هذا مباشرةً باستخدام تعريف كثيرات حدود برنشتاين ونظرية ذات الحدين، كما يلي:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-I}$$

$$= \binom{n}{i} t^i \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} t^{k+I}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} t^k$$

$$= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} t^k .$$

(2-6) الخاصية. المشتقات [1]

متعددات الحدود من الدرجة n-1 هي مشتقات من الدرجة n^{th} لكثيرات حدود برنشتاين. كما يمكن كتابة هذه المشتقات كتركيب خطي لكثيرات حدود برنشتاين باستخدام تعريف كثيرات حدود برنشتاين. في هذه الحالة،

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = n\,(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t))$$

ل $0 \le i \le n$. يمكن كتابة هذا عن طريق التمايز المباشر

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = \frac{d}{dt}\binom{n}{i} t^{i}(1-t)^{n-i}$$

$$= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^{i}(1-t)^{n-i-1}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^{i}(1-t)^{n-i-1}$$

$$= n\left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^{i}(1-t)^{n-i-1}\right)$$

$$= n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) .$$

والنتيجة هي أنه يمكن إظهار مشتق متعدد الحدود بيرنشتاين كدرجة متعددة الحدود مضروبة في الفرق بين اثنين $(n-1)^{st}$ من متعدد الحدود بيرنشتاين.

(2-7) الخاصية. تمثيل المصفوفة من متعدد الحدود بيرنشتاين [1]

يمثل تمثيل المصفوفة مفيدًا في متعدد الحدود. يتم إعطاء التواطؤ الخطي لوظائف أساس بيرنشتاين من أجل متعدد الحدود بواسطة

$$B(t) = c_0 B_{0,K}(t) + c_1 B_{1,k}(t) + \ldots + c_k B_{k,k}(t)$$

من السهل كتابة هذا على هيئة حاصل ضرب نقطي لمتجهين

$$= B(t) = [B_{0,k}(t) \;\; B_{1,k}(t) \; . \; . \; . \; B_{k,k}(t)] \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ . \\ . \\ . \\ C_k \end{bmatrix}$$

يمكننا تحويل هذا إلى

$$B(t) = [\, 1 \; t \; t^2 \, . \; . \; . \; t^k \,] \begin{bmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ b_{k,0} & b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_k \end{bmatrix}$$

حيث $b_{m,n}$ هي معاملات أساس القوة المستخدمة لتحديد كثيرات حدود برنشتاين. نلاحظ أن المصفوفة في هذه الحالة هي مصفوفة مثلثية سفلية. على سبيل المثال، يمكننا إعطاء الحالة التربيعية (n=2) مع تعبير المصفوفة

$$B\,(t) = [1 \; t \; t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

سبق أن عرّفنا كثيرات حدود برنشتاين في المعادلة (1.0.1) لكل عدد صحيح موجب n. سيُظهر أنه إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة [0,1]، فإن متوالية حدود برنشتاين تتقارب بانتظام مع الدالة f على الفترة [0,1]، مما يُقدم دليلاً عمليًا على نظرية فايرستراس. لإثبات نظرية فايرستراس، قام برنشتاين بتركيب حدود واردة بدلاً من الحدود المعروفة. على سبيل المثال، لا تُفيد حدود تايلور جميع الدوال المتصلة، بل تُطبق فقط على الدوال القابلة للاشتقاق اللانهائي.

يتضح من المعادلة (1.0.1) أنه لجميع $n \geq 1$،

$$B_n(f;1) = f(1) \text{ و } B_n(f;0) = f(0)\,, \qquad (2.1.1)$$

وبالتالي، فإن كثيرة حدود برنشتاين لـ f تُكمل f عند طرفي الفترة [0,1].

إضافةً إلى ذلك، من مفكوك ذات الحدين، يترتب على ذلك أن

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1. \qquad (2.1.2)$$

وبالتالي، فإن كثيرة حدود برنشتاين للدالة الثابتة 1 تساوي أيضًا 1. بالإضافة إلى ذلك، فإن كثيرة حدود برنشتاين للدالة $f(t) = t$ هي x. في الواقع، بما أن

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

لـ n , $1 \leq k \leq n$ فإن كثيرة حدود برنشتاين للدالة t هي

$$B_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} x^s (1-x)^{n-1-s} = x. \qquad (2.1.3)$$

يُحوّل مُعامل بيرنشتاين B_n الدالة f. المُعرّفة على الفترة [0.1] إلى الدالة $B_n f$.

وهي الدالة $B_n f$ المحسوبة عند x والمُمثلة بـ $B_n (f;x)$ مُعامل بيرنشتاين خطي بشكل واضح، لأنه يُشتق من المعادلة (1.0.1) التي تنص على أن

$$B_n (\lambda f+ \mu g) =\lambda B_n f + \mu B_n g \tag{2.1.4}$$

لجميع الدوال f و g المُعرّفة على الفترة [0,1] وجميع الأعداد الحقيقية λ وμ.

إذا كان B_n مُعاملًا أحادي النغمة من المعادلة (1.0.1)، فإنه من وحدانية B_n والمعادلة (2.1.2) يُستنتج أن

$$p \leq f (x) \leq p,\ x \in [0,1] \Rightarrow p \leq B_n (f;x) \leq p, x \in [0,1]\ . \tag{2.1.5}$$

في هذه الحالة، بافتراض أن p = 0 في المعادلة (2.1.5)، نحصل على

$$f (x) \geq 0, x \in [0,1] \rightarrow B_n (f,x) \geq 0, x \in [0,1]\ . \tag{2.1.6}$$

مبرهنة (2-1) يمكن كتابة كثيرة حدود برنشتاين على الشكل التالي:

$$B_n\,(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f\,(0) x^k \qquad (2.1.7)$$

حيث Δ هو مُعامل الفرق المباشر، كما هو موضح:

$$\Delta\, f(xi) = f(x_{i+1}) - f(xi) = f(xi+h) - f(xi),$$

بحجم خطوة $h = \frac{1}{n}$

البرهان : بدءًا من المعادلة (1.0.1) وتوسيع الحد $(1-x)^{n-k}$، لدينا:

$$B_n\,(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s \binom{n-k}{s} x^s$$

لنضع $t = k+s$. يمكننا كتابة:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} \ldots = \sum_{t=0}^{n} \sum_{k-0}^{t} \ldots \qquad (2.1.8)$$

لدينا أيضًا

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{s} = \binom{n}{t}\binom{t}{k}$$

وبالتالي، يُمكننا كتابة المجموع المزدوج على النحو التالي:

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}x^t \sum_{k=0}^{t}(-1)^{t-k}\binom{t}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\Delta^t f(0)\, x^t,$$

عند استخدام التوسع لفرق أمامي من رتبة أعلى.

مبرهنة (2-2) يُمكن كتابة مُشتقة مُتعددة حدود برنشتاين($B_{n+1}(f\,;x)$ على النحو التالي:

$$B_{n+1}(f; x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\Delta f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (2.1.9)$$

عند $n \geq 0$، حيث تُطبَّق Δ بحجم خطوة $h = \frac{1}{(n+1)}$. وإلا، إذا كانت f تتزايد أو تتناقص باطراد على الفترة [0,1]، فإن جميع مُتعددات حدود برنشتاين الخاصة بها تكون كذلك.

مبرهنة (2-3) لأي عدد صحيح $m \geq 0$ يمكن التعبير عن المشتقة m^{th} لـ $B_{n+m}(f;x)$ بدلالة فروق m^{th} لـ f حيث:

$$B_{n+m}^{(m)}(f;x)=\frac{(n+m)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}\Delta^m f\left(\frac{k}{n+m}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (2.1.10)$$

لجميع $n \geq 0$. هنا، تُطبق Δ بحجم خطوة $h=\frac{1}{n+k}$.

البرهان. نكتب

$$B_{n+m}\ (f;x)= \sum_{k=0}^{n+m} f\left(\frac{k}{n+m}\right)\binom{n+m}{k}\ x^k\ (1-x)^{n+m-k}$$

ونشتق m مرة لنحصل على

$$B_{n+m}^{(m)}\ (f;x) = \sum_{k=0}^{n+m} f\left(\frac{k}{n+m}\right)\binom{n+m}{k}\ p(x) \qquad (2.1.11)$$

حيث

$$p\ (x) = \frac{d^m}{dx^m}\ x^k\ (1-x)^{n+m-k}$$

الآن، نستخدم قاعدة لايبنيز وهي

$$\frac{d^m}{dx^m}\ (f\ (x)g(x)) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{d^k}{dx^k}\ f(x)\ \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\ g\ (x)$$

لشتقاق حاصل ضرب x^k و $(1-x)^{n+m-k}$. أولًا، نجد أن

$$\frac{d^s}{dx^s}\ x^k = \begin{cases} \frac{k!}{(k-s)!}\ x^{k-s} & , k-s \geq 0, \\ 0, k-s < 0 \end{cases}$$

و

$$\frac{d^{m-s}}{dx^{m-s}}\ (\mathbf{1})^{n+m-k} = \begin{cases} (-\mathbf{1})^{m-s}\ \frac{(n+m-k)!}{(n+s-k)!}\ (\mathbf{1}-x)^{n+s-k} & , k-s \leq n \\ \mathbf{0}, k-s < \mathbf{0} \end{cases}$$

وبالتالي، فإن المشتقة m^{th} لـ $x^k(1-x)^{n+m-k}$ هي

$$P(x) = \sum_s (-1)^{m-s} \binom{m}{s} \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(n+m-k)!}{(n+s-k)!} x^{k-s} (1-x)^{n+s-k}, \tag{2.1.12}$$

حيث يكون المجموع الأخير على جميع s من 0 إلى m، مع الحدود $0 \le k - s \le n$. الآن، نستبدل I بـ k - s، بحيث يكون:

$$\sum_{k=0}^{n+m} \sum_s \ldots = \sum_{i=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} \ldots . \tag{2.1.13}$$

نلاحظ أيضًا أن:

$$\binom{n+m}{k} \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(n+m-k)!}{(n+s-k)!} = \frac{(n+m)!}{n!} \binom{n}{k-s}. \tag{2.1.14}$$

يترتب على المعادلات (2.1.11)، (2.1.12)، (2.1.13) و(2.1.14) أن المشتقة m^{th} لـ $B_{n+m}(f;x)$ هي:

$$\frac{(n+m)!}{n!} \sum_{i=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} (-1)^{m-s} \binom{m}{s} f\left(\frac{i+s}{n+m}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

وأخيرًا، نلاحظ أن:

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^{m-s} \binom{m}{s} f\left(\frac{i+s}{n+m}\right) = \Delta^m f\left(\frac{i}{n+m}\right),$$

حيث يُطبّق العامل Δ بحجم خطوة $h = \frac{1}{n+m}$ ومن هنا النتيجة.

الفصل الثالث

(3-1) خصائص متعددات حدود برنشتاين [3]

التعريف: إذا كانت f دالة حقيقية القيمة مُعرّفة ومحدودة على الفترة [1، 0]، فليكن $B_n(f)$ كثيرة الحدود على الفترة [1، 0] التي تُعيّن القيمة

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$B(f)$ هي كثيرة حدود برنشتاين n^{th} لـ f.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 . \tag{1}$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = x . \tag{2}$$

$$B_n(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} . \tag{3}$$

$$B_n(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^3}{n^3} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(n-1)(n-2)x^3}{n^2} + \frac{3(n-1)x^2}{n^2} + \frac{x}{n^2} \qquad (4)$$

$$B_n(x^4) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^4}{n^4} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)x^4}{n^3}$$

$$+ \frac{6(n-1)(n-2)x^3}{n^3} + \frac{7(n-1)x^2}{n^3} + \frac{x}{n^3} \qquad (5)$$

لاثبات هذه المتطابقات من نظرية الحدين اولا :

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x+(1-x)]^n = 1 .$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right) = \frac{d}{dp}\left((p+q)^n\right) = n(p+q)^{n-1} .$$

هكذا

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} p^k q^{n-k} = (p+q)^{n-1} p \quad .$$

باستبدال p بـ x و q بـ 1-x في التعبير أعلاه، نحصل على المتطابقة (2) .

الآن، بتفريق هذه العبارة بالنسبة لـ p ثلاث مرات أخرى، وفي كل مرة نضرب طرفي النتيجة بـ $\frac{p}{n}$ ، نحصل على ما يلي:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} p^k q^{n-k} = \frac{(n-1)(p-q)^{n-2}}{n} p^2 + \frac{(p+q)^{n-1}}{n} p$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^3}{n^3} p^k q^{n-k} = \frac{(n-1)(n-2)(p-q)^{n-3}}{n^2} p^3 + \frac{3(n-1)(p+q)^{n-2}}{n^2} p^2 + \frac{(p+q)^{n-1}}{n^2} p$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^4}{n^4} p^k q^{n-k} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(p-q)^{n-4}}{n^3} p^4 + \frac{6(n-1)(n-2)(p+q)^{n-3}}{n^3} p^3$$

$$+ \frac{7(n-1)(p+q)^{n-2}}{n^3} p^3 + \frac{(p+q)^{n-1}}{n^3} p .$$

باستبدال p بـ x و q بـ 1-x في المتطابقات الثلاث أعلاه، نحصل على المتطابقات (3)، (4)، و (5).

يترتب على ذلك أن

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \left[\frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n} \right] -2x^2 + x^2 = x(1-x)\frac{1}{n}$$

و

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{k}{n} - x)^4 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= [\frac{(n-1)(n-2)(n-3)x^4}{n^3} + \frac{6(n-1)(n-2)x^3}{n^3} + \frac{7(n-1)x^2}{n^3} + \frac{x}{n^3}]$$

$$-4x [\frac{(n-1)(n-2)x^3}{n^2} + \frac{3(n-1)x^2}{n^2} + \frac{x}{n^2}]$$

$$+ 6x^2 [\frac{(n-1)x^2}{n} + \frac{x}{n}] -4x^2 + x^4$$

$$= x(1-x) \frac{(3n-6)x(1-x)+1}{n^3} \ .$$

(3-2) كثيرات الحدود [4]

حلول مسائل كثيرات الحدود

1. استخدم الخوارزمية الإقليدية لإيجاد $\gcd(x^8-1, x^6-1)$ في $Q[x]$ واكتبها كتركيب خطي لـ X^8-1 and x^6-1.

الحل: لنفترض أن $x^8-1\ f(x)$ and $x^6-1 = g(x)$ نحتاج الى $f(x) = x^2 g(x) + (x^2-1)$ and $g(x) = (x^4+x^2+1)(x^2-1)$، وهذا يُظهر أن $\gcd(x^8-1, x^6-1) = x^2-1$،

$x^2-1 = f(x) - x^2 g(x)$ and

2. على مستوى الحقل في الأعداد النسبية، استخدم الخوارزمية الإقليدية لإثبات أن

$2x^3-2x^2-3x+1$ and $2x^2-x-2$ عددان أوليان نسبيًا.

الحل: ليكن $2x^3-2x^2-3x+1 = f(x)$ and $2x^2-x-2 = g(x)$.

نحصل أولًا على $f(x) = (x-\frac{1}{2})g(x) - \frac{3}{2}x$. في الخطوة التالية، يمكننا استخدام x بدلًا من $\frac{3}{2}$،
وعندها $g(x) = (2x-1)g(x) - 2$. الباقي الثابت في الخطوة الثانية يعني أن $\gcd(f(x), g(x)) = 1$،.

3. على الحقل في الأعداد النسبية، أوجد القاسم المشترك الأكبر لـ $x^4+x^3+2x^2+x+1$ and x^3-1 ،
وعبّر عنه كتركيب خطي لكثيرات الحدود المعطاة.

الحل: ليكن $(x^4+x^3+2x^2+x+1 = f(x)$ and $x^3-1 = g(x)$. نحصل أولًا على
$f(x) = (x+1)g(x) + 2(x^2+x+1)$، ثم نحصل في الخطوة التالية على $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)$، وبالتالي
$\gcd(f(x), g(x)) = x^2+x+1$ and $(x^2+x+1) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}(x+1)g(x)$.،

4. هل كثيرات الحدود التالية غير قابلة للاختزال على Q؟

(أ) $3x^5 + 18x^2 + 24x + 6$

الحل: بالقسمة على ٣ نحصل على $x^5 + 6x^2 + 8x + 2$ وهذا يُحقق معيار آيزنشتاين لـ $p = 2$.

(ب) $7x^3 + 12x^2 + 3x + 45$

الحل: بتبسيط المعاملات بقياس 2، نحصل على كثيرة الحدود $x^3 + x + 1$ ، وهي غير قابلة للاختزال في $Z_2 [x]$. هذا يعني أن كثيرة الحدود غير قابلة للاختزال على Q.

(ج) $2x^{10} + 25x^3 + 10x^2 – 30$

الحل: يتحقق معيار آيزنشتاين عند $p = 5$.

المصادر:

1 – (اوغلوا , سيرين اوستا , 2014 : 3 الى 15) .

2 – هول , ف . هـ , (1972) : " مقدمة في الجبر المجرد " , الطبعة الثانية , كامبريدج , مطبعة الجامعة , لندن .

3 – (كاديسون , ريتشارد ف , 1 الى 9) .

4 – (بيتشي أ جون . , بلير ويليام د . (1996) : " ملحق لـ الجبر المجرد " , الطبعة الثانية , جامعة شمال الينوي , دار ويفلاند للنشر , واشنطن) .