جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربيه

قسم الرياضيات

عنوان البحث

(استخدام لابلاس في حل المعادلات التفاضليه الاعتياديه)

بحث

مقدم الى مجلس كلية التربيه / جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

تقدم بها

اسم الطالب

(محمد هاشم مجيد)

بأشراف

أ.م.د محمد جبار حواس اللامي

2025 م **1446 هـ**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمنِ الرَّحِيمِ

وَلَمَّا بَلَغَ أَشُدَّهُ آتَيْنَاهُ حُكْمًا وَعِلْمًا ۚ وَكَذَٰلِكَ نَجْزِي الْمُحْسِنِينَ (22)

صدق الله العلي العظيم

[سورة يوسف]

شُكر و تقدير

الحمد لله الذي لا بداية له ، و الدائم الذي لا نفاد له ، و الأول الذي لا اول لأوليته ، و الآخر الذي لا آخرية له ، و الباقي بعد فناء الخلق ، قدر الليالي و الايام ، وقسم فيما بينهم الاقسام ، فتبارك الله الملك العلام

انطلاقا من العرفان بالجميل فأنه ليسرنا و يثلج صدورنا ان تقدم بالشكر و الامتنان الى استاذنا و مشرفنا

(الدكتور محمد جبار حواس اللامي)

المشرف على هذا البحث لتوجيهاته العلمية و رعايته الصادقة و المخلصة ـ اذا كان لحرصه و جهوده و متابعته المستمرة الاثر الكبير في انجاز هذا البحث ..

فجزاه الله خير الجزاء وسدد خطاه و رفع الله مقامه في دنياه و أخراه

الاهداء

الى المدخر لاحياء القضية والنهوض بنشر الراية المحمدية و بسط العدالة بين كافة البرية و إماتت كل بدعة رزية صاحب المهابة الاحمدية و الشجاعة الحيدرية باهر البرهان و شريك القرآن و الحجة من الله في هذا الزمن على جميع الانس والجن الامام مولانا المهدي ابن الحسن صاحب العصر و الزمان (عج)

الى من جرع الكاس فارغاً ليسقيني قطرة حب ..

الى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

الى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق النجاح ..

(والدي العزيز)

الى من ارضعتني الحب والحنان

الى رمز الحب و بلسم الشفاء

الى القلب الناصع بالبياض

(والدتي العزيزة)

الخلاصة

تناول هذا البحث استخدام تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وذلك من خلال ثلاث فصول رئيسيه في الفصل الأول كرس فيه المفاهيم الاساسية حول المعادلات التفاضلية حيث يتم تعريف المعادلة التفاضلية ورتبتها.

درجتها وانواع الحلول الممكنه مثل الحل العام الخاص والمنفرد. كما يستعرض انواع المعادلات التفاضلية مثل المعادلات الخطية و المعادلات من الرتبة n والمعادلات القابلة لفصل المتغيرات والمتجانسة, التامة وكذلك معادلة برنولي التفاضلية . وفي الفصل الثاني يركز على تحويل لابلاس حيث يتم تعريف هذا التحويل واهم خواصه . كما يتم استعراض كيفيه تطبيق تحويل لابلاس على الدوال المختلفة ومنها الدوال المثلثية ومتعددة الحدود وداله الثابت والدوال الاسية والمشتقات بالاضافة الى طريقة ايجاد التحويل العكسي بأستخدام هذه التقنيه.

اما في الفصل الثالث يوضح كيفية استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع التركيز على تطبيقه في مسائل القيم الابتدائية حيث يتم تحويل المعادلات التفاضلية الى معادلات جبريه يمكن حلها بسهوله وثم يتم تطبيق التحويل العكسي لايجاد الحلول الاصليه للمسائل.

الفصل الأول

بعض المفاهيم الأساسية في حل المعادلات التفاضلية

م/المقدمة[3]

يمكن القول دون تجاوز او مبالغة ان المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية،حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية او هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية ولفهم هذه المسألة فلا بد من حل هذه المعادلة التفاضلية او على الاقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل وان استعطى الحصول عليه صراحة وعملية الحصول على حل ليس دوما بالمسألة اليسيرة بل ان كثيراً من المعادلات التفاضلية غير قابل للحل لقد استحوذ هذا الامر على اهتمام الرياضيين منذ بدايه علم التفاضل في القرن السابع عشر وحتى ايامنا هذه سواء من ناحية دراسه وجود الحل او من ناحية خصائصه وطبيعته او من ناحية الحصول عليه ولم يقف الرياضي طويلا امام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة بل تجاوز ذلك الى الحل التقريبي والحل العددي وتمثل الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية مساحة كبيرة من خريطة الابحاث الرياضية خصوصاً في عصرنا هذا عصر الحاسبات الألية الكبيرة السعة والمفرطة السرعة.

(1-1)المعادلة التفاضلية [3]

هي علاقه بين المتغير التابع والمتغير المستقل تدخل فيها المشتقات او التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية عادية اذا كان المتغير التابع داله في متغير مستقل واحد وبالتالي لا يحتوي الا على مشتقات عادية .

مثال[1] ليكن x متغير مستقل و y المتغير التابع فالعلاقات التاليه تمثل معادلات تفاضلية:

1)$\frac{dy}{dx}+y=3x^2$

2) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

(1-2)المعادلة التفاضلية الجزئية [3]

هي معادله تفاضليه فيها المتغير التابع داله لاكثر من متغير مستقل اي تظهر فيها المشتقات الجزئية.

مثال ليكن u المتغير التابع و(x, y, z) المتغيرات المستقلة فالعلاقات التالية هي معادلات تفاضلية جزئية:

1)$\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$

2)$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3y\frac{\partial u}{\partial x}+(x-y^2)4=0$

(1-3) رتبة المعادلة التفاضلية [3]

هي اعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية.

(1-4) درجه المعادلة التفاضلية[3]

هي الأس المرفوع اليها اعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية.

مثال $\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

(1-5) حل المعادلة التفاضلية [1]

هي تلك المتطابقة الخالية من المشتقات ومعرفة على فتره معينة وتكون مشتقاتها موجودة ومعرفة على نفس الفترة وكذلك تحقق المعادلة التفاضلية.

(1-6)الحل العام[1]

يعرف الحل العام بأنه حلاً للمعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية بقدر رتبة المعادلة التفاضلية.

(1-7)الحل الخاص[1]

يعرف الحل الخاص بأنه حلاً للمعادلة التفاضلية خالياً من الثوابت الاختيارية ويمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للثوابت الاختيارية.

(1-8)الحل المنفرد[1]

يعرف الحل المنفرد بأنه حلاً للمعادلة التفاضلية ولا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للثوابت الاختيارية وفي بعض الاحيان يسمى بالحل الشاذ.

(1-9)المعادلات التفاضلية الخطية[4]

اي معادله تفاضليه مهما كانت رتبتها تكون خطيه اذا كان المتغير المعتمد فيها وجميع المشتقات التي تظهر فيها من الدرجه الاولى وغير مضروبه ببعضها.

مثال [3]

1) $xy'' + 3y' - 2xy = \sin x$ خطية من المرتبة الثانية

2) $y''' + 3y - 5y' + y = 0$ خطية من المرتبة الثالثة

يقال عن المتغير بأنه مستقل عندما لا تظهر مشتقتة في المعادلة التفاضلية اما الذي تظهر مشتقته تسمى بالمتغير المعتمد [3].

مثال[3] نجد ان المعادله التفاضليه الاتية:

$$y'' + 2y' + y = e^{x}$$

ان x متغير مستقل لأن x' غير موجود في المعادلة التفاضلية اما y فهو موجود متغير معتمد لان y' موجود في المعادلة التفاضلية.

(1-10)المعادلات التفاضلية من الرتبة(n) [3]

وصورتها العامة $A^{\circ}(x)y^{(n)} + A1(x)y^{(n-1)} + A2(x)y^{(n-2)} + \ldots\ldots + An(x)y = R(x)$

ويقال ان المعادلة التفاضلية اعلاه

1) متجانسة (homogeneous) (متممة, مختزلة) اذا كان $R(x) = 0$ وبخلافه (اذا كان$R(x) \neq 0$) تسمى معادلة تفاضلية غير متجانسة (كاملة).

2) ذات معاملات ثابته اذا كانت الدوال $A^{\circ}, A1, \ldots. An$ جميعها دوال ثابتة وبخلافه (اذا كان على الاقل داله من تلك الدوال اعلاه غير ثابته) تسمى معادلة تفاضلية خطيه ذات معاملات متغيرة.

مثال

1)$y^{(3)} + 3y'' + 5y' - y = 0$ متجانسة و ذات معاملات ثابتة

2)$x^{2}y'' - (\sin x)y' + y = 0$ متجانسة و ذات معاملات متغيرة

3)$y'' + 7y' + 10y = e^{3x}$ غير متجانسة و ذات معاملات ثابتة

4)$e^{x}y^{(3)} + 4x^{3}y'' + y = \cos x$ غير متجانسة وذات معاملات متغيرة

(1-11)المعادلات التفاضليه من الرتبه الاولى[5]

نكتب المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى في المتغيرين y, x بالصيغة $f(x, y, y') = 0$وبصورة خاصة المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى في المتغيرين yx, تكتب بالصيغة:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ or } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

حيث $M(x, y)$ و $N(x, y)$ دوال في المتغيرين (x, y) ان هذا النوع من المعادلات التفاضليه من الرتبه الاولى والدرجه الاولى بالرغم من انه يبدو بسيطاً لكن لا توجد طريقه عامة لأيجاد الحل العام لها ولكن هناك حالات (معادلات تفاضلية) خاصة من المعادلات التفاضليه العادية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى والتي يمكن ايجاد الحل العام لها بطريقة مباشرة.

(1-12)المعادلات التفاضلية التي يمكن فصل متغيراتها[5]

يقال للمعادلة التفاضلية $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ بأنها معادلة تفاضلية يمكن فصل متغيراتها اذا امكن كتابه كل من الدوال$M(x,y),N(x,y)$ كحاصل ضرب دالتين احداهما داله الى متغير xفقط والاخرى داله الى المتغير yفقط وبهذه الحاله تصبح المعادلة بالشكل :

$$f(x)dx+g(y)dy=0$$

ويكون الحل العام لها هو$\int f(x)dx+\int g(y)dy=c$

حيث C ثابت اختياري

<u>مثال</u> اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\cos y dx+x\sin y dy=0$$

<u>SOL:</u>

$$\frac{1}{X}dx+\frac{\sin y}{\cos y}dy=0$$

$$\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=c$$

$$Ln\,x-Ln\cos y=C$$

$$Ln\,x-Ln\cos y=C\rightarrow\frac{x}{\cos y}=e^{c}=A$$

فالحل العام هو $x-A\cos y=0$

حيث A ثابت اختياري

(1-13)المعادلات التفاضلية المتجانسة[1]

يقال ان المعادله التفاضليه $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

متجانسه اذا كان كل من M,N داله متجانسه من نفس الدرجه وعلما ان $f(x,y)$ داله متجانسة من الدرجة n اذا كان:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n}f(x,y),\lambda\in R$$

مثال[1]

$$\mathbf{f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2}$$

$$\boldsymbol{f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)}$$

$\therefore$ $\boldsymbol{f(x,y)}$ متجانسة من الدرجة $\boldsymbol{2}$

(1-14)المعادلات التفاضلية التامة [5]

يقال للمعادله التفاضلية $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ بأنها تامة

اذا كانت الصيغة $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ تفاضل تام ,اي اذا وجدت الداله $\boldsymbol{f}$ بحيث

$\boldsymbol{df = M(x,y)dx + N(x,y)dy}$ ويكون الحل العام لهذه النوع من المعادلات التفاضليه هو $\boldsymbol{f(x,y) = C}$
حيث C ثابت اختياري.

مثال[1] اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\mathbf{(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0}$$

SOL:

نضع $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + xe^y}$

اذا $\boldsymbol{df(x,y) = (2x + e^y)dx + xe^y dy}$

وعليه الصيغة $\boldsymbol{(2x + e^y)dx + xe^y dy}$ تفاضل تام فأن المعادلة التفاضلية $\boldsymbol{(2x + e^y)dx + xe^y dy = 0}$

تامة وحلها العام $\boldsymbol{x^2 + xe^y = c}$ حيث C ثابت اختياري .

(1-15)المعادلة التفاضلية الخطية [5]

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى في المتغير المعتمد X والمتغير المستقل $\boldsymbol{Y}$ في الصيغة الاتية :

$$\mathbf{\frac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y)}$$

حيث $\mathbf{(p,Q)}$ دوال في المتغير $\boldsymbol{y}$ ويكون الحل العام لها هو $\boldsymbol{xv(y) - \int v(y)Q(y)dy = C}$
حيث $\boldsymbol{C}$ ثابت اختياري وان $\mathrm{V}(y) = e^{\int p(y)dt}$

مثال[1] اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$ydx + (3x - xy + 2)dy = 0$$

SOL:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3-y}{y}x = \frac{-2}{y} \leftarrow y\frac{dx}{dy} + (3-y) \to x = -2 \leftarrow ydx + (3x - xy + 2)dy = 0$$

$$v(y) = e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{3-y}{y}dy} = e^{3Lny-y} = y^3e^{-y} \leftarrow p(y) = \frac{3-y}{y}, Q(y) = \frac{-2}{y}$$

الحل العام لها هو:

$$xy^3e^{-y} - 2y^2e^{-y} - 4ye^{-y} - 4e^{-y} = C$$
$$\leftarrow xy^3e^{-y} + \int y^3e^{-y}x\frac{2}{y}dy = C \leftarrow xv(y) - \int v(y)Q(y)dy = C$$

و عليه الحل العام هو $xy^3 - 2y^2 - 4y - ce^y - 4 = 0$ **حيث C ثابت اختياري**

(1-16)معادله برنولى التفاضلية[1]

تكتب معادله برنولي التفاضلية في المتغير المعتمد Y والمتغير المستقل X في الصيغة $\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^nQ(x)$ **او بالصيغة** $y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x)$ **حيث P, Qدوال في المتغير X وهذه المعادله من الرتبه الاولى والدرجه الاولى حيث n ثابت معلوم و يمكن تحويل معادله الى معادله تفاضليه خطيه من خلال فرض** $z = y^{n-1}$ **حيث** $n \neq -1$ **فينتج ان** $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ **وبالتعويض عن** $\frac{dy}{dx}$**, y , في المعادله التفاضليه نحصل على** $\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$ **وهذه المعادله تفاضليه من الرتبه الاولى والدرجه الاولى في المتغير المعتمد z والمتغير المستقل x .**

مثال[1] اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$xy-\frac{dy}{dx}=y^3\mathrm{e}^{-x^2}$$

SOL:

$$-y^{-3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=e^{-x^2}\leftarrow-\frac{dy}{dx}+xy=y^3e^{-x^2}\leftarrow xy-\frac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$$

$\frac{dz}{dx}+2xz=2e^{-x^2}\leftarrow\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}\leftarrow z=y^{1-n}=y^{1-3}=y^{-2}$ نفرض أن

$$u(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{2\int xdx}=e^{x^2}$$

$$p(x)=2x,Q(x)=2e^{-x^2}$$

$$ze^{x^2}-2\int dx=C\leftarrow ze^{x^2}-\int e^{x^2}(2e^{-x^2})dx=C\leftarrow zu(x)-\int u(x)Q(x)dx=C$$

$$y^{-2}e^{x^2}-2x=C\leftarrow ze^{x^2}-2x=C\leftarrow$$

(1-17) تكوين المعادله التفاضليه من الحل العام لها[5]

لايجاد المعادله التفاضليه من الحل العام لها نقوم بحذف الثوابت الاختياريه الموجوده في الحل العام وذلك باستخدام التفاضل للحل العام بقدر عدد الثوابت الاختياريه لان رتبة المعادلة التفاضلية تساوي عدد الثوابت الاختيارية الموجودة في الحل العام لها.

مثال[3] اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو: $y=x^2+2Ax+B$

حيث ان ***A,B*** ثوابت اختيارية

SOL:

∴عدد الثوابت يساوي ***2***

$y'=2x+2A$ اذاً تفاضل الحل العام مرتين

$y''=2$

$y''=2$ اذاً المعادلة التفاضلية الناتجة هي

الفصل الثاني
تحويل لابلاس

م/مقدمة [8]

ان مجال المؤثر التفاضلي D هو مجموعه الدوال التي تتفاضل ويستخدم المؤثر D في حساب المؤثر الهفيسايد(Heaviside operational calculus) لحل المعادلات التفاضلية ويوفر المؤثر التكاملي L المعروف بتحويل لابلاس وطريقة اخرى لحل المعادلات التفاضليه وهذه الطريقة فعالة بصورة خاصة في حل المسائل الابتدائية التي تحتوي على معادلات تفاضليه خطية ذات المعاملات الثابتة وقد سمي تحويل لابلاس بهذا الاسم نسبه الى العالم الرياضي الفرنسي المعروف بيير سيمون دي لابلاس (1749_1827) الذي كان يستخدم التحويلات في ابحاثه الكلاسيكية في نظريه الاحتمالات في حين لن يعطي الرياضيون اصلاً الاهتمام الكبير لموضوع حسبان المؤثر الهفيسايد والتبرير الاخير لذلك هو ان معظم تقنيات الهفيسايد تعتمد على نظرية تحويل لابلاس وفي كثير من الاحيان تستخدم المعادلات التفاضلية لوصف الانظمة الفيزيائية (مثل الانظمة الكهربائية والميكانيكية) ولكن الحلول لهذه المعادلات قد تكون صعبة ومعقدة عند تطبيق تحويل لا بلاس , يمكن تحويل المعادلات التفاضلية الى معادلات جبرية اسهل في الحل مما يبسط التعامل مع المشكلات.

(2-1) تعريف تحويل لابلاس [1]

يستخدم تحويل لابلاس في حل بعض المعادلات التفاضلية العادية وكذلك بعض المعادلات التفاضلية الجزئية والتكاملية يسمى التكامل(1) $F(p)\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, p > 0$ بتحويل لابلاس ويرمز له بالرمز{ }L وفي هذه الحاله يمكن كتابة (1) على الصورة:

(2)

$$L\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, p > 0$$

(2-2)خواص تحويل لابلاس[8]

1)$L[af1(t) + bf2(t)] = aL[f1(t)] + bL[f2(t)]$

الخاصية الخطية

مثال[2]

$$\mathrm{L}[3e^{2t} + 4\sin 5t] = 3\,\mathrm{L}[e^{2t}] + 4\mathrm{L}[\sin 5t]$$

$$= \frac{3}{s-2} + \frac{20}{s^2+25}$$

2) (First shifting) If $Lf(t) = F(s), then\ L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

مثال [2]

$$\mathrm{L}[e^{at}\cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

3) $L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0), where\ L[f(t)] = F(s)$

خاصية لابلاس المشتقة $f(t)$

مثال[2]

$$L[\cos t] = S(\frac{1}{s^2+1}) - 0 = \frac{s}{s^2+1}$$

4)$L[f^n(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f^n(0) \ldots\ldots f^{n-1}(0)$

خاصية لابلاس للمشتقة من الرتبة n

مثال[2]

$f(t) \cos\ wt\ , f(0) = 1 f'(t) - w \sin\ wt \rightarrow \frac{-1}{w} f'(t) = \sin\ wt$

$L[\sin\ wt] = \frac{-1}{w} L[f'(t)]$

$= \frac{-1}{w}[sF(s) - f(0)]$

$=\frac{-1}{w}[s \frac{s}{s^2+w^2} - 1]$

$=\frac{w}{s^2+w^2}$

5)$L[\int_0^t f(t)dt] = \frac{1}{s} F(s)\ , where\ L[f(t)] = F(s)$ **خاصية لابلاس لتكامل $f(t)$**

مثال [4]

$$L[\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$$

$$L\frac{\sin t}{t} = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = [\tan^{-1} s]_s^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} S = \cot^{-1} S$$

$$L \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{S} \cot^{-1} S$$

$6)L[f(t)] = F(s)$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [F(s)]$$

مثال [8]

$$L[t \sin h\ at]$$

$$L(\sin h\ at) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$\therefore L[t \sin h\ at] = \frac{-d}{ds} (\frac{a}{s^2-a^2}) \rightarrow L[t \sin h\ at] = \frac{2a5}{(s^2-a^2)}$$

(2-3)تحويل لابلاس للدوال[2]

في الجدول التالي نعطي تحويلات لابلاس لبعض الدوال الاوليه الخاصه مع نطاق الوجود او التقارب ومع ذلك غالبا ما نتجاهل نطاق الوجود هذا لانه في معظم الحالات يمكن توفيره بسهوله عند الحاجه اليه.

	$F(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	1	$L(1) = \frac{1}{s}$
2	e^{at}	$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
3	t^n	$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
4	$\cosh at$	$L(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2} (s^2 > a^2)$
5	$\sinh at$	$L(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2} (s^2 > a^2)$
6	$\sin at$	$L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2} (s > 0)$
7	$\cos at$	$L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2} (s > 0)$

مثال [1]

اوجد

$$L\{7\} = \frac{a}{p} = \frac{7}{p}$$

مثال [1]

$$L\{e^{3x}\} = \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-3}$$

مثال [7]

$$\mathbf{L\{\sin(x-2)\} \rightarrow L\{\sin(x-2)\}}$$

$$= \boldsymbol{L\{\sin x \cos 2 + \sin 2 \cos x\} \rightarrow \frac{\cos 2}{p^2+1} + \frac{p \sin 2}{p^2+1}}$$

مثال [7]

$$\boldsymbol{L\{e^{3x} \cosh 2x\}}$$

$$\boldsymbol{\rightarrow L\left\{e^{3x}\,\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right\} \rightarrow L\left\{\frac{e^{5x}+e^{x}}{2}\right\}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} L\{e^{5x}+e^{x}\} \rightarrow \frac{1}{2}[\frac{1}{p-5}+\frac{1}{p-1}]}$$

مثال [1]

$$\boldsymbol{L\{\cos 5x\} = \frac{p}{p^2+a^2}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{p}{\mathrm{p}^2+25}}$$

مثال [8]

$$\underline{\boldsymbol{L\{\sinh 3X\}}}$$

$$\mathbf{= \frac{a}{p^2-a^2} = \frac{3}{p^2-9}}$$

مثال [8]

$$\boldsymbol{L\{x^7\} = \frac{7!}{p^8}}$$

(2-4)تحويل لابلاس للمشتقات[7]

نفترض ان الداله $y(x)$قابله للتفاضل بالنسبه الى xفان مؤثر لابلاس للمشتقة يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$ ويعرف كالآتي:

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_{0}^{\infty} e^{-px}\frac{dy}{dx}dx$$

أي $$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_0^\infty e^{-px}dx$$

$$= [ye^{-px}]_0^\infty + p\int_{0}^{\infty} ye^{-px}\ dx$$

و بالتالي $$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = p\bar{y}(p) - y(0)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالآتي :

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx}\right\} = \int_0^\infty e^{-px}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-px}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \left[\frac{dy}{dx}\ e^{-px}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty \frac{dy}{dx}e^{-px}dx$$

ومن العلاقة (1) يكون $$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0)$$

من هذا نحصل على $$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = p^2\bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0)\_\_\_\_\_\_\_\_(2)$$

حيث $y(0)$ هي قيمة $y(x)$ محسوبة عند x

$y^{(1)} = 0$ هي قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة ايضاً عند $x = 0$

والصيغة العامة هي $$L\left\{\frac{d^hy}{dx^n}\right\} = p^n\,\bar{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0)\_\_\_\_\_\_y^{(n-1)}(0)\_\_\_\_\_\_(3)$$

مثال [2]

استخدم تحويل لابلاس للمشتقة الأولى :

$a)\ L\{K\} = \frac{K}{S}$ $\qquad$ $b)\ L\{2t\} = \frac{2}{s^2}$

SOL:

$L\{\acute{f}(t)\} = SF(S) - f(0)$ $\qquad$ $f(t) = K$

$f(0) = K$

$\acute{f}(t) = 0$

$L\{0\} = SF(S) - K$

$K = SF(S) \rightarrow F(S) = \frac{K}{S}$

$b) L\{\acute{f}(t)\} = SF(S) - f(0)$ $\qquad$ $f(t) = 2t$

$L\{2\} = SF(S) - 0$ $\qquad$ $f(0) = 0$

$\frac{2}{S} = SF(S) \rightarrow F(S) = \frac{2}{S^2}$ $\qquad$ $\acute{f}(t) = 2$

مثال [2]

استخدم تحويل لابلاس للمشتقة الثانية :

$$L\{\cos at\} = \frac{S}{S^2 + a^2}$$

$$L\{f''(t)\} = s^2F(S) - Sf(0) - f'(0)$$

$$f(t) = \cos at\ , f'\ (t) = -a \sin at\ , f''\ (t) = a^2 \cos at$$

$$f(0) = 1\ \&\ \ f'(0) = 0$$

$$L\{-a^2 \cos at\} = S^2F(S) - S(1) - 0$$

$$-a^2L\{\cos at\} = S^2F(S) - S$$

$$-a^2L\{\cos at\} = S^2L\{\cos at\} - S$$

$$[-a^2\mathrm{L}\{\cos \mathrm{at}\} - \mathrm{S}^2\ \mathrm{L}\{\cos \mathrm{at}\} = -\mathrm{S}] \div -$$

$$L\{\cos at\}\ (a^2 + S^2) = S$$

$$L\{\cos at\} = \frac{S}{a^2 + S^2}$$

(2-5)تحويل لابلاس العكسي [8]

اذا كانت $f(S) = L[F(t)]$ معرفه فأننا نعرف ان f وحيده لان f دالة اذا كانت F هي الداله الوحيده التي

$\mathrm{f} = \mathrm{LF}$ فيوجد لL عكس وهوL^{-1} وعلينا ان نكتب $L^{-1}[\mathrm{f(S)}] = \mathrm{F(t)}$ او $L^{-1}\mathrm{f} = \mathrm{F}$

مثال :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{S}}\right] = 1 \quad \text{لأن} \quad L[1] = \frac{1}{S}$$

مثال :

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{S}^2 + 1}\right] = \sin \mathrm{t} \quad \text{لأن}\ L[\sin t] = \frac{1}{S^2 + 1}$$

مثال :

$$L^{-1}\left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}^2 + 4}\right] = \cos 2\mathrm{t}$$

مثال :

$$L^{-1}\left[\frac{4}{S^3}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{2}{S^3}\right] = 2t^2$$

مثال :

$$L^{-1}\left[\frac{2}{S+1}\right] = 2e^{-t}$$

مثال :

$$L^{-1}\left[\frac{3}{S^2-9}\right] = \sinh\ (3t)$$

مثال :

$$L^{-1}\left[\frac{4S}{S^2-16}\right]$$

$$= 4L^{-1}\left[\frac{S}{S^2-16}\right] \rightarrow 4\cosh 4t$$

الفصل الثالث

استخدام لابلاس في حل المعادلات التفاضلية

(3-1)تحويل لابلاس ومسائل القيم الابتدائية [7]

نستخدم في هذه الفقره تحويل لابلاس لحل مسائل القيم الابتدائيه وذلك بالاستعانه بالصيغه التي حصلنا عليها في الفقرات السابقه وتتلخص الطريقه بتطبيق مؤثر لابلاس على طرفي المعادله التفاضليه ومن ثم حساب قيمته من هذه المعادله ثم حساب معكوس هذا المؤثر من الناتج والذي يكون حلاً لهذه المسألة.

<u>مثال</u> :

حل مساله القيمه الابتدائيه التاليه :[7]

$$y'(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'' - y = 1$$

الحل: بتطبيق مؤثر لابلاس على طرفي المعادلة ينتج

$$L[y''] - L[y] = L[1]$$

بما أن $L[1] = \frac{1}{S}$

و $L[y''] = S^2L[y] - sy(0) - y'(0)$

$$= S^2L[y] - 1$$

لذلك تكون $L[y] = \frac{1}{S(S-1)} = \frac{1}{S-1} - \frac{1}{S}$

$$y = L^{-1}\left[\frac{1}{S-1}\right] - L^{-1}[\frac{1}{S}]$$

$$= e^{x} - 1$$

مثال : حل المسألة الابتدائية [8]

$$Y''(t) + 4Y'(t) + 4Y(t) = 0 \quad , \quad Y(0) = 0 \quad , \quad Y'(0) = 5$$

الحل:

$$[s^2 y(s) - 0s - 5] + 4[sy(s)] + 4[y(s)] = 0$$

$$y(s) = \frac{5}{s^2 + 4s + 4} = \frac{5}{(s+2)^2}$$

$$Y(t) = L^{-1}\left[\frac{5}{(S+2)^2}\right] = 5te^{-2t}$$

مثال: حل المسألة الأبتدائية

$$Y''(t) + 6Y'(t) + 25Y = 0 \quad , \quad Y(0) = 2 \quad , Y(0) = 3$$

الحل:

$$[s^2 y(s) - 2s - 3] + 6[Sy(S) - 2] + 25y(s) = 0$$

$$(S^2 + 6S + 25)y(s) = 2S + 15$$

$$y(S) = \frac{2S + 15}{(S+3)^2 + (4)^2} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^2 + (4)^2} + \frac{9}{4}\left[\frac{4}{(s+3)^2 + (4)^2}\right]$$

$$Y(t) = 2e^{-3t}\cos 4t + \frac{9}{4}e^{-3t}\sin 4t$$

مثال : حل المسألة الأبتدائية

$$Y''(t)+9Y(t)=\sin 3t \quad , \quad Y(0)=2 \quad , \quad Y'(0)=1$$

الحل :

$$[s^2 y(s)-25-1]+9y(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

$$(s^2+9)y(s)=2s+1+\frac{3}{s^2+9}$$

$$y(s)=\frac{2s+1}{s^2+9}=\frac{3}{(s^2+9)^2}$$

$$Y(t)=2\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{3}{2(27)}(\sin 3t-3t\cos 3t)$$

$$=2\cos 3t+\frac{7}{18}\sin 3t-\frac{1}{6}t\cos 3t$$

مثال :

حل المسألة الأبتدائية [2]

$$y^{(4)}+2y''+y=\sin t \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=-2 \quad , \quad y^{(3)}(0)=0\,,y''(0)=3$$

الحل :

$$[s^4 Y-s^2(1)-s^2(-2)-s(3)-0]+2[s^2 Y-s(1)-(-2)]+Y=\frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^4+2s^2+1)Y=\frac{1}{s^2+1}+s^3-2s^2+5s-4$$

$$\text{or}\quad Y=\frac{1}{(S^2+1)^3}+\frac{S^3-2S^2+5S-4}{(S^2+1)^2}=\frac{1}{(S^2+1)^3}+\frac{(S^3+S)-2(S^2+1)+4S-2}{(S^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{(S^2+1)^3}+\frac{S}{S^2+1}-\frac{2}{S^2+1}+\frac{4S-2}{(S^2+1)^2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(S^2+1)^3}\right]=\frac{3}{8}\sin t-\frac{3}{8}t\cos t-\frac{1}{8}t^2\sin t$$

$$L^{-1}\left[\frac{4s-2}{(S^2+1)^2}\right]=2t\sin t-\sin t+t\cos t$$

$$y = (1 + \frac{5}{8}t)\cos t - (\frac{21}{8} - 2t + \frac{1}{8}t^2)\sin t$$

<u>مثال :</u> حل المعادلة [1]

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x} \quad , \quad y(0) = -3 \quad , \quad y'(0) = 5$$

<u>الحل :</u>

بأستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة نحصل على :

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} - 3L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

وبالتالي $\{p^2y - py(0) - y'(0)\} - 3\{p\bar{y} - y(0)\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$

وبأستخدام الشروط الابتدائية ف نجد أن $\{p^2\bar{y} - 3p - 5\} - 3\{p\bar{y} + 3\} + 2y = \frac{4}{p-2}$

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 - 3p + 2)(p - 2)} + \frac{14 - 3p}{p^2 - 3p + 2}$$

وعلى ذلك $\bar{y} = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$

و بالتحليل الى كسور جزئية نجد ان : $\bar{y} = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$

وبأستخدام تحويل لابلاس العكسي فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه على الصورة:

$$y = -7e^x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}$$

<u>مثال :</u> حل المسألة الأبتدائية [8]

$$Y(t) - 2Y(t) = 4 \quad , \quad Y(0) = 3$$

<u>SOL:</u>

$$L[Y'(t)] - 2L[Y(t)] = L[4]$$

$$[sy(s) - 3] - 2y(s) = \frac{4}{s}$$

$$y(s)=\frac{\left(\frac{4}{s}\right)+3}{s-2}=\frac{4+3s}{s(s-2)}=\frac{-2}{s}+\frac{5}{s-2}$$

$$Y(t)=L^{-1}\left[\frac{-2}{S}+\frac{5}{S-2}\right]=-2+5e^{2t}$$

<u>مثال :</u> حل المعادلة [1]

$$y''+\mathrm{y}=\mathrm{x} \quad , \qquad \mathrm{y}(0)=1 \ , \qquad \mathrm{y}'(0)=2$$

<u>SOL:</u>

$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+L\,\{y(x)\}=L\{x\}$ **بأخذ تحويل لابلاس للطرفين**

$p^2\bar{y}(\mathrm{p})-\mathrm{py}(0)-\mathrm{y}'(0)+\bar{\mathrm{y}}=\frac{1}{\mathrm{p}^2}$ وبالتالي فأن

$p^2\bar{\mathrm{y}}(\mathrm{p})-\mathrm{p}+2+\bar{\mathrm{y}}=\frac{1}{\mathrm{p}^2}$ **وبأستخدام الشروط الابتدائية**

$\bar{y}=\mathrm{L}\{\mathrm{y}\}=\frac{1}{\mathrm{p}^2(\mathrm{p}^2+1)}+\frac{\mathrm{p}-2}{\mathrm{p}^2+1}$ **وعليه فأن**

$\bar{y}=\frac{1}{\mathrm{p}^2}-\frac{1}{\mathrm{p}^2+1}+\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2+1}$ **بالتحليل الى كسور جزئية فنحصل على**

$$=\frac{1}{\mathrm{p}^2}+\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2+1}-\frac{3}{\mathrm{p}^2+1}$$

$y=L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2}+\frac{P}{P^2+1}-\frac{3}{P^2+1}\right\}$ **بأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على**

$y=x+\cos x-2\sin x$ **ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاه على الصورة**

<u>مثال :[2]</u>

$$y''-3\mathrm{y}'+2\mathrm{y}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \ , \qquad \mathrm{y}(0)=2 \ , \quad \mathrm{y}'(0)=-1$$

<u>SOL:</u>

$$[S^2Y-sy(0)-y'(0)]-3[SY-y(0)]+2Y=\frac{2}{S+1}$$

$Y=\frac{2S^2-5S-5}{(S+1)(S-1)(S-2)}=\frac{1/3}{S+1}+\frac{4}{S-2}+\frac{-7/3}{S-2}$ **وبأستخدام الشروط الابتدائية**

بأخذ معكوس تحويل لابلاس نحصل على $y=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$

مثال [4]

$$y''+2y'+5y=0\ ,\qquad y'(0)=5\ ,\qquad y(0)=1$$

SOL:

نجد تحويل لابلاس لطرفي المعادلة $p^2\bar{y}(p)-py(0)-y'(0)+2p\bar{y}(p)-2y(0)+5\bar{y}(p)=0$

و بالتعويض عن $y(0)$ و $y'(0)$ نحصل على

$$p^2\bar{y}(p)-p-5+2p\bar{y}(p)-2+5\bar{y}(p)=0$$

$$\bar{y}(p)(p^2+2p+5)=p+7$$

$$\bar{y}(p)=\frac{p+7}{p^2+2p+5}=\frac{p+1}{(p+1)^2+4}+3\frac{2}{(p+1)^2+4}$$

وبايجاد معكوس التحويلات السابقه نحصل على

$$y=e^{-x}\cos 2x+3e^{-x}\sin 2x$$

المصادر

1- حسن مصطفى العويضي وعبد الوهاب عباس رجب و سناء علي زارع- المعادلات التفاضليه (الجزء الاول) دار النشر مكتبه الرشد الطبعه الاولى-2006

2- مواري ر. شبيجل - سلسله ملخصات شوم - نضريات ومسائل في الرياضيات المتقدمين للمهندسين والمعلمين دار ماكجروهيل للنشر- 1971

3- اسماعيل بوقفه ,عايش الهنادوة ,المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقات , الجمهورية اليمنية جامعة العلوم والتكنولوجيا الطبعه الاولى - 1999

4- خالد احمد السامرائي , يحيى عبد سعيد , طرق حل المعادلات التفاضلية , وزارة التعليم العالي دار النشر بغداد - 1979

5- حسن مصطفى العويضي , عبد الوهاب عباس رجب , سناء علي زارع - المعادلات التفاضلية (الجزء الثاني) دار الرشيد -2005

6- أس فارلو ترجمه مها عواد الكبيسي ,المعادلات التفاضلية الجزئية , منشورات جامعه عمر المختار البيضاء بنغازي ليبيا- 2005

7- احمد زين العابدين محمد - نظرية المعادلات التفاضلية الاعتيادية دار الكتب للطباعة والنشر- جامعة الموصل - 1992

8- جون أ تيرني - وزارة التعليم العالي - المعادلات التفاضلية (الطبعة الثانية)جامعة الموصل - 1989