جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان / كلية التربية

قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية وتقريب الدوال بإستخدام طريقة تايلر

بحث مقدم إلى مجلس كلية التربية / قسم الرياضيات كجزء من متطلبات نيل درجة بكالوريوس التربية في علوم الرياضيات

من قِبل الطالبة

نبأ كريم كاطع

إشراف

أ.م.د. عقيل عبد الواحد قاسم

1446هـ

2025م

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ)

(صدق الله العلي العظيم)

(التوبة آية_ ١٠٥)

الإهداء

إلى من أنار الله بهِ درينا وإلى الذي خلقه الله لنفسه وهو الذي أنقذ الناس من الجهل والفتن

" إلى محمد رسول الله (صلى الله عليه واله وسلم) "

إلى أهل السماء من وحبر الانبياء صلوات الله عليهم بقية الليل والنهار

" الى ولد علي وفاطمة (عليهم السلام) "

إلى من غاب عنا واشتقنا لرؤية إلى من كانت الطافه وحنانه يرافقنا، إلى باب الله الذي منه يوتى . . .

"الى المهدي (عجل الله فرجه) بقية الله "

الى كل من مد يد العون في يوم من الايام

إلى من شجعني ووقف بجانبي

الشكر والتقدير

اولاً أشكر الله تعالى

لقد أكرمني في الله تعالى بنعمة طلب العام، فقد ألهمني الصبر وبعث فيَّ الارادة والعزيمة

كما أخص بالشكر أستاذي الفاضل الذي أشرف على هذا البحث وعلى تفضله بقبول الاشراف على بحثي

وعلى ما أسداه لي من نصائح كانت بمثابة النبراس المنير في كل خطواتي

أ. م. د. عقيل عبد الواحد قاسم

وقبل أن نمضي نتقدم بأسمى آيات الشكر والمحبة الى الذين حملوا أقدم رسالة في الحياة والى الذين مهدوا

لنا الطريق الى جميع اساتذتنا الافاضل "

المحتويات

المستخلص

تناولنا في هذا البحث طريقة تايلر لحل المعادلات التفاضلية وتقريب الدوال وعلى اساس ذلك تم تقسيم البحث إلى ثلاثة فصول:

الفصل الأول: تناولنا فيه تعريف التحليل العددي وأهميته في حل المعادلات التفاضلية

الفصل الثاني: قدّمنا مفهوم وأساسيات طريقة تايلر من حيث نشأتها وتطورها وأهم خصائصها وكذلك قمنا بتعريف متسلسلة ماكلورين من اجل مقارنتها مع طريقة تايلر

الفصل الثالث: قمنا بتقديم امثلة تطبيقية عن معادلات تفاضلية ودوال استخدمنا فيها طريقة تايلر ومقارنتها مع طرق أخرى

الفصل الأول

الفصل الأول

المقدمة

1.1. تعريف التحليل العددي واهميته في حل المسائل الرياضية

التحليل العددي هو أحد فروع الرياضيات التطبيقية الذي يهتم بتطوير وتطبيق الأساليب العددية لحل المشكلات الرياضية التي يصعب أو يستحيل حلها تحليليًا باستخدام المعادلات الدقيقة. يعتمد التحليل العددي على تقدير الحلول التقريبية مع ضمان دقة مقبولة وكفاءة حسابية.

تُستخدم تقنيات التحليل العددي في العديد من التطبيقات العملية مثل الهندسة، الفيزياء، علوم الحاسوب، الاقتصاد، وتحليل البيانات. من أبرز الموضوعات التي يتناولها التحليل العددي:

1. حل المعادلات الجبرية وغير الخطية (مثل طريقة نيوتن).
2. التكامل العددي (مثل طريقة سيمبسون والمستطيلات).
3. التفاضل العددي (التقديرات المشتقة).
4. حل أنظمة المعادلات الخطية (مثل طريقة جاوس).
5. حل المعادلات التفاضلية.

يُعتبر التحليل العددي ضروريًا في العصر الحديث بسبب محدودية الحسابات التحليلية عند التعامل مع المشكلات الحقيقية المعقدة، مما يبرز دور الخوارزميات العددية وبرمجتها. [1] [2]

إن شهرة التحليل العددي ونموه الهائل حالياً لشاهدان مع الشواهد الأخرى على أن التطبيقات لا تزال المنبع الرئيسي للإلهام بالابتكار الرياضي عندما تتطور افكار رياضية جديدة فمن المعتاد ان تكون تطبيقات جديدة قد مهدت لهما.

الحاسب الالكتروني هو ذاته توضيح لذلك فهو استجابة للحاجة الملحة الى حساب سريع

هذا هو أصل التحليل العددي الحديث. إنه الوجهة العددية للمجال الواسع لتحليل التطبيق. [3]

2.1. مقدمة في المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية هي فرع من الرياضيات يدرس العلاقات بين الدوال ومشتقاتها، وهي أداة رئيسية في نمذجة الأنظمة الديناميكية في الفيزياء والهندسة والاقتصاد والعلوم الحيوية. تعبر هذه المعادلات عن كيفية تغير كمية معينة بمرور الزمن أو بالنسبة إلى متغيرات أخرى، مما يجعلها أساسية لفهم الظواهر الطبيعية والأنظمة الاصطناعية. [4]

أهمية المعادلات التفاضلية:

- تستخدم في الفيزياء لوصف حركة الأجسام، وانتشار الموجات، والديناميكا الحرارية.
- في الهندسة، تُستخدم لتحليل الأنظمة الكهربائية والميكانيكية.
- في الاقتصاد، تُستخدم لنمذجة النمو السكاني والتغيرات في الأسواق المالية.
- في الطب والبيولوجيا، تُستخدم لدراسة انتشار الأمراض والنماذج الدوائية.

أنواع المعادلات التفاضلية:

1. المعادلات التفاضلية العادية (ODEs): تتضمن مشتقات دالة لمتغير مستقل واحد فقط.
2. المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs): تتضمن مشتقات دالة لمتغيرات مستقلة متعددة.
3. المعادلات الخطية وغير الخطية: تختلف حسب طريقة ارتباط المشتقات بالدالة الأصلية.

3.1. انواع الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية

تستخدم الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية عندما يكون من الصعب أو المستحيل إيجاد حل تحليلي، وتنقسم هذه الطرق إلى عدة أنواع، وفقًا لطبيعة المعادلة التفاضلية وطريقة الحساب [5]:

1. طريقة أويلر (Euler's Method)

- أبسط الطرق العددية، تعتمد على استخدام المشتق الأول لتقدير القيم التالية للحل، معادلتها الأساسية:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

حيث h هو الخطوة الزمنية، و (x, y) تمثل المشتق الأول للدالة

- دقتها محدودة بسبب تراكم الخطأ

2. طريقة أويلر المحسنة (Modified Euler's Method) أو طريقة هويين (Heun's Method)

- تحسين لطريقة أويلر باستخدام متوسط الميل بين نقطتين لتقليل الخطأ،

- تُعطي دقة أعلى من طريقة أويلر الأساسية.

3. طريقة رانج - كوتا (Runge - Kutta Methods)

-تعتبر من أكثر الطرق شيوعًا، وخاصة طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة (RK4)

- تعطي تقريبًا عالي الدقة للحل باستخدام قيم متعددة للميل في كل خطوة

- الصيغة الأساسية لطريقة RK4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث k_1, k_2, k_3, k_4 تقديرات ميل الدالة عند نقاط مختلفة.

4. طريقة متسلسلة تايلر (Taylor Series Method)

- تعتمد على تمثيل الحل باستخدام متسلسلة تايلر حول نقطة معينة

- الصيغة العامة لمتسلسلة تايلر للدالة $y(x)$ حول النقطة x_n هي:

$$y(x) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \cdots$$

حيث h هو الخطوة الزمنية، و y', y'', y''' تمثل المشتقات المختلفة عند النقطة x_n .

- كلما زاد عدد الحدود المستخدمة، زادت دقة الطريقة.

الفصل الثاني

الفصل الثاني

مفهوم واساسيات طريقة متسلسلة تايلر

1.2. متعددة حدود تايلر

1.1.2. المقدمة

في كثير من المواضيع العلمية والعملية نعتمد على التجربة في تحقيق هدفنا ومن خلال التجربة نحصل على بيانات (معلومات) تحتاج الى معالجة، لكن احياناً ليس من الواقعي ان نجري تجربة لكل معلومة كان تكون التجربة مكلفة او اننا نريد الحصول على نتائج توقعية. لذلك نلجأ إلى صياغة ما نحصل عليه من نتائج بصورة معادلة رياضية يمكن أن نستخدمها عند الحاجة

إن متعددة الحدود هي ابسط أنواع الدوال التي يمكن ان تسعفنا في هذه الاحوال فهي ذات صيغة توليدية ومتصلة وقابلة للاشتقاق والتكامل ويمكن أن تتعامل معها بواسطة الحاسوب بسهولة. [6]

2.1.2. نشأة وتطور متسلسلة تايلر في الرياضيات

نشأة متسلسلة تايلر:

متسلسلة تايلر (Taylor Series) هي أداة رياضية تمثل وظيفة قابلة للتفاضل كمتسلسلة لا نهائية من حدود القوى. تعود جذورها إلى القرن السابع عشر، حيث ظهرت ضمن محاولات تطوير طرق تحليلية لتقريب الدوال الرياضية.

• تم تسمية متسلسلة تايلر نسبةً إلى عالم الرياضيات الإنجليزي بروك تايلر(Brook Taylor) ، الذي نشر في عام ١٧١٥ مقالًا بعنوان "Methodus Incrementorum Directa et Inversa"، حيث قدم مفهوم المتسلسلة لتمثيل الدوال الرياضية.

• رغم أن تايلر هو من وضع الأساس الرسمي للمتسلسلة، فإن الأفكار المتعلقة بتقريب الدوال ظهرت في وقت سابق عند علماء مثل إسحاق نيوتن (Isaac Newton) وجيمس غريغوري (James Gregory).

تطور المتسلسلة:

1. قبل تايلر:

• استخدم علماء الرياضيات في العصور الوسطى وبعض العلماء العرب مثل الخوارزمي والبيروني تقريبات عددية للدوال، لكن هذه الأساليب لم تكن منظمة بشكل كامل.

• في القرن السابع عشر، قدم إسحاق نيوتن صيغه لتوسيع الدوال، خاصة في التحليل العددي.

2. بعد تايلر:

• في القرن الثامن عشر، طور جوزيف لاغرانج (Joseph Lagrange) وليونارد أويلر (Leonhard Euler)مفاهيم متعلقة بالمشتقات وتقريب الدوال، مما ساهم في تحسين استخدام المتسلسلة.

• قدم أوغستين-لويس كوشي (Augustin-Louis Cauchy) في القرن التاسع عشر أسس التحليل الحقيقي، مما أعطى متسلسلة تايلر صيغة أكثر صرامة من الناحية الرياضية.

3. التحليل الحديث:

• في العصر الحديث، أصبحت متسلسلة تايلر أساسًا في العديد من الفروع، مثل الفيزياء النظرية، والتحليل العددي، وحل المعادلات التفاضلية. كما تم توسيعها لتشمل الدوال المركبة، فيما يعرف بـ متسلسلة ماكلورين وتحليل فورير. [7] [8]

3.1.2. الصيغة العامة لمتسلسلة تايلر

تعريفها بحسب التفاضل والتكامل

تكون الصيغة العامة المتسلسلة تايلور لدالة $f(x)$ حول النقطة a على النحو التالي

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

حيث

$f^{(n)}(a)$: هي المشتقة n للدالة f هو عند النقطة a

$(x-a)^n$: هو الفرق بين x و a مرفوعاً للقوة n

$n!$: هو العامل التكراري الذي يمثل حاصل ضرب الاعداد من 1 الى n [9]

4.1.2. استخدام متسلسلة تايلر لحل المعادلات التفاضلية في التحليل العددي

تعد متسلسلة تايلر إحدى الطرق الفعالة لحل المعادلات التفاضلية بشكل تقريبي في التحليل العددي، خصوصا عندما يصعب الحصول على الحل التحليلي. تعتمد الطريقة على تمثيل الحل كمتسلسلة حول نقطة ابتدائية باستخدام المشتقات.

1. الصيغة العامة لمتسلسلة تايلر

للدالة $y(x)$ يمكن تقريب الحل باستخدام متسلسلة تايلر

كالتالي:

$$y(x) = y(x_\circ) + y'(x_\circ)(x - x_\circ) + \frac{y''(x_\circ)}{2!}(x - x_\circ)^2 + \frac{y^{(3)}(x_\circ)}{3!}(x - x_\circ)^3 \ldots$$

2. خطوات الحل باستخدام متسلسلة تايلر

الخطوة 1: تحديد المعادلة التفاضلية

إذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_\circ) = y_\circ$$

نبدأ بحساب المشتقات اللازمة للدالة $y(x)$.

الخطوة 2: حساب المشتقات

1. احسب المشتقة الأولى: $y'(x_\circ) = f(x_\circ, y_\circ)$
2. احسب المشتقة الثانية: باستخدام التفاضل الجزئي للمعادلة $y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x)$
3. استمر بحساب المشتقات الأعلى حسب الحاجة لدقة التقريب.

الخطوة 3: تطبيق متسلسلة تايلر

قم بتمثيل الحل $y(x)$ باستخدام متسلسلة تايلر بجمع الحدود الناتجة حتى الدرجة المطلوبة.

3. مثال عملي

حل المعادلة التفاضلية:

$$y'(x) = x - y, \qquad y(0) = 1$$

الخطوات:

1. المشتقة الأولى:

$$y'(0) = 0 + 1 = 1$$

2. المشتقة الثانية:

باستخدام العلاقة $y''(x) = \frac{d}{dx}\,[x + y] = 1 + y'(x)$:

$$y''(0) = 1 + y'(0) = 1 + 1 = 2$$

3. المشتقة الثالثة:

باستخدام العلاقة $y^{(3)}\,(x) = \frac{d}{dx}\,[1 + y'(x)] = y''(x)$:

$$y^{(3)}(0) = y''(0) = 2$$

4. تمثيل متسلسلة تايلر:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

بالتعويض:

$$y(x) = 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$ [2] [9]

5.1.2. استخدام متسلسلة تايلر لتقريب الدوال في التحليل العددي

تستخدم متسلسلة تايلر في التحليل العددي لتقريب الدوال التي يصعب التعامل معها حسابياً. من خلال الدالة كمتسلسلة من الحدود حول قطة محددة، يصبح من الممكن تبسيط العمليات الحسابية المرتبطة بالدوال.

الصيغة العامة لمتسلسلة تايلر

الدالة $f(x)$ يمكن تقريبها حول نقطة $x = a$ باستخدام متسلسلة تيلر بالشكل التالي:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

حيث:

- $f(a)$: قيمة الدالة عند النقطة a.
- $f'(a), f''(a), \ldots$: المشتقات الأولى والثانية والثالثة للدالة عند النقطة a.
- $(x-a)$: الفرق بين النقطة المراد التقريب عندها والنقطة a.

6.1.2. خطوات تقريب الدوال باستخدام متسلسلة تايلر

1. اختيار نقطة التوسع a :

تحدد نقطة التوسيع a لتكون قريبة من النقطة التي ترغب في تقريب الدالة عندها.

2. حساب المشتقات:

احسب $f(a)$ وقيم المشتقات $f'(a), f''(a) \ldots$ عند النقطة a.

3. تحديد عدد الحدود:

لتحديد دقة التقريب، يتم اختيار عدد مناسب من الحدود بناءً على الحاجة. كلما زاد عدد الحدود، كان التقريب أكثر دقة.

4. بناء المتسلسلة:

يتم تجميع الحدود حتى الدرجة المطلوبة باستخدام الصيغة العامة.

مثال عملي:

تقريب $\sin(x)$ حول النقطة $x = 0$:

1.الدالة و المشتقات:

- $f(x) = \sin(x).$
- المشتقات:
- $f'(x) = \cos(x)\,, f''(x) = -\sin(x)\,, f^{(3)}(x) = -\cos(x)\,, f^{(4)}(x) = \sin(x).$

عند $x = 0$:

- $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0.$

2. الصيغة التقريبية:

باستخدام متسلسلة تايلر حتى الدرجة الثالثة [2] [10]:

$$\sin(x) \approx 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

أي:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

7.1.2. الفرضيات والافتراضات التي تقوم عليها متسلسلة تايلر

1- قابلية الاشتقاق اللانهائية:

يجب ان تكون الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات في مجالها، وبالأخص في جوار النقطة a.

2 - تقارب المتسلسلة:

متسلسلة تايلر تتطلب ان تكون سلسلة القوى الناتجة متقاربة نحو الدالة الاصلية $f(x)$ في جوار النقطة a. إذا كانت المسلسلة متقاربة، فإن قيم المتسلسلة تقترب من قيمة الدالة الاصلية كلما زاد عدد الحدود المأخوذة في الاعتبار.

3 - تحليلية الدالة:

يعني أن الدالة تساوي مجموع متسلسلة تايلر الخاصة بها، أي:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

4- وجود نصف قطر تقارب محدد:

للنقطة a، يجب ان تكون هناك منطقة حولها (نصف قطر التقارب) بحيث يمكن تمثيل الدالة داخلها باستخدام متسلسلة تايلر.

5- استمرارية المشتقات

مشتقات الدالة $f(x)$ يجب ان تكون مستمرة عند النقطة a وفي مجال التقارب.[11]

8.1.2. مميزات متسلسلة تايلر في التحليل العددي

1. تبسيط الحسابات

تقوم متسلسلة تايلر بتقريب الدوال المعقدة بدوال متعددة الحدود سهلة الحساب. هذا يجعل من الممكن تنفيذ العمليات الحسابية بسرعة ودقة أعلى.

2. دقة التقريب

عند زيادة عدد الحدود في متسلسلة تايلر، يزداد دقة التقريب، خاصة إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق بشكل مستمر.

3. التطبيقات المتعددة

تُستخدم متسلسلة تايلر في العديد من المجالات، مثل:

- حل المعادلات التفاضلية.
- تطوير خوارزميات عددية لتقريب الدوال.
- التطبيقات الفيزيائية والهندسية.

4. التقريب المحلي

توفر المتسلسلة تقريبًا محليًا ممتازًا للدالة حول نقطة معينة (تسمى نقطة التوسع)، مما يجعلها أداة مثالية لتحليل السلوك المحلي للدوال.

5. سهولة التعديل

يمكن تحسين التقريب بإضافة المزيد من الحدود إلى المتسلسلة عند الحاجة، مما يوفر مرونة كبيرة في استخدامها.

6. الدوال غير التحليلية

يمكن استخدام متسلسلة تايلر لتقريب الدوال التي لا تمتلك تعبيرًا تحليليًا واضحًا، وهو ما يعزز من كفاءتها في التحليل العددي. [2] [10]

9.1.2. عيوب متسلسلة تايلر في التحليل العددي

على الرغم من الفوائد الكبيرة التي تقدمها متسلسلة تايلر في التحليل العددي، إلا أنها ليست خالية من العيوب والقيود. بعض أبرز العيوب تشمل:

1. تقارب بطيء

• في بعض الحالات، تحتاج متسلسلة تايلر إلى عدد كبير جدًا من الحدود للحصول على تقريب دقيق، مما يؤدي إلى زيادة التعقيد الحسابي.

• إذا كانت نقطة التوسع بعيدة عن النطاق الذي يتم فيه استخدام المتسلسلة، فقد يكون التقارب بطيئًا أو غير فعال.

2. اعتمادها على قابلية اشتقاق الدالة

• تتطلب متسلسلة تايلر أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق عدد كافٍ من المرات حول نقطة التوسع. إذا لم تكن الدالة قابلة للاشتقاق أو كانت مشتقاتها غير متوفرة بسهولة، يصبح من الصعب استخدامها.

3. المشاكل في النطاق البعيد عن نقطة التوسع

• التقريب الذي تقدمه متسلسلة تايلر يكون دقيقًا فقط بالقرب من نقطة التوسع. عند الابتعاد عن هذه النقطة، يصبح التقريب أقل دقة، وقد لا يتقارب على الإطلاق.

4. المشكلات العددية

• عند تنفيذ متسلسلة تايلر باستخدام الحاسوب، قد تؤدي الحسابات المتكررة للمشتقات والحدود إلى أخطاء عددية بسبب التقريب والحسابات العائمة.

5. عدم الكفاءة مع الدوال ذات السلوك المعقد

• إذا كانت الدالة تحتوي على نقاط عدم انتظام أو تغيرات سريعة، فقد تكون متسلسلة تايلر غير كافية لتمثيل السلوك الحقيقي للدالة.

6. زيادة التعقيد مع الحدود العليا

• زيادة عدد الحدود في المتسلسلة لتحسين الدقة قد يؤدي إلى زيادة التكلفة الحسابية، مما يجعل استخدامها غير عملي في التطبيقات الكبيرة. [2] [10] [12]

2.2. متسلسلة ماكلورين

هي حالة خاصة من متسلسلة تايلر، حيث تستخدم لتقريب الدوال الرياضية حول النقطة صفر. إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق لعدد لا نهائي من المرات عند النقطة $x = 0$ فإن متسلسلة ماكلورين تعطى بالصيغة التالية [13] : $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots.. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

حيث $f^{(n)}(0)$ تمثل المشتقة النونية للدالة $f(x)$

مثال/ $f(x) = e^x$

نلاحظ ان مشتقتها عند $x = 0$ هي:

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$f''(0) = e^0 = 1$

وهكذا حيث جميع المشتقات تساوي 1

بالتالي متسلسلة ماكلورين للدالة e^x هي:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

الفصل الثالث

الفصل الثالث

امثلة لحل المعادلات التفاضلية وتقريب الدوال

باستخدام طريقة متسلسلة تايلر

مثال1: استخدم متسلسلة تايلر لتقريب قيمة $\sin(0.5)$ عند النقطة $x_{\circ} = 0$

الحل:

متسلسلة تايلر لـ$\sin x$:

المطلوب: تقريب $\sin(0.5)$

$$x_{\circ} = 0$$

1. $x = 0.5$
2. $\frac{-x^3}{3!} = -0.02083$
3. $\frac{x^5}{5!}$=0.00026
4. $\frac{-x^7}{7!} = -0.00000155$

$\sin(0.5) \cong 0.479426$

القيمة الحقيقية: باستخدام الحاسبة هي 0.479425

الخطأ: $10.479425 - 0.4794261 \approx 0.000001$

لحل مثال1 بطريقة أخرى نستخدم طريقة نيوتن-رافسون

الفكرة الأساسية:

نجد جذر المعادلة $f(x) = \sin(x)$ (اي $\sin(x) = 0$)

ثم نقرب قيمة $\sin(0.5)$ حول تلك الجذور

المعادلة $\leftarrow f(x)\sin(x) - y$ وحيث $y = 0.5$

صيغة نيوتن-رافسون : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

الأعداد الاولي:

نبدأ من $x_{\circ} = 0.5$ (تقريب مبدئي)

التكرار الأول:

$$f(x_{\circ}) = \sin(0.5) - 0.5 = -0.0205$$

$$f'(x_{\circ}) = \cos(0.5) \approx 0.877$$

$$x_1 = x_{\circ} - \frac{f(x_{\circ})}{f'(x_{\circ})} = 0.5 + \frac{0.0205}{0.877} \approx 0.523$$

التكرار الثاني:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.523598$$

النتيجة النهائية: بعد التكرارين نحصل على قيمة تقريبية $\sin(0.5)$ $x = 0.5233$

التحقق: القيمة الحقيقية ل$\sin(0.5)$ هي حوالي 0.479425 النتيجة قريبة جداً مع دقة عالية

المقارنة بين الطريقتين

- متسلسلة تايلر:

تعد الطريقة الانسب هنا لأنها مصممة خصيصاً لتقريب القيم العددية وهي مناسبة جداً لدوال مثل $\sin(x)$ خاصة عند العمل حول النقاط القريبة من الاصل$x_{\circ} = 0$.

- نيوتن – رافسون:

ليست الخيار الأمثل إذا كنا نحاول فقط حساب قيمة $\sin(x)$ لان هذه الطريقة تستخدم بشكل أفضل لحل المعادلات مثل $f(x) = 0$ وليس لحساب قيم مباشرة للدوال.

الاستنتاج:

الافضل لهذا المثال هو طريقة تايلر.

لأنها مباشرة وتعطي نتائج دقيقة بسرعة عن استخدام عدد مناسب من الحدود

مثال2: حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية بطريقة تايلر بشكل تقريبي

Ex: $y' = x + y$

نريد حل هذا المثال بطريقة تايلر من الرتبة الثانية مع شرط البداية $y_{(0)} = 1$ نهدف الى تقريب الحل عند $x = 0.1$ باستخدام $h = 0.1$

الخطوات

1. حساب المشتقات:

$$y' = x + y$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(x + y) = 1 + y'$$

$$\because y' = x + y$$

$$\Rightarrow y'' = 1 + x + y$$

2. توسيع متسلسلة تايلور حول $x = 0$:

$$y(x + h) \approx y(x) + y'(x) \cdot h + \frac{y''(x)}{2!} \cdot h^2$$

بالتعويض بالقيم $x = 0$ و $h = 0.1$:

$y(0) = 1$ من شرط البداية

$$y'(0) = 0 + y(0) = 1$$

$$y''(0) = 1 + 0 + y(0) = 1 + 1 = 2$$

بالتعويض في متسلسلة تايلر

$$y(0.1) \approx 1 + 1 \cdot 0.1 + \frac{2}{2} \cdot (0.1)^2$$

$y(0.1) \approx 1 + 0.1 + 0.01 = 1.11$ [1]

حل مثال 2 بطريقة أخرى

لحل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ مع شرط البداية $y(0) = 1$ باستخدام طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة

1. صيغة الطريقة

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حيث

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h \cdot y_n + k_3)$$

2. تطبيق الطريقة

- البيانات الأولية

$$x_\circ = 0$$

$$y_\circ = 1$$

$$h = 0.1$$

- حساب القيم عند $x = 0.1$

$$k_1 = 0.1$$

$$k_2 = 0.11$$

$$k_3 = 0.1105$$

$$k_4 = 0.12105$$

$$y_1 = 1.1103417$$

المقارنة بين طريقة تايلر ورانج - كوتا من الرتبة الرابعة

نجد ان لكل منهما مزايا وعيوب

- طريقة تايلر

المزايا:

- تقدم دقة عالية عند استخدام رتب عليا من متعددة حدود تايلر

العيوب:

- تتطلب حساب مشتقات متعددة للدالة

- طريقة رانج - كوتا من الرتبة الرابعة:

المزايا:

- توفر دقة عالية دون الحاجة إلى حساب مشتقات الدالة تعتمد فقط على قيم الدالة عند نقاط محددة
- أكثر كفاءة وسهولة في التطبيق مقارنة بطريقة تايلر خاصة في الحالات التي تكون فيها مشتقات الدالة صعبة الحساب.

العيوب:

- تتطلب حسابات أكثر في كل خطوة مقارنة بالطرق الأبسط مثل اويلر معا يزيد من التعقيد الحسابي.

الخلاصة:

بشكل عام، تُعتبر طريقة رانج - كوتا من الرتبة الرابعة أكثر فاعلية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية مقارنة بطريقة تايلر

مثال عددي لا يحقق متسلسلة تايلر

مثال: إذا كانت الدالة $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ عندما $x \neq 0$ و $f(0) = 0$

هذه الدالة محددة وقابلة للتفاضل عدد غير محدود من المرات في كل نقطة، بما في ذلك عند $x = 0$. جميع مشتاقتها $x = 0$ تساوي صفراً

ملاحظة: لا يمكن حساب متسلسلة تايلر عندما $x = 0$ للأسباب التالية

حساب متسلسلة تايلر عندما $x = 0$:

1. قيمة الدالة عند $x = 0$ هي:

$$f(0) = 0$$

2. جميع مشتقات الدالة عند $x = 0$ هي صفر:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \qquad , \qquad f^n(0) = 0 \ , \forall n \in N$$

3. متسلسلة تايلر للدالة حول $x = 0$ هي:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x_3^n \Rightarrow T(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$$

النتيجة:

متسلسلة تايلر تعطي $T(x) = 0$ لكل x.

ولكن إذا أخذنا $x \neq 0$ ، فإن الدالة الاصلية $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$ وبالتالي، متسلسلة تايلر لا تمثل الدالة $f(x)$ خارج نقطة التوسع $x = 0$.

السبب:

السبب الرئيسي هو ان الدالة $f(x)$ تتغير بشكل أسرع من أي قوى للx بالقرب من الصفر، وبالتالي لا يمكن تمثيلها بسلسلة حدودية.[14]

التفسير الرياضي:

المشكلة الرئيسية هنا هي ان الدالة $f(x)$ غير تحليلية عند $x = 0$ ، رغم أنها قابلة للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات. هذا يعني ان متسلسلة تايلر لا تمثل $f(x)$ لان الدالة تتناقض بسرعة شديدة عندما تقترب x من الصفر، بحيث لا يمكن تقريبها باستخدام حدود متعددة تايلر.

المصادر العربية

[1] كتاب التحليل العددي: الأسس والتطبيقات لمؤلفين مختلفين.

[3] سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في التحليل العددي فرانسيس.

[6] التحليل العددي، الدكتور نشاط ابراهيم العبيدي.

[11] أنطون هوارد، حساب التفاضل والتكامل مه الهندسة التحليلية، الترجمة العربية دار المريخ للنشر ١٩٩٥.

[13] متسلسلة تايلر وماكلورين ملخص Slide Share.

[14] لوالتر رودين (Principles of Mothmatical Analysis).

المصادر الأجنبية

[2] [Burden, R. L., & Faires, J. D. (2016). Numerical Analysis.Cengage Learning.]

[4] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 11th ed. Wiley.

[5] Burden, R. L., & Faires, J. D. (2016). Numerical Analysis. 10th ed. Cengage Learning. Learning.

[7] Boyce, W.E., DiPrima, R.C. (2012). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley.

[8] O'Connor, J.J., Robertson, E.F. (1996). Brook Taylor and the Taylor Series. MacTutor History of Mathematics.

[9] Math World -Taylor Series

[10] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2020). Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill Education.

[12] Kincaid, D., & Cheney, W. (2002). Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. Brooks/Cole.