جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية

قسم الرياضيات

تحليل الحساسية وتطبيقاتها في البرمجة الخطية

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية / جامعة ميسان كجزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

من قِبل الطالبات:

فاطمة صبيح جابر

كوثر امين حسون

بإشراف:

م.د. سامي حطاب

1446هـ

2025 م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿شَهِدَ اللَّهُ أَنَّهُ لَا إِلَٰهَ إِلَّا هُوَ وَالْمَلَائِكَةُ وَأُولُو الْعِلْمِ قَائِمًا بِالْقِسْطِ﴾

صدق الله العلي العظيم

(سورة آل عمران آية ١٨)

الإهداء

إلى مصابيح الهدى، وسفن النجاة،
إلى من تجسدت في سيرتهم معاني العلم، والصبر، والتضحية،
إلى أئمتي الاثني عشر، خلفاء الرسول بحق
يا من كنتم مشاعل نور في دروب الجهل والضلال
إلى نبض قلبي، والدي ووالدتي، سندي في الحياة، ومصدر إلهامي الأول، من سهرا وتعبا من أجلي دون انتظار مقابل، أهدي هذا الجهد المتواضع، عرفانًا بجميل لن يوفيه الحبر ولا الكلام.
إلى أساتذتي الكرام في قسم الرياضيات، الذين كانوا مشاعل نور أضاءت درب العلم والفهم، ومن علموني أن الرياضيات ليست أرقامًا فحسب، بل منهج تفكير ومنطق حياة.
إلى كل من شاركني لحظات التعب والقلق، وإلى كل من مدّ لي يد العون يومًا، وخصّني بدعوة صادقة أو كلمة طيبة، أقدّم هذا العمل ثمرة لسنواتٍ من السعي والتعلّم.
وأخيرًا...إلى العلم، ذلك النور الذي لا ينطفئ، وإلى المستقبل الذي أحلم أن أكون فيه شعلة تضيء دروب الآخرين

فهرست المحتويات

رقم الفقرة	اسم الموضوع	رقم الصفحة
	الفصل الاول	
1-1	نشاه وتطور بحوث العمليات	2
2-1	مجالات بحوث العمليات	3
3-1	الخصائص والسمات الرئيسية لبحوث العمليات	4
4-1	اهمية بحوث العمليات	5
5-1	بحوث العمليات وبناء النماذج	6
6-1	امثله على نماذج بحوث العمليات	7
	الفصل الثاني	
1-2	أهمية البرمجة الخطية	9
2-2	تاريخ تتطور البرمجة الخطية	13
3-2	البرمجة الخطية في العصر الحديث	14
4-2	النماذج الرياضية في البرمجة الخطية	16
5-2	انواع مشاكل البرمجة الخطية	18
	الفصل الثالث	
1-3	أهمية تحليل الحساسية	27
2-3	تحليل الحساسية بيانياً	28
3-3	حالات الحساسية	31
4-3	تحليل الحساسية باستخدام المصفوفات	35
	المصادر	44

الفصل الأول
مقدمة في بحوث العمليات

مقدمة في بحوث العمليات

بحوث العمليات (Operations Research) هي مجموعة من الأساليب العلمية والرياضية المستخدمة لتحليل المشكلات واتخاذ القرارات المثلى تعتمد على استخدام النماذج الرياضية، التحليل الاحصائي، والخوارزميات لتحسين الأداء وحل المشكلات المعقدة في مختلف المجالات.

1.1 نشأة وتطور بحوث العمليات

بحوث العمليات (Operations Research) هي مجال علمي تطبيقي نشأ بهدف استخدام الأساليب الرياضية والتحليلية لحل المشكلات واتخاذ القرارات المثلى. تطورت بحوث العمليات على مراحل عبر التاريخ، وكانت بداية ظهورها مرتبطة بالحروب والصراعات العسكرية.

1. النشأة والتطور المبكر

بدأت بوادر بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية، حيث احتاجت الجيوش إلى تحسين استخدام الموارد العسكرية، مثل توزيع القوات، تنظيم القوافل البحرية، وجدولة الصيانة للطائرات.

تم تشكيل فرق من العلماء والرياضيين لتحليل المشكلات اللوجستية وتقديم حلول تعتمد على النماذج الرياضية والإحصائية.

من أبرز النجاحات كانت تحليل القوافل البحرية البريطانية لمكافحة الغواصات الألمانية، وتحسين جدولة الطائرات والرادارات في الجيش الأمريكي.

2. مرحلة ما بعد الحرب وتطبيقاتها المدنية

بعد الحرب، توسعت تطبيقات بحوث العمليات إلى المجالات الصناعية والتجارية، حيث اعتمدتها الشركات لتحسين الإنتاج، تقليل التكاليف، وزيادة الكفاءة.، بدأت الجامعات بتدريس بحوث العمليات كفرع أكاديمي مستقل في الخمسينيات والستينيات، انتشرت استخدامات بحوث العمليات في إدارة المخزون، النقل، الجدولة، التخطيط المالي، والأنظمة الصحية.

3. تطورات حديثة في بحوث العمليات

مع تطور الحواسيب وتقنيات الذكاء الاصطناعي، أصبحت بحوث العمليات أكثر قدرة على حل مشكلات

معقدة بسرعة وكفاءة عالية، ظهرت تقنيات جديدة مثل الخوارزميات الجينية، الشبكات العصبية، والمحاكاة الحاسوبية، يتم تطبيق بحوث العمليات اليوم في سلاسل التوريد، الاتصالات، الطاقة، والبيانات الضخمة، مما يجعلها أحد أهم الأدوات لتحسين الأداء في مختلف القطاعات.

2.1. مجالات بحوث العمليات

بحوث العمليات تُستخدم في العديد من المجالات لتحسين الأداء واتخاذ القرارات المثلى. فيما يلي أبرز المجالات التي تُطبق فيها:

1. المجال الصناعي والإنتاجي

تحسين جداول الإنتاج لتقليل التكاليف وزيادة الإنتاجية، إدارة المخزون لتقليل الفاقد وضمان توافر المواد الخام، الصيانة الوقائية لتحسين أداء المعدات وتقليل الأعطال.

2. النقل والخدمات اللوجستية

تحسين مسارات النقل لتقليل التكاليف الزمنية والمالية، إدارة أساطيل المركبات لتحسين توزيع الشحنات، وتقليل استهلاك الوقود، جدولة وسائل النقل في الطيران، السكك الحديدية، والشحن البحري.

3. الصحة والمستشفيات

جدولة المواعيد الطبية لتقليل أوقات الانتظار وزيادة كفاءة الخدمات، توزيع الموارد الصحية مثل الأدوية والأطباء في المستشفيات، إدارة سلاسل التوريد الطبية لضمان توافر المعدات والأدوية عند الحاجة.

4. الأعمال والتجارة

تحليل الأسواق والتنبؤ بالطلب لاتخاذ قرارات تسويقية سليمة، إدارة المخاطر المالية وتحديد أفضل الاستثمارات.

5. الجيش والدفاع

تخطيط العمليات العسكرية لتحديد أفضل استراتيجيات الهجوم والدفاع، إدارة اللوجستيات العسكرية لضمان توفير الإمدادات والذخائر بفعالية، تحليل التهديدات والمخاطر لاتخاذ قرارات أمنية دقيقة.

6. الحكومة والتخطيط العام

تخطيط المدن والبنية التحتية لتوزيع الخدمات والمواصلات بكفاءة، إدارة الأزمات والكوارث لتوزيع الموارد بسرعة وفعالية، تحسين السياسات الاقتصادية من خلال تحليل البيانات واتخاذ قرارات مبنية على الأرقام.

3.1. الخصائص والسمات الرئيسية لبحوث العمليات:

بحوث العمليات تتميز بعدد من الخصائص التي تجعلها أداة فعالة لحل المشكلات واتخاذ القرارات. فيما يلي أبرز السمات:

1. تعتمد على المنهج العلمي

تستخدم أساليب رياضية وإحصائية للوصول إلى حلول دقيقة وعلمية.

تعتمد على التجربة والتحليل بدلًا من الحدس أو التخمين.

2. موجهة نحو حل المشكلات واتخاذ القرارات

تهدف إلى تحليل المشكلات المعقدة وتقديم حلول عملية قابلة للتنفيذ.

تساعد في اتخاذ القرارات المثلى في ظل وجود موارد محدودة.

3. تعتمد على النماذج الرياضية

يتم تمثيل المشكلة في صورة نموذج رياضي يحتوي على معادلات ومتغيرات.

تستخدم تقنيات مثل البرمجة الخطية، المحاكاة، ونظرية الطوابير لحل المشكلات.

4. تهتم بتحسين الأداء وزيادة الكفاءة

تهدف إلى تقليل التكاليف وزيادة الإنتاجية في القطاعات المختلفة.

تساعد في إدارة الموارد بشكل أمثل لتحقيق أقصى استفادة ممكنة.

5. تعتمد على البيانات والتحليل الكمي

تتطلب جمع وتحليل البيانات قبل اتخاذ القرار.

تعتمد على الإحصاء والتحليل الكمي للوصول إلى نتائج دقيقة.

6. متعددة التخصصات

تجمع بين الرياضيات، الإحصاء، الاقتصاد، الهندسة، وعلوم الإدارة.

تُطبق في مختلف المجالات مثل الصناعة، الصحة، النقل، الدفاع، والتمويل.

7. مرنة وقابلة للتطوير

يمكن تعديل نماذج بحوث العمليات لتناسب مشكلات جديدة.

يتم تطويرها باستمرار مع تطور التكنولوجيا وظهور أساليب تحليلية جديدة.

4.1. اهميه بحوث العمليات:

بحوث العمليات تُعد من الأدوات الأساسية في تحليل المشكلات واتخاذ القرارات المثلى، حيث تعتمد على الأساليب الرياضية والنماذج الكمية لتحسين الأداء في مختلف المجالات. تتجلى أهميتها في النقاط التالية:

1. تحسين عملية اتخاذ القرار

توفر تحليلات كمية دقيقة تساعد في اتخاذ قرارات أفضل.

تساعد في مقارنة البدائل المختلفة واختيار الحل الأمثل بناءً على البيانات.

2. زيادة الكفاءة وتقليل التكاليف

تُستخدم في تحسين العمليات الإنتاجية وتقليل الهدر في الموارد.

تساعد في إدارة المخزون بكفاءة لمنع الفائض أو النقص.

تُطبق في جدولة المهام والموارد لتقليل التكاليف التشغيلية.

3. تحسين إدارة الموارد البشرية والمادية

تُستخدم في تخطيط القوى العاملة وتوزيع المهام بكفاءة.

تساعد في إدارة سلاسل التوريد والخدمات اللوجستية لضمان تدفق المنتجات والخدمات بسلاسة.

4. دعم التخطيط الاستراتيجي

تُستخدم في تحليل الأسواق والتنبؤ بالطلب لاتخاذ قرارات تسويقية سليمة.

تساعد الحكومات والشركات في تخطيط الميزانيات والاستثمارات المستقبلية.

5. تحسين جودة الخدمات

في القطاع الصحي، تساعد في تقليل أوقات الانتظار وجدولة الأطباء والعمليات.

في قطاع النقل، تُستخدم في تحسين مسارات الشحن والرحلات الجوية.

في المصارف، تُستخدم في إدارة المخاطر وتطوير نماذج الائتمان الفعالة.

6. تعزيز الابتكار والتكنولوجيا

تُستخدم في تطوير الذكاء الاصطناعي والخوارزميات الذكية.

تساعد في تحسين أداء الشبكات والاتصالات الرقمية.

5.1. بحوث العمليات وبناء النماذج:

بناء النماذج في بحوث العمليات هو عملية تحويل المشكلات الواقعية إلى نماذج رياضية يمكن تحليلها وحلها

باستخدام الأساليب الكمية. هذه النماذج تساعد في تحليل المشكلات، تقييم البدائل، واتخاذ القرارات المثلى.

1. مفهوم النماذج في بحوث العمليات

النموذج هو تمثيل رياضي أو محاكاة لمشكلة واقعية، يُستخدم لتحليل البدائل المتاحة واختيار الحل الأفضل. يمكن أن يكون النموذج بسيطًا أو معقدًا حسب طبيعة المشكلة.

2. مراحل بناء النموذج في بحوث العمليات

أ. تعريف المشكلة

تحديد المشكلة المطلوب حلها.

تحديد الأهداف مثل تقليل التكاليف، زيادة الأرباح، تحسين الكفاءة.

ب. جمع وتحليل البيانات

تحديد المتغيرات والعوامل المؤثرة في المشكلة.

تحليل البيانات التاريخية والحالية لفهم طبيعة المشكلة.

ج. بناء النموذج الرياضي

تحديد المعادلات والعلاقات الرياضية التي تمثل المشكلة.

استخدام أنواع النماذج المختلفة مثل:

النماذج الخطية: تستخدم في البرمجة الخطية لتحسين العمليات.

نماذج الشبكات: تُستخدم في النقل والخدمات اللوجستية.

نماذج الاحتمالات والإحصاء: تُستخدم لتحليل المخاطر واتخاذ القرارات.

د. اختبار النموذج والتحقق منه

تطبيق النموذج على بيانات واقعية للتأكد من دقته وفعاليته.

تعديل النموذج إذا لزم الأمر لتحسين دقته.

هـ. حل النموذج وتفسير النتائج

استخدام البرمجيات والخوارزميات الرياضية لحل النموذج.

تحليل النتائج واختيار الحل الأمثل.

و. تطبيق الحل ومتابعته

تنفيذ الحل الناتج من النموذج على أرض الواقع.

مراقبة الأداء وإجراء تحسينات مستمرة.

6.1. أمثلة على نماذج بحوث العمليات

أ. نموذج البرمجة الخطية (Linear Programming)

يُستخدم في تحسين الإنتاج، تخطيط الموارد، وتقليل التكاليف.

مثال: شركة تصنيع تريد تحديد أفضل مزيج إنتاجي لتحقيق أقصى ربح.

ب. (Transportation Model) النقل نموذج.

يُستخدم في إدارة سلاسل التوريد، توزيع البضائع، وتقليل تكاليف النقل.

مثال: شركة شحن تريد تحديد أرخص مسار لنقل البضائع من المصانع إلى الأسواق.

ج. (Simulation Model) المحاكاة نموذج.

يُستخدم في تحليل الأنظمة الديناميكية المعقدة.

مثال: مستشفى يريد تحليل أوقات انتظار المرضى في غرفة الطوارئ.

د. (Queuing Theory Model) الطوابير نظرية نموذج.

يُستخدم في تحسين أنظمة الخدمة وتقليل أوقات الانتظار.

مثال: شركة اتصالات تريد تحديد عدد مراكز الاتصال اللازمة لخدمة العملاء بكفاءة.

الفصل الثاني

البرمجة الخطية

البرمجة الخطية

وهي اسلوب رياضي مهم يستخدم في ترشيد الموارد المتوفرة في عملية اتخاذ القرارات، وتبحث البرمجة الخطية في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والمحددات المفروضة لتحقق الاهداف المرجوة اما تعظيم الارباح او تقليل التكاليف. وتعرف على انها تعابير رياضية (من الدرجة الأولى) تمثل بخط مستقيم، يتم استخدامها لحل نموذج رياضي تشير الى دالة الهدف بمتغيرات اساسية بقيود ومحددات معينة، وبشرط عدم سلبية المتغيرات

البرمجة الخطية (Linear Programming) هي أداة رياضية قوية تُستخدم لتحسين القرارات في ظل وجود قيود محدودة. تُعتبر جزءًا أساسيًا من بحوث العمليات (Operations Research)، وتُستخدم في مجالات متنوعة مثل الاقتصاد، الهندسة، الإدارة، والعلوم الاجتماعية. الفكرة الأساسية للبرمجة الخطية هي تحويل مشكلة واقعية معقدة إلى نموذج رياضي يتكون من دالة هدف (Objective Function) وعدد من القيود (Constraints)، حيث تكون العلاقات بين المتغيرات خطية.

1.2. أهمية البرمجة الخطية

تكمن أهمية البرمجة الخطية في قدرتها على تحسين استخدام الموارد المحدودة وتحقيق أقصى استفادة منها. من خلال تحويل المشكلات إلى نماذج رياضية، يمكن للبرمجة الخطية أن توفر حلولًا دقيقة وفعالة لمجموعة واسعة من التحديات. هذه الأداة الرياضية تُستخدم في مجالات متنوعة، بدءًا من الصناعة والاقتصاد وحتى الصحة والخدمات اللوجستية، مما يجعلها واحدة من أكثر الأدوات أهمية في عملية صنع القرار.

1. تخصيص الموارد

تُعتبر البرمجة الخطية أداة أساسية في تخصيص الموارد المحدودة مثل المواد الخام، الوقت، العمالة، والمال. في الصناعة، على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد الكمية المثلى من المواد الخام التي يجب استخدامها لتحقيق أقصى ربح مع مراعاة القيود المتاحة.

- مثال تطبيقي: في مصنع لإنتاج الأثاث، قد تكون هناك حاجة لتحديد الكمية المثلى من الخشب، المعدن، والطلاء التي يجب استخدامها لإنتاج أنواع مختلفة من المنتجات (مثل الكراسي، الطاولات، والخزانات) بحيث يتم تحقيق أقصى ربح مع عدم تجاوز الكميات المتاحة من المواد الخام.

- فوائدها: تساعد البرمجة الخطية في تقليل الهدر وزيادة الكفاءة، مما يؤدي إلى تحسين الأداء العام للشركة أو المؤسسة.

2. تحسين القرارات

تساعد البرمجة الخطية في اتخاذ قرارات استراتيجية من خلال تحليل البيانات وتحديد الحلول المثلى. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد المزيج الأمثل للإنتاج، أو اختيار المسارات الأقل تكلفة في النقل والخدمات اللوجستية.

- مثال تطبيقي: في شركة نقل، يمكن استخدام البرمجة الخطية لتحديد المسارات الأكثر كفاءة لتوصيل البضائع إلى العملاء، مع مراعاة عوامل مثل تكلفة الوقود، الوقت، والقيود المفروضة على ساعات العمل.

- فوائدها: تساعد في تقليل التكاليف وزيادة الكفاءة التشغيلية، مما يؤدي إلى تحسين الربحية ورضا العملاء.

3. التخطيط الاستراتيجي

تُستخدم البرمجة الخطية في التخطيط الاستراتيجي لجدولة المشاريع، توزيع المخزون، وتخطيط الإنتاج. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لجدولة المهام في مشروع كبير بحيث يتم استغلال الوقت والموارد بشكل أمثل.

- مثال تطبيقي: في مشروع بناء، يمكن استخدام البرمجة الخطية لتحديد الجدول الزمني الأمثل لتنفيذ المهام المختلفة (مثل الحفر، البناء، والتشطيب) مع مراعاة القيود المتعلقة بالمواد والعمالة.

- فوائدها: تساعد في تقليل الفواقد الزمنية وزيادة الكفاءة في تنفيذ المشاريع، مما يؤدي إلى إنجازها في الوقت المحدد ودون تجاوز الميزانية.

4. الاقتصاد والتمويل

تُستخدم البرمجة الخطية في تحسين المحافظ الاستثمارية، وإدارة المخاطر، وتحديد الأسعار. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد المزيج الأمثل من الاستثمارات التي يجب أن تشكلها المحفظة الاستثمارية لتحقيق أقصى عائد مع تقليل المخاطر.

- مثال تطبيقي: في إدارة المحافظ الاستثمارية، يمكن استخدام البرمجة الخطية لتحديد النسبة المثلى من الأسهم، السندات، والأصول الأخرى التي يجب أن تشكلها المحفظة لتحقيق أقصى عائد مع تقليل المخاطر.

- فوائدها: تساعد في تحسين العوائد المالية وتقليل المخاطر، مما يؤدي إلى تحقيق أهداف المستثمرين بشكل أكثر فعالية.

5. الصحة والطب

تُستخدم البرمجة الخطية في تخصيص الموارد الطبية، مثل توزيع الأدوية أو جدولة العمليات الجراحية. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد الجدول الزمني الأمثل لإجراء العمليات الجراحية في مستشفى مع مراعاة القيود المتعلقة بالأطباء، الغرف، والمعدات.

- مثال تطبيقي: في مستشفى، يمكن استخدام البرمجة الخطية لتحديد الجدول الزمني الأمثل لإجراء العمليات الجراحية بحيث يتم استغلال الموارد المتاحة (مثل غرف العمليات، الأطباء، والمعدات) بشكل أمثل.

- فوائدها: تساعد في تحسين كفاءة الخدمات الطبية وتقليل أوقات الانتظار، مما يؤدي إلى تحسين رضا المرضى وجودة الرعاية الصحية

6. التسويق: تحديد المزيج الأمثل للإعلانات

تُستخدم البرمجة الخطية في مجال التسويق لتحديد المزيج الأمثل للإعلانات التي يجب أن تستثمر فيها الشركة لتعظيم العائد على الاستثمار (ROI). في عالم تسوده المنافسة الشديدة، تحتاج الشركات إلى تخصيص ميزانياتها الإعلانية بشكل استراتيجي لتحقيق أكبر تأثير بأقل تكلفة.

- مثال تطبيقي: قد تحتاج شركة إلى توزيع ميزانية إعلانية محدودة بين عدة قنوات مثل التلفزيون، الراديو، الإنترنت، ووسائل التواصل الاجتماعي. باستخدام البرمجة الخطية، يمكن تحديد النسبة المثلى من الميزانية التي يجب تخصيصها لكل قناة لتعظيم عدد العملاء المحتملين أو المبيعات.

- فوائدها: تساعد البرمجة الخطية في تحسين فعالية الحملات الإعلانية، مما يؤدي إلى زيادة العائد على الاستثمار وتقليل الهدر في الميزانيات التسويقية. كما يمكن استخدامها لتحليل تأثير الإعلانات على فئات مختلفة من العملاء، مما يساعد في تخصيص الموارد بشكل أكثر دقة.

7. الزراعة: تحديد المحاصيل المثلى

في مجال الزراعة، تُستخدم البرمجة الخطية لتحديد المحاصيل التي يجب زراعتها لتعظيم الربح مع مراعاة القيود المتاحة مثل المياه، والأراضي، والأسمدة. هذا مهم بشكل خاص في المناطق التي تعاني من ندرة الموارد أو التغيرات المناخية.

- مثال تطبيقي: قد يحتاج مزارع إلى تحديد المحاصيل التي يجب زراعتها في مساحة محدودة من الأرض، مع مراعاة كمية المياه المتاحة والأسمدة. باستخدام البرمجة الخطية، يمكن تحديد المزيج الأمثل من المحاصيل (مثل القمح، الذرة، أو الخضروات) الذي يعظم الربح مع عدم تجاوز الموارد المتاحة.

- فوائدها: تساعد البرمجة الخطية في زيادة الإنتاجية الزراعية وتحقيق أقصى ربح ممكن مع تقليل الهدر في الموارد الطبيعية. كما يمكن استخدامها لتحسين توزيع المحاصيل وفقًا للظروف المناخية والاقتصادية.

8. البيئة: تحسين استخدام الموارد الطبيعية

تُستخدم البرمجة الخطية في مجال البيئة لتحسين استخدام الموارد الطبيعية وتقليل النفايات. هذا يشمل تحسين إدارة الموارد المائية، تقليل انبعاثات الكربون، وإدارة النفايات الصناعية.

- مثال تطبيقي: في مصنع لإنتاج الطاقة، يمكن استخدام البرمجة الخطية لتحديد المزيج الأمثل من مصادر الطاقة (مثل الفحم، الغاز الطبيعي، والطاقة المتجددة) الذي يقلل من انبعاثات الكربون مع تلبية الطلب على الطاقة.

- فوائدها: تساعد البرمجة الخطية في تحقيق التوازن بين الاحتياجات الاقتصادية والبيئية، مما يؤدي إلى تقليل التأثير السلبي على البيئة وتحقيق الاستدامة. كما يمكن استخدامها لتحسين إعادة تدوير النفايات وتقليل التلوث.

9. التعليم: تخصيص الموارد التعليمية

في مجال التعليم، تُستخدم البرمجة الخطية لتخصيص الموارد التعليمية مثل الفصول الدراسية، المعلمين، والمواد التعليمية بشكل أمثل. هذا مهم بشكل خاص في المؤسسات التعليمية التي تعاني من نقص في الموارد.

- مثال تطبيقي: في جامعة أو مدرسة، يمكن استخدام البرمجة الخطية لتحديد الجدول الزمني الأمثل للفصول الدراسية مع مراعاة عدد المعلمين المتاحين، حجم الفصول، والمواد التعليمية. هذا يساعد في تقليل التضارب في الجداول وضمان استغلال الموارد بشكل فعال.

- فوائدها: تساعد البرمجة الخطية في تحسين كفاءة المؤسسات التعليمية، مما يؤدي إلى تحسين تجربة الطلاب وجودة التعليم. كما يمكن استخدامها لتوزيع المعلمين على الفصول الدراسية بشكل عادل، مما يضمن استفادة جميع الطلاب من الموارد المتاحة

2.2. تاريخ تطور البرمجة الخطية

يعود تاريخ البرمجة الخطية إلى منتصف القرن العشرين، حيث تم تطويرها بشكل رئيسي خلال الحرب العالمية الثانية وما بعدها. كانت الحاجة إلى تحسين استخدام الموارد المحدودة في المجهود الحربي أحد الدوافع الرئيسية لتطوير هذه الأداة الرياضية. في ذلك الوقت، كانت هناك حاجة ماسة لتحسين تخصيص الموارد مثل الوقود، المواد الخام، والقوى العاملة لتحقيق أقصى استفادة منها في المجهود الحربي. ومع نهاية الحرب، انتقلت هذه التقنيات إلى المجالات المدنية، حيث أصبحت البرمجة الخطية واحدة من أهم الأدوات في بحوث العمليات (Operations Research) والعلوم التطبيقية.

كان العالم جورج دانتزغ (George B. Dantzig) هو الرائد في تطوير البرمجة الخطية. في عام ١٩٤٧، قدم خوارزمية السمبلكس (Simplex Method)، والتي أصبحت واحدة من أكثر الخوارزميات استخدامًا في حل مشاكل البرمجة الخطية. تعتمد هذه الخوارزمية على فكرة التحرك عبر رؤوس منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region) للوصول إلى الحل الأمثل. تبدأ الخوارزمية من نقطة بداية في منطقة الحلول الممكنة، ثم تتحرك عبر الرؤوس المجاورة لتحسين قيمة دالة الهدف حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل. كانت خوارزمية السمبلكس ثورية في وقتها، حيث سمحت بحل مشاكل البرمجة الخطية بفعالية كبيرة، خاصة في المشاكل ذات الأبعاد الصغيرة إلى المتوسطة. ومع ذلك، كانت الخوارزمية تعاني من مشاكل في الأداء مع المشاكل الكبيرة جدًا، حيث يمكن أن تستغرق وقتًا طويلاً للوصول إلى الحل.

في عام ١٩٥٨، طور **R. E. Gomory** طريقة القطع المُسطح (Cutting Plane Algorithm) لحل مشاكل البرمجة الخطية ذات المتغيرات الصحيحة (Integer Programming). هذه الطريقة تعتمد على إضافة قيود إضافية (قطع) لتقريب الحل إلى أعداد صحيحة. تبدأ الخوارزمية بحل مشكلة البرمجة الخطية دون قيود الأعداد الصحيحة، ثم تضيف قيودًا إضافية (قطعًا) لتقريب الحل إلى أعداد صحيحة. كانت هذه الطريقة مهمة لحل المشاكل التي تتطلب حلولًا صحيحة، مثل مشاكل التخطيط والتوزيع. ومع ذلك، على الرغم من فعاليتها، كانت هذه الطريقة بطيئة في بعض الحالات، خاصة مع المشاكل الكبيرة والمعقدة.

في عام ١٩٧٩، قدم **L. G. Khachian** الخوارزمية متعددة الحدود (Polynomial Algorithm)، والتي تعتمد على نظرية الأعداد لحل مشاكل البرمجة الخطية في وقت متعدد الحدود (Polynomial Time). تعتمد الخوارزمية على تقنيات هندسية ونظرية الأعداد لإيجاد الحل الأمثل في وقت متعدد الحدود. كانت هذه الخوارزمية ذات أهمية نظرية كبيرة، حيث أثبتت أن مشاكل البرمجة الخطية يمكن حلها في وقت متعدد الحدود. ومع ذلك، على الرغم من أهميتها النظرية، لم تكن الخوارزمية فعالة عمليًا مثل خوارزمية السمبلكس، خاصة في التطبيقات العملية.

في عام ١٩٨٤، طور ناريندرا كارماركار (Narendra Karmarkar) خوارزمية النقاط الداخلية (Interior-Point Method)، والتي تعتمد على تحريك الحلول داخل منطقة الحلول الممكنة بدلاً من التحرك عبر الرؤوس. تبدأ الخوارزمية من نقطة داخل منطقة الحلول الممكنة، ثم تتحرك نحو الحل الأمثل عبر تحسين دالة الهدف. كانت هذه الخوارزمية أكثر فعالية من خوارزمية السمبلكس في بعض الحالات، خاصةً مع المشاكل الكبيرة والمعقدة. ومع ذلك، على الرغم من فعاليتها، كانت الخوارزمية تتطلب موارد حاسوبية كبيرة، مما جعلها أقل استخدامًا في التطبيقات الصغيرة.

مع تطور الحوسبة والذكاء الاصطناعي، تم تطوير العديد من الخوارزميات الهجينة التي تجمع بين خوارزميات البرمجة الخطية التقليدية وتقنيات التعلم الآلي لتحسين الأداء في حل المشاكل المعقدة. تجمع هذه الخوارزميات بين خوارزميات البرمجة الخطية وتقنيات التعلم الآلي لتحسين الأداء في حل المشاكل الكبيرة والمعقدة. تُستخدم هذه الخوارزميات في مجالات مثل الذكاء الاصطناعي، الروبوتات، والتحسين في الوقت الفعلي (Real-Time Optimization). ومع ذلك، على الرغم من تطورها، لا تزال هذه الخوارزميات تواجه تحديات في التطبيقات العملية، خاصة في المشاكل ذات الأبعاد الكبيرة جدًا.

3.2. البرمجة الخطية في العصر الحديث

في العصر الحديث، أصبحت البرمجة الخطية جزءًا لا يتجزأ من العديد من الأنظمة التكنولوجية والاقتصادية، حيث أدى التطور الهائل في الحوسبة وتقنيات الذكاء الاصطناعي إلى توسيع نطاق تطبيقاتها بشكل غير مسبوق. مع ظهور الحواسيب الفائقة والقدرة على معالجة كميات هائلة من البيانات في وقت قياسي، أصبح من الممكن حل مشاكل البرمجة الخطية ذات الحجم الكبير والمعقدة بسرعة ودقة عالية. لم تعد البرمجة الخطية تقتصر على التطبيقات التقليدية مثل تخصيص الموارد

أو تحسين الإنتاج، بل امتدت لتشمل مجالات متقدمة مثل الذكاء الاصطناعي، الروبوتات، الطاقة، والنقل، مما جعلها أداة حيوية في عصر الثورة الصناعية الرابعة.

في مجال الذكاء الاصطناعي، تُستخدم البرمجة الخطية لتحسين نماذج التعلم الآلي وتدريبها. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحسين خوارزميات التصنيف (Classification) أو الانحدار (Regression) من خلال تحديد المعلمات المثلى التي تقلل من الخطأ في التنبؤات. بالإضافة إلى ذلك، تُستخدم البرمجة الخطية في تحسين شبكات العصبية (Neural Networks) من خلال تحسين وظائف الخسارة (Loss Functions) وتحديد الأوزان المثلى للشبكة. هذا يساعد في تحسين دقة النماذج وتقليل الوقت والموارد المطلوبة للتدريب.

في مجال الروبوتات، تُستخدم البرمجة الخطية لتخطيط المسارات الأمثل للروبوتات، سواء في البيئات الصناعية أو في التطبيقات الأكثر تعقيدًا مثل الروبوتات ذاتية القيادة. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد المسار الأكثر كفاءة الذي يجب أن يتبعه الروبوت لتجنب العقبات وتقليل الوقت والطاقة المستهلكة. هذا مهم بشكل خاص في التطبيقات التي تتطلب دقة عالية وسرعة في التنفيذ، مثل التصنيع الذكي (Smart Manufacturing) والخدمات اللوجستية الآلية.

في مجال الطاقة، تُستخدم البرمجة الخطية لتحسين توزيع الطاقة في الشبكات الكهربائية، خاصة مع زيادة الاعتماد على مصادر الطاقة المتجددة مثل الطاقة الشمسية وطاقة الرياح. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد الكمية المثلى من الطاقة التي يجب توليدها من كل مصدر لتلبية الطلب مع تقليل التكاليف وضمان استقرار الشبكة. هذا مهم بشكل خاص في ظل التحديات المتعلقة بتقلب مصادر الطاقة المتجددة والحاجة إلى تحقيق التوازن بين العرض والطلب.

في مجال النقل، تُستخدم البرمجة الخطية لتحسين جدولة الرحلات وتوزيع البضائع، مما يساعد في تقليل التكاليف وزيادة الكفاءة. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد المسارات الأكثر كفاءة لشحن البضائع بين المدن، مع مراعاة عوامل مثل تكلفة الوقود، الوقت، والقيود المفروضة على ساعات العمل. بالإضافة إلى ذلك، تُستخدم البرمجة الخطية في تحسين جدولة الرحلات الجوية، حيث تساعد في تحديد الجدول الزمني الأمثل للرحلات لتقليل أوقات الانتظار وزيادة رضا العملاء.

بالإضافة إلى هذه المجالات، تُستخدم البرمجة الخطية في العديد من التطبيقات الحديثة الأخرى مثل الرعاية الصحية، حيث تساعد في تحسين توزيع الموارد الطبية وجدولة العمليات الجراحية، وفي التجارة الإلكترونية، حيث تُستخدم لتحسين توصيل الطلبات وتقليل التكاليف اللوجستية. كما تُستخدم في الزراعة الذكية، حيث تساعد في تحسين توزيع المياه والأسمدة لزيادة الإنتاجية مع تقليل الهدر.

يمكن القول أن البرمجة الخطية في العصر الحديث قد تجاوزت حدودها التقليدية لتصبح أداة أساسية في العديد من المجالات المتقدمة. بفضل التطورات في الحوسبة والذكاء الاصطناعي، أصبحت قادرة على حل مشاكل معقدة بسرعة ودقة عالية، مما ساهم في تحسين الكفاءة وتقليل التكاليف في العديد من الصناعات. مع استمرار التقدم التكنولوجي، من المتوقع أن تزداد أهمية البرمجة الخطية وتوسع نطاق تطبيقاتها في المستقبل.

4.2. النماذج الرياضية في البرمجة الخطية

النموذج الرياضي للبرمجة الخطية هو تمثيل رياضي لمشكلة واقعية، حيث يتم تحويل المشكلة إلى معادلات ومتباينات خطية يمكن حلها باستخدام أدوات رياضية. النموذج الرياضي للبرمجة الخطية يتكون من ثلاثة عناصر رئيسية كل عنصر من هذه العناصر يلعب دورًا محوريًا في تحديد كيفية صياغة المشكلة وحلها.

1- دالة الهدف (Objective Function): هي الدالة التي نريد تحسينها، سواء كانت تعظيم (Maximization) أو تقليل (Minimization).

صياغة دالة الهدف:

على سبيل المثال، قد تكون دالة الهدف هي تعظيم الربح أو تقليل التكاليف. تُكتب دالة الهدف عادةً على شكل معادلة خطية تعتمد على المتغيرات. على سبيل المثال، إذا كنا نريد تعظيم الربح من إنتاج منتجين x_1 , x_2 وكان الربح من كل منتج هو p_1, p_2 على التوالي، فإن دالة الهدف ستكون:

$Maximize\ Z = p_1x_1 + p_2x_2$ حيث Z تمثل القيمة التي نريد تعظيمها

أمثلة تطبيقية:

- في الصناعة: تعظيم الربح من خلال تحديد الكمية المثلى من المنتجات التي يجب إنتاجها.
- في النقل: تقليل تكاليف الشحن عن طريق اختيار المسارات الأقل تكلفة.
- في الطاقة: تقليل استهلاك الوقود مع الحفاظ على مستوى معين من الإنتاج.

2- المتغيرات (Variables): هي القيم التي نريد تحديدها لتحقيق الهدف. على سبيل المثال، في مشكلة تخصيص الموارد، قد تكون المتغيرات هي كمية المواد الخام المستخدمة.

- أنواع المتغيرات:

- متغيرات مستمرة (Continuous Variables): يمكن أن تأخذ أي قيمة ضمن نطاق معين (أعداد حقيقية).

- متغيرات صحيحة (Integer Variables): يجب أن تأخذ قيمًا صحيحة فقط.

- متغيرات ثنائية (Binary Variables): تأخذ قيمًا إما ٠ أو ١، وتُستخدم لتمثيل قرارات "نعم/لا".

- أمثلة تطبيقية:

- في الزراعة: تحديد كمية المحاصيل التي يجب زراعتها لتعظيم الربح.

- في التصنيع: تحديد عدد الساعات المخصصة لكل آلة لتحقيق الإنتاج الأمثل.

- في الخدمات اللوجستية: تحديد عدد الشاحنات المطلوبة لتلبية الطلب.

3- القيود (Constraints): هي الشروط التي يجب أن تلتزم بها المتغيرات. على سبيل المثال، قد تكون القيود هي الحد الأقصى للمواد الخام المتاحة أو الحد الأدنى للإنتاج المطلوب.

صياغة القيود:

تُكتب القيود عادةً على شكل معادلات أو متباينات خطية. على سبيل المثال، إذا كانت كمية المواد الخام المتاحة محدودة بـb وحدة، وكانت كل وحدة من المنتج x_1 تتطلب a_1 وحدة من المواد الخام، وكل وحدة من المنتج x_2 تتطلب a_2 وحدة، فإن القيد سيكون: $a_1x_1 + a_2x_2 < b$ هذا القيد يضمن أن إجمالي المواد الخام المستخدمة لا يتجاوز الكمية المتاحة

أنواع القيود:

١- قيود المساواة (Equality Constraints): مثل $b = a_1x_1 + a_2x_2$

٢-قيود المتباينة (Inequality Constraints): مثل $b > a_1x_1 + a_2x_2$ أو $b < a_1x_1 + a_2x_2$

- قيود غير سالبة (Non-Negativity Constraints): مثل $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ والتي تضمن أن المتغيرات لا تأخذ قيمًا سالبة.

- أمثلة تطبيقية:

- في الصناعة: تحديد الحد الأقصى للمواد الخام المتاحة.
- في النقل: تحديد السعة القصوى للشاحنات أو الطائرات.
- في الطاقة: تحديد الحد الأدنى والحد الأقصى لإنتاج الطاقة

5.2. أنواع مشاكل البرمجة الخطية

تتنوع مشاكل البرمجة الخطية وفقًا لطبيعة المتغيرات والقيود المطلوبة. هناك عدة أنواع رئيسية من مشاكل البرمجة الخطية، كل منها يُستخدم في تطبيقات مختلفة وفقًا لخصائص المشكلة المطلوب حلها، ومنها:

1. البرمجة الخطية القياسية (Standard Linear Programming)

البرمجة الخطية القياسية هي النوع الأساسي والأكثر شيوعًا من مشاكل البرمجة الخطية. في هذا النوع، تكون دالة الهدف (Objective Function) والقيود (Constraints) خطية، أي أنها تتكون من معادلات أو متباينات خطية. المتغيرات في هذه المشكلة يمكن أن تأخذ أي قيمة حقيقية (أعدادًا عشرية أو صحيحة) طالما أنها تحقق القيود المحددة.

- خصائصها:

- دالة الهدف هي دالة خطية من المتغيرات.
- القيود تكون معادلات أو متباينات خطية.
- المتغيرات يمكن أن تكون أعدادًا حقيقية (ليست بالضرورة صحيحة).

- تطبيقاتها:

تُستخدم البرمجة الخطية القياسية في العديد من التطبيقات مثل تخصيص الموارد، تحسين الإنتاج، وتخطيط النقل. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد الكمية المثلى من المنتجات التي يجب إنتاجها لتعظيم الربح مع مراعاة القيود المتعلقة بالمواد الخام والوقت.

- مثال:

في مصنع لإنتاج الأثاث، قد تكون دالة الهدف هي تعظيم الربح من خلال تحديد الكمية المثلى من الكراسي والطاولات التي يجب إنتاجها، مع مراعاة القيود المتعلقة بكمية الخشب والوقت المتاح.

2. البرمجة الخطية ذات المتغيرات الصحيحة (Integer Linear Programming)

في هذا النوع من البرمجة الخطية، تكون المتغيرات مطلوبة أن تأخذ قيمًا صحيحة (أعدادًا صحيحة). هذا النوع مفيد في التطبيقات التي لا يمكن فيها تقسيم المتغيرات إلى أجزاء عشرية، مثل عدد السيارات التي يجب إنتاجها أو عدد العمال الذين يجب تعيينهم.

- خصائصها:
  - دالة الهدف والقيود تكون خطية.
  - المتغيرات يجب أن تكون أعدادًا صحيحة.
- تطبيقاتها:

تُستخدم البرمجة الخطية ذات المتغيرات الصحيحة في التطبيقات التي تتطلب حلولًا صحيحة، مثل جدولة المهام، تخصيص الموارد، وتخطيط المشاريع. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد عدد السيارات التي يجب إنتاجها في مصنع لتحقيق أقصى ربح مع مراعاة القيود المتعلقة بالمواد الخام والوقت.

- مثال:

في مشروع بناء، قد تكون هناك حاجة لتحديد عدد العمال الذين يجب تعيينهم لكل مهمة بحيث يتم إنجاز المشروع في الوقت المحدد مع تقليل التكاليف. هنا، المتغيرات (عدد العمال) يجب أن تكون أعدادًا صحيحة.

3. البرمجة الخطية المختلطة (Mixed Integer Linear Programming)

البرمجة الخطية المختلطة هي نوع من البرمجة الخطية حيث تكون بعض المتغيرات أعدادًا صحيحة والبعض الآخر أعدادًا حقيقية. هذا النوع يجمع بين خصائص البرمجة الخطية القياسية والبرمجة الخطية ذات المتغيرات الصحيحة.

- خصائصها:
  - دالة الهدف والقيود تكون خطية.
  - بعض المتغيرات تكون أعدادًا صحيحة، والبعض الآخر أعدادًا حقيقية.
- تطبيقاتها:

تُستخدم البرمجة الخطية المختلطة في التطبيقات التي تتطلب مزيجًا من المتغيرات الصحيحة والحقيقية. على سبيل المثال، في تخطيط الإنتاج، قد تكون بعض المتغيرات (مثل عدد الآلات) أعدادًا صحيحة، بينما تكون متغيرات أخرى (مثل كمية المواد الخام) أعدادًا حقيقية.

- مثال:

في مصنع لإنتاج الأغذية، قد تكون هناك حاجة لتحديد عدد الآلات التي يجب تشغيلها (متغيرات صحيحة) وكمية المواد الخام التي يجب استخدامها (متغيرات حقيقية) لتحقيق أقصى ربح مع مراعاة القيود المتعلقة بالوقت والمواد.

4. البرمجة الخطية الثنائية (Binary Linear Programming)

في هذا النوع من البرمجة الخطية، تكون المتغيرات إما ٠ أو ١. هذا النوع مفيد في التطبيقات التي تتطلب قرارات ثنائية (نعم/لا)، مثل اختيار مشاريع معينة أو تحديد مواقع لتوزيع المخزون.

- خصائصها:

- دالة الهدف والقيود تكون خطية.
- المتغيرات تكون إما ٠ أو ١.

- تطبيقاتها:

تُستخدم البرمجة الخطية الثنائية في التطبيقات التي تتطلب قرارات ثنائية، مثل اختيار المشاريع، توزيع المخزون، وتصميم الشبكات. على سبيل المثال، يمكن استخدامها لتحديد المواقع المثلى لتوزيع المخزون في شبكة لوجستية.

- مثال:

في شركة لوجستية، قد تكون هناك حاجة لتحديد المواقع المثلى لتوزيع المخزون بحيث يتم تقليل التكاليف مع ضمان تغطية جميع المناطق. هنا، المتغيرات تكون إما ٠ (عدم اختيار الموقع) أو ١ (اختيار الموقع).

صياغة المشكلة

المشكلات التمثيلية غالبا ما تأتي في صورة كلامية، وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا النموذج بالأساليب المختلفة.

ويمكن إتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي.

1. حدد الكميات التي تحتاج إلى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتأخذ الرموز x1x2
2. عرف هدف المشكلة وعبر عنه رياضياً باستخدام المتغيرات.
3. حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.

4. أضف إلى النموذج الرياضي شرط عدم السلبية (إن جميع المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أو تساوي الصفر).

الخطوات الأساسية المتبعة عند صياغة مشكلة برمجية

1. عند ذكر كلمه مركبات أساسية هي المتغيرات الأساسية X1, 2X
2. عند ذكر أقسام العمل مراحل الإنتاج خطوات العمل تعتبر عدد القيود كل منها قيد على حده
3. عند ذكر كلمة أرباح تعتبر دالة هدف ربح MAX
4. عند ذكر كلمة تكلفة تعتبر دالة هدف تكلفة MIN
5. عند ذكر كمية تحديد الإنتاج أو ساعات العمل هي الكميات في القيد التي توضع بعد إشارة المتباينة وتكتب باللغة الانجليزية
6. عند التأكد من عدد المتغيرات الأساسية إن كانا متغيرين أساسين فقط تحل بالطريقة البيانية أما إن كانا أكثر من متغيرين أساسيين تحل بطريقة السمبلكس
7. دوما تكون إشارة المتباينات في حالة MAX تكون اقل من أو يساوي - دائما
أما في حالة MIN تكون أكبر من أو يساوي - دائما
8. عند ذكر كلمة على الأكثر تكون إشارة المتباينة في القيد اقل من أو يساوي
9. عند ذكر كلمة على الأقل تكون إشارة المتباينة في القيد أكبر من أو يساوي
10. عند ذكر كلمة بالضبط، تماما، تحتوي فقط تكون إشارة القيد يساوي

صياغة المشكلة البرمجية العملية في حالة تعظيم الأرباح

مثال تطبيقي (1)

مصنع الاسي لصناعة الأخشاب في مدينة غزة يصنع نوعين من الأخشاب:

الأول خشب زان بقشرة ميبل، والثاني سويد مطعم.

بحيث يستهلك الأول 8 ساعات في قسم التصنيع والصنفرة، ويستهلك 6 ساعات في قسم الدهان والورنيش

ويستهلك الثاني 7 ساعات في قسم التصنيع والصنفرة، ويستهلك 3 ساعات في قسم الدهان والورنيش.

ويعمل في المصنع عمال بواقع 10 ساعات يوميا في قسم التصنيع والصنفرة، و8 ساعات في قسم الدهان والورنيش.

ويحقق النوع الأول ربحا بمقدار 200 دينار في المتر المكعب ويحقق الثاني 400 دينار في المتر المكعب

المطلوب صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أعلى الأرباح؟

$$MAX\ Z\ =\ 200X_1 +\ 400X_2$$
$$Subject\ to\!:\ 8X_1 +\ 7X_2\ \le 10$$
$$6X_1 + 3X_2 \le 8$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

مثال تطبيقي (2)

تقوم شركة سطركو لصناعة المواد الكيماوية للمنظفات بصناعة مركب يستخدم في التنظيف يتكون من ثلاث مركبات أساسية ويمر بثلاثة مراحل من التصنيع بحيث:
يحتاج المركب الأول في المرحلة الأولى 3 ساعات تصنيع وتركيب، والمرحلة الثانية 4 ساعات تحليل ومعايرة، والمرحلة الثالثة 5 ساعات تعبئة وتغليف.
ويحتاج المركب الثاني في المرحلة الأولى 6 ساعات تصنيع وتركيب، والمرحلة الثانية 2 ساعات تحليل ومعايرة، والمرحلة الثالثة 4 ساعات تعبئة وتغليف
يحتاج المركب الثالث في المرحلة الأولى 7 ساعات تصنيع وتركيب، والمرحلة الثانية 3 ساعات تحليل ومعايرة، والمرحلة الثالثة 2 ساعات تعبئة وتغليف
ويعمل في المصنع عمال بواقع 9 ساعات يوميا في قسم التصنيع والتركيب، و8 ساعات في قسم التحليل والمعايرة، و7 ساعات في قسم التعبئة والتغليف.
وعند قسم التسويق يحقق اللتر الواحد ربحا بمقدار 12 دينار للمركب الأول، و١٤ دينار للمركب الثاني، و16 دينار للمركب الثالث

المطلوب صياغة البرمجة الخطية والذي يعطي أعلى الأرباح؟

$$MAX\ Z\ =\ 12X_1 + 14X_2 + 16X_3$$

$$Subject\ to: 3X_1 + 6X_2 + 7X_3 \ \leq 9$$
$$4X_1 + 2X_2 + \ 3X_3 \ \leq 8$$
$$5X_1 + 4X_2 + \ 2X_3 \ \leq 7$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال تطبيقي (3) يوضح الانتقال من الشكل الوصفي إلى الشكل الرياضي

تقوم شركة اقتصادية بإنتاج ثلاث أصناف مختلفة من البضائع (A,B,C) وكل صنف من هذه الأصناف يمر عبر ثلاث ورش تصنيع على النحو التالي:

الورشة الأولى طاقة العمل القصوى 36 ساعة (6) عمال كل عامل يعمل 6 ساعات مع العلم أن المنتج A يتطلب 3 ساعات عمل داخل الورشة والمنتج B يتطلب 4 ساعات عمل داخل الورشة و المنتج C يحتاج 3 ساعات عمل داخل الورشة.

الورشة الثانية: طاقة العمل القصوى 28 ساعة (4) عمال كل عامل يعمل 7 ساعات مع العلم أن المنتج A يتطلب 2 ساعة عمل داخل الورشة والمنتج B يتطلب 3 ساعات عمل داخل الورشة والمنتج يحتاج 3 ساعات عمل داخل الورشة.

الورشة الثالثة: طاقة العمل القصوى 18 ساعة عمل (3) عمال كل عامل يعمل 6 ساعات مع العلم أن المنتج A يتطلب 1 ساعة عمل داخل الورشة والمنتج B يتطلب 2 ساعات عمل داخل الورشة والمنتج C يحتاج 3 ساعات عمل داخل الورشة.

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل صنف هي:

الصنف A : 50 ل.س

الصنفB : 60 ل.س

الصنف C: 62 ل.س

والمطلوب أكتب الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل صنف لأجل تعظيم ربح الشركة.

الحل:

تعد الخطوة الأولى في كتابة الصيغة الرياضية هي تحديد المتغيرات:

بما أن الشركة تبحث عن الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم الأرباح فإن المتغيرات هي الأصناف وهي:

-المنتج A هو المتغير X_1

-المنتج B هو المتغير X_2

-المنتج C هو المتغير X_3

الخطوة الثانية: نقوم بإنشاء جدول مساعد يحتوي على القيود والعناصر المشكلة لدالة الهدف ويمكننا كتابته بالشكل:

المنتج	الوقت المستغرق في الورشة A	الوقت المستغرق في الورشة B	الوقت المستغرق في الورشة C	الطاقة القصوى للورشات
الورشة 1	٣	4	3	36
الورشة 2	2	3	3	28
الورشة 3	1	2	3	18
ربح الواحدة	50	60	62	-

وبالتالي يمكننا صياغة القيود بالشكل الرياضي على الشكل:

$$3X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 36$$

$$2X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 28$$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 18$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

و يعني القيد الأول أن الوقت المستغرق في إنتاج الكميات في الورشة الأولى يجب أن لا يتجاوز 36 ساعة و كذلك بالنسبة للورشة الثانية لا يتجاوز 28 ساعة و الورشة الثالثة لا يتجاوز 18 ساعة و بما أن المتغيرات هي عبارة عن كميات فيستحيل أن تكون هذه الكميات سالبة لذلك جاء القيد الأخير بعدم السلبية.

كما يظهر لدينا أيضاً من الجدول أن ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول هو 50 وحدة نقدية وربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني هو 60 وحدة نقدية أما المنتج الثالث فربح الوحدة الواحدة 62 وحدة نقدية وعليه فإن تابع الهدف يمكننا كتابته بالشكل:

$$Max :\ Z = 50X_1 + 60X_2 + 62X_3$$

أي أن الهدف الرئيسي من هذا البرنامج الرياضي هو إيجاد قيم التي تجعل تابع الهدف في أعظم قيمة دون تجاوز القيود.

و عليه يكون البرنامج الخطي بالشكل النهائي هو:

$$Max :\ Z = 50X_1 + 60X_2 + 62X_3$$

$$3X_1 + 4X_2 + 3X_3 \ \leq 36$$

$$2X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 28$$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_1 \ \leq 18$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

وعندها نكون قد انتقلنا من الشكل الوصفي إلى الشكل الرياضي.

الفصل الثالث

تحليل الحساسية

تحليل الحساسية

يعتبر تحليل الحساسية (sensitivity analysis) واحدًا من أهم مواضيع البرمجة الخطية حيث يتم من خلاله التعرف على التغير في الحل الأمثل عندما يتغير أحد معاملات متغيرات القرار أو الطرف الأيمن في أحد القيود.

إن تحليل الحساسية يمكن الاستفادة منه بعد التوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية، ويهدف إلى معرفة ما إذا كان التغير في معاملات المسألة سوف يبقى الحل الأمثل للمسألة الأصلية مثالياً أم سوف يتغير إلى حل آخر. وإذا تغير الحل الأمثل، كيف يمكن التوصل للحل الجديد بطريقة بسيطة، ودون الحاجة لحل المسألة الجديدة.

ويقصد بتحليل الحساسية القيام بعملية تحليل كمي، بهدف البحث عن إجابة سؤال بدور مضمونه حول: "ماذا يحدث لو حدث تغير في قيمة كل أو بعض معاملات المتغيرات الداخلة في تركيب النموذج الخطي"، وهو بذلك يعتبر وسيلة هامة للتأكد من مدى مثالية هذا الحل، وهل مازال يعتبر حلاً أمثلاً بعد حدوث التغيرات في قيم المعاملات، أم لا؟ وهل لا يزال يحقق كافة القيود الموضوعة؟ وهل سيظل يمثل الحل الأمثل للفترة المستقبلية؟

1.3. أهمية تحليل الحساسية

أن أهمية تحليل الحساسية ترجع إلى الأسباب الآتية:

أولاً: تحديد مدى استجابة الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه، للتغييرات التي قد يتم إدخالها على قيم المعاملات المتعلقة بهذا الحل.

ثانياً: تحليل ودراسة مدى تأثيرات التغييرات في معاملات النموذج على الحل المثل، والاستفادة من هذه التغييرات في اتخاذ القرارات؛ فعلى سبيل المثال: إذا تبين لنا أن الحل الأمثل (الربح أو التكلفة قد تغير تغييراً ملحوظاً في صالح المنشأة، بسبب تغيير طفيف في المعاملات المعطاة، فإن هذا الأمر قد يستحق الأخذ بهذه التغيرات عند اتخاذ القرارات؛ بحيث أنه إذا ساهمت زيادة الطاقة المتاحة من العمل مثلاً عن طريق وقت عمل إضافي، في تعظيم العائد مقارناً بالتكلفة الزائدة للعمل الإضافي، فإنه يكون من الأفضل في هذه الحالة القيام باتخاذ قرار بالسماح بوقت إنتاج إضافي.

ثالثاً: إمكانية التوصل إلى تقديرات دقيقة لمعاملات (معلمات) نموذج البرمجة الخطية، حيث أن تحديد المعاملات التي تؤثر أكثر من غيرها على قيمة دالة الهدف من شأنه إتاحة إمكانية التوصل إلى أفضل التقديرات لهذه المعلمات وذلك بشكل يساهم في زيادة درجة الثقة في نموذج البرمجة الخطية، وفي
الحل المستخرج منه.

2.3. تحليل الحساسية بيانيا

يستخدم الرسم البياني لتحليل الحساسية في البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين. وفي المثال سنركز على التغير الحاصل في معامل أحد متغيرات في دالة الهدف أو الطرف الايمن في احدى القيود

مثال (2-3)

يقوم مصنع أدوية بإنتاج نوعين من الأدوية: بندول مركز، وبندول عادي.
تتطلب صناعة علبة من البندول المركز ساعتين من العمل وما كميته 100 جرام من المواد الأولية. بينما تتطلب صناعة البندول العادي ساعة واحدة وما كميته 100 جرام من المواد الأولية.
يستطيع المصنع العمل لمدة 100 ساعة في الأسبوع ولديه كمية 8 كيلوجرامات من المواد الأولية. ويربح المصنع من علبة البندول المركز 3 ريالات، ويربح من علبة البندول العادي ريالين. وأخيرًا، فإن الطلب على البندول المركز لا يتعدى 40 علبة
أسبوعيا.
إذا علمت أن المصنع يرغب في تحقيق أكبر كمية ربح ممكنة من بيعه للبندول المركز والبندول العادي، أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة، ثم قم برسم منطقة الحل وأوجد الحل الأمثل.
الحل
نُعرف متغيرات القرار لتكون:

عدد علب البندول المركز المنتجة أسبوعيًا: X_1
عدد علب البندول العادي المنتجة أسبوعيًا: X_2
ومن ثم فإن مسالة البرمجة الخطية تأخذ الصورة التالية:

$$max\ z\ = 3X_1 + 2X_2$$

$$s.t. 2X_2 + X_2 \leq 100$$

$$X_1 + X_2 \leq 80$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبإضافة متغيرات مكملة إلى القيود، نحصل على الصيغة القياسية التالية:

$$max\ z\ = 3X_1 + 2X_2$$

$$s.t. 2X_2 + X_2 + S_1 = 100$$

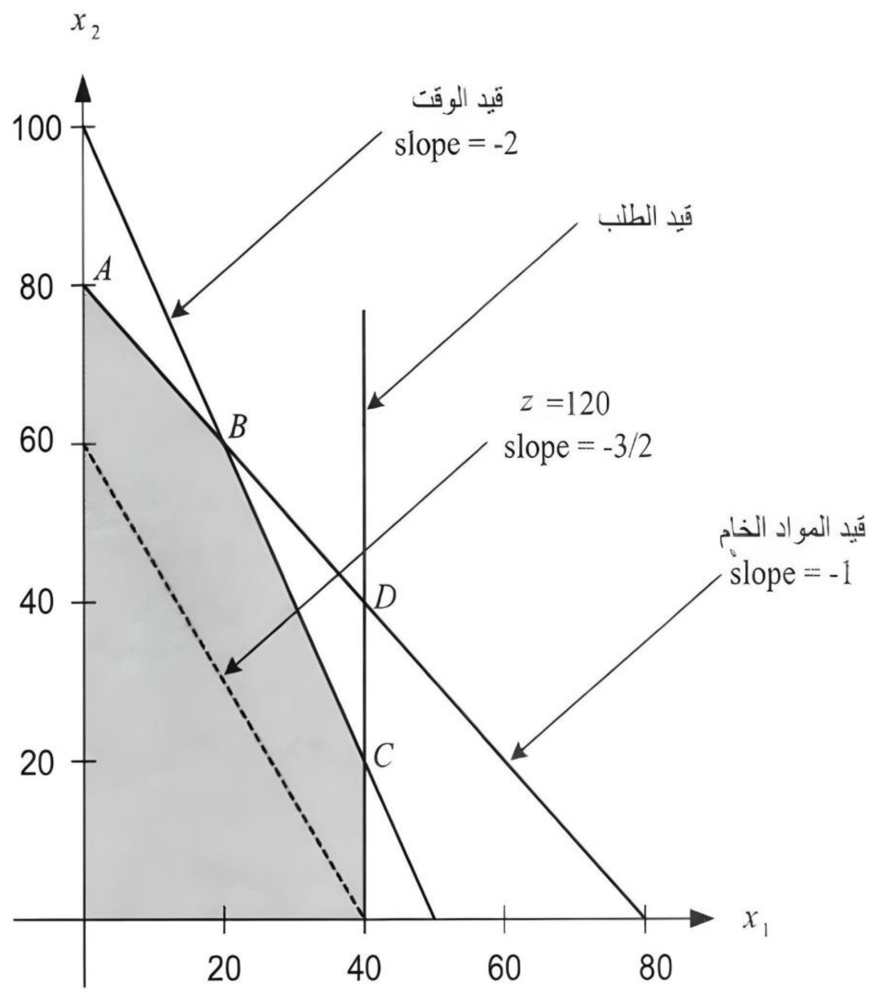
$$X_1 + X_2 + S_2 = 80$$

$$X_1 + S_3 = 40$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

نقوم الآن برسم القيود مع أحد مستقيمات الربح وهو المستقيم $z = 120$ ، كما هو موضح في الشكل (3-1) يمكن حل هذا المثال بطريقة الرسم أو بطريقة اخرى، ومن ثم الحصول على الحل الأمثل $z^* =$ ١٨٠ عند النقطة $X_1^* = 20$ و$X_2^* = 60$ (النقطة B في شكل (3-1))

في هذا الحل كانت المتغيرات الأساسية هي $BV = \{X_1, X_2, s_3\}$، أما المتغيرات غير الأساسية فهي $NBV = \{s_1, s_2\}$



شكل (3-1)

هناك سؤال يتبادر للذهن وهو ما مدى تغير الحل الأمثل في حالة تغير معاملات دالة الهدف أو تغير الطرف الأيمن من القيود؟ فمثلاً كيف سيكون الحل لو أن المصنع قرر أن يكون ربحه من علبة البندول المركز 4 ريالات بدلاً من 3 ريالات، أي لو أصبحت المسألة:

$$max\ z = 4x_1 + 2x_2$$
$$s.t. 2X_2 + X_2 \leq 100$$
$$X_1 + X_2 \leq 80$$

$$X_1 \leq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

في هذه المسألة قمنا بتغيير معامل في دالة الهدف من 3 إلى 4.

سؤال ما الذي سوف يحصل للحل الأمثل لو أن المصنع قرر أن يقلل ساعات العمل الأسبوعي من 100 ساعة إلى 80 ساعة. أي لو أصبحت المسألة:

$$max\ z\ =\ 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t. 2X_2 + X_2 \leq 80$$
$$X_1 + X_2 \leq 80$$
$$X_1 \leq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

أي أننا قمنا بتغيير الطرف الأيمن في القيد الأول من 100 إلى 80. هل الحل الأمثل سوف يظل عند النقطة B؟ إذا كان الحل الأمثل سوف يظل عند النقطة B، فما قيمة دالة الهدف في هذه الحالة؟ وإذا كان الحل الأمثل سوف ينتقل إلى نقطة أخرى، فما هي هذه النقطة؟ وكم قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة؟

-لا نحتاج إلى حل المسألتين من جديد، بل نستطيع أن نوجد حلاً للمسألتين من خلال معرفتنا لحل المسألة الأصلية، وذلك عن طريق تحليل الحساسية.

3.3. حالات الحساسية

اولا: تحليل تغير معاملات دالة الهدف على الحل الأمثل

The Effect of a Change in an Objective Function Coefficient.

يُعد تحليل تأثير تغيير معاملات دالة الهدف من الركائز الأساسية في دراسة حساسية النماذج الرياضية. فالتغيير في قيمة أحد المعاملات، كـ c_1, c_2، يُغيّر من ميل المستقيم الذي تمثله دالة الهدف، مما قد يؤدي إلى انتقال الحل الأمثل من نقطة حدية إلى أخرى في المنطقة الممكنة.

مثال (3-2)

وضح تأثير تغير c_1 (معامل x_1 في دالة الهدف) على الحل الأمثل الحالي في المثال السابق (3-1).

الحل:

بما أن c_3 هي معامل المتغير x_1 في دالة الهدف، إذا c_1 تمثل قيمة البندول المركز بدلاً من 3. نناقش الآن تأثير هذا التغير في الحل الأمثلي الحالي وهو $x_2{}^* = 60$, $x_1{}^* = 20$ و $z^* = 180$. في هذه الحالة تكون مسألة البرمجة الخطية معطاة بالصورة:

$$max\ z = c_1x_1 + 2x_2$$

$$s.t. 2x_2 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

من الواضح أنه لو قمنا بزيادة c_1 بشكل كاف، فإن s_3 وسوف تصبح متغيرا غير أساسي، أما لو قمنا بتقليل c_1 بشكل كافي، فإنه من المتوقع أن x_1 سوف يكون متغيرا غير أساسي.

السؤال الآن ما هي القيم الممكنة لـ c_1لكي يبقى الحل الأساسي الأمثل الحالي حلاً مثالياً للمسألة الجديدة؟

في الوقت الحالي قيمة $c_1 = 3$. إذا أي مستقيم ربحي سوف تكون معادلته بالصورة $z = cons$، أي:

$$3x_1 + 2x_2 = cons$$

سوف نعتبر الآن المستقيم الربحي λ_1والذي له المعادلة التالية:

$$\lambda_1: x_2 = -3x_1/2 + cons/2$$

إذا ميل المستقيم الربحي $-3/2$

وكذلك نعتبر المستقيمين الناتجين عن القيود وهما:

$$\lambda_2 : x_2 = -2x_1 + 100$$

والذي ميله يساوي -2 ، والمستقيم:

$\lambda_3 : x_2 = -x_1 + 80$

والذي ميله يساوي1-.

نأتي الآن للحالة التي تكون فيها قيمة البندول المركز تساوي c_1 في هذه الحالة تكون معادلة المستقيم الربحي بالصورة:

$$\lambda_{c_1} : x_2 = -c_1/2\ x_1 + cond/2$$

وميل المستقيم في هذه الحالة يساوي $-c_1/2$

نلاحظ أنه في حالة زيادة ميل المستقيم λ_{c_1}، فإن الميل سوف يزداد حتى يصبح أكبر من ميل المستقيم λ_3، وفي هذه الحالة سوف يتغير الحل الأساسي الأمثلي من النقطة B إلى النقطة A، أما عند تقليل ميل المستقيم λ_{c_1}، نجد أن الميل سوف يقل حتى يصبح أقل من ميل المستقيم λ_2 يا وفي هذه الحالة سوف يتغير الحل الأساسي الأمثلي من النقطة B إلى النقطة C

نستطيع أن نلخص المثال السابق كالتالي، عند تغير أحد معاملات دالة الهدف فإن الحل الأمثل يظل كما هو ما دام ميل المستقيم $z = cons$ محصور بين ميل المستقيمين الملزمين أي المستقيمين اللذين يعطي تقاطعهما الحل الأمثلي للمسألة الأصلية. وفي هذه الحالة تكون قيم متغيرات القرار هي نفسها في المسألة الأصلية بينما تتغير دالة الهدف وتعتمد قيمتها على معامل دالة الهدف c_i

ثانياً: تحليل تغير الطرف الأيمن على الحل الأمثل

The Effect of a Change in a Right-Hand side of the LP's Optimal Solution

من الممكن استخدام الرسم البياني لتحديد ما إذا كان إحداث تغير في الطرف الأيمن لأحد القيود سوف يغير الحل الأساسي الأمثل الحالي أم لا.

مثال (3-3)

وضح تأثير تغير الطرف الأيمن في القيد الأول على الحل الأمثل الحالي في المثال السابق (3-1). ثم وضح تأثير تغير الطرف الأيمن في القيدين الثاني والثالث على الحل الأمثل الحالي.

الحل:

ليكن b_1 هو عدد ساعات العمل المتاحة. نلاحظ أنه في المسألة الأصلية كانت قيمة b_1 مساوية لـ 100. وفي هذه الحالة سوف يكون القيد الأول معطى بالعلاقة:

$$2x_1 + x_2 \leq b_1$$

السؤال المطروح هنا: ما هي القيم الممكنة لـ بحيث يكون الحل الأساسي الأمثل B حلا مثالياً؟ او بعبارة اخرى ما هي القيم الممكنة لـ b_1بحيث يظل الحل الأساسي الأمثلي نقطة تقاطع المستقيمين λ_1, λ_2 ؟

نلاحظ أننا عندما نقوم بتغيير قيمةb_1 فإن المستقيمات الناتجة هي مستقيمات موازية للمستقيم λ_2 ، هذه المستقيمات نرمز لها بالرمزية λ_b وتعرف كالتالي:

$$\lambda_{b_1} : 2x_1 + x_2 = b_1$$

الحل الأساسي الأمثل كان عند النقطة B وهي نقطة تقاطع المستقيمين λ_{b_1} وλ_3 . عندما تتغير قيمةb_1 فإن الحل الأمثلي لن يصبح عند النقطة B ولكنه سوف يظل عند نقطة تقاطع المستقيمين مادام المستقيمين λ_{b_1} و λ_3 يتقاطعان. سوف نرمز النقطة التقاطع بالرمز B_b

ان من أبرز التغيرات التي سوف تحدث للحل الأمثل:

1- عند زيادة قيمة b_1 ، نجد أن المستقيمين λ_{b_1} و λ_3سوف يتقاطعان حتى نصل إلى النقطة D. وفي هذه الحالة يمكن الحصول على قيمةb_1 بالتعويض عن قيم

$x_1 = 40\ , x_2 = 40$ في $2x_1 + x_2 = b_1$ فينتج ان قيمة b_1 تساوي 120، في هذه الحالة تنطبق النقطة B_bمع النقطة D. نستنتج من ذلك أنه إذا كانت $b \leq 120$ فإن الحل الأمثلي سوف يكون تقاطع المستقيمين λ_{b_1} وλ_3 أي النقطة B_b.

2-عند تقليل قيمةb_1 ، نجد أن المستقيمين λ_{b_1} و λ_3 سوف يتقاطعان حتى نصل إلى النقطة A وفي هذه الحالة يمكن الحصول على قيمةb_1 بالتعويض عن قيمة$x_1 = 0, x_2 = 80$ في العلاقة $2x_1 + x_2 = b_1$ فينتج أن قيمة b_1 تساوي 80 في هذه الحالة تنطبق النقطة B_b مع النقطة A نستنتج من ذلك أنه إذا كانت $b_1 \geq 80$ فإن الحل الأمثلي سوف يكون تقاطع المستقيمين λ_{b_1}و λ_3 أي النقطة B_b .

نستطيع تلخيص ما سبق بأن الحل الأمثل سوف يظل تقاطع المستقيمين λ_{b_1}و λ_3به متى ما كانت قيم b_1محصورة بين$80 \leq b_1 \leq 120$

4.3. تحليل الحساسية باستخدام المصفوفات

:Sensitivity Analysis in Matrix Form

لنفرض أننا قمنا بحل مسألة برمجة خطية وتوصلنا إلى المتغيرات الأساسية الأمثلة BV. ونرغب أن نحدد ما هو تأثير تغيير متغيرات النموذج الرياضي في مسألة البرمجة الخطية على المتغيرات الأساسية السابقة BV. لتحديد ذلك تتبع الخطوات التالية:

1-تستخدم صيغ تحديد قيمة الطرف الأيمن ودالة الهدف في الجدول الأمثل الجديد.

2- إذا كانت جميع المعاملات في الصف Row ٠ غير سالبة وكل قيد يحوي طرفاً أيمنا غير سالب فإن المتغيرات الأساسية BV في هذه الحالة سوف تظل أمثلية. أما إذا أصبح أحد المعاملات في الصف Row ٠ سالبا أو أحد القيود احتوى على طرف أيمن سالب فإن المتغيرات الأساسية BV في هذه الحالة لن تكون أمثلية.

إذ هناك حالتان حتى لا يكون الحل الأساسي BV مثالياً.

الحالة الأولى

أن يكون أحد معاملات المتغيرات في الصف Row مثاليا، في هذه الحالة، نستطيع زيادة قيمة دالة الهدف وذلك باختيار المتغير ذي المعامل الأكبر بإشارة سالبة ليكون متغيرا داخلاً، المتغيرات الأساسية BV للمسألة الأصلية تسمى أساساً جزئياً (suboptimal basis) للمسألة الجديدة

الحالة الثانية

أن يكون الطرف الأيمن لقيد أو أكثر عددًا سالبا في هذه الحالة سوف يكون أحد المتغيرات الأساسية سالبا ولن يكون الحل الناتج مقبولاً. المتغيرات الأساسية BV للمسألة الأصلية تسمى أساسا غير مقبول للمسألة الجديدة (infeasible basis).

مثال (4-3)

لتكن لدينا مسالة البرمجة الخطية والمكتوبة في الصيغة القياسية:

$$max\ z = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$s.t. x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 30$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + s_3 = 18$$

لقد كان الجدول الاولي للمسألة:

$$z - 10x_1 - 20x - 15x_3 = 0$$
$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 30$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + s_3 = 18$$

وكان الجدول الأمثل لهذه المسألة:

$$z + 5/9x_3 + 10/3s_1 + 20/9s_3 = 80$$
$$x_2 + 11/9x_3 + 1/3s_1 - 1/9s_2 = 2$$
$$47/9x_3 + 1/3s_1 + s_2 - 10/9s_3 = 14$$
$$x_1 - 8/9x_3 - 1/3s_1 + 4/9s_3 = 4$$

في هذه الحالة تكون المتغيرات الأساسية $BV = \{x_1, x_2, s_2\}$ والمتغيرات غير الأساسية $NBV = \{X_3, s_1, s_3\}$ والحل الأمثل $z^* = 80$ عند الحل الأساسي:

$$bfs^*: x_2{}^* = 2 , s_2{}^* = 14 , x_1{}^* = 4 , x_3{}^* = s_1{}^* = s_2{}^* = s_3{}^* = 0$$

يمكن أن يتغير الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية عند حدوث تغيير في أحد معاملات مسألة البرمجة الخطية التالية:

1- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي.

2- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي.

3-تغير الطرف الأيمن لأحد القيود.

عندما نقوم بتحليل الحساسية لأي معامل يجب القيام بالتالي:

1- تحديد المجال الذي يتغير فيه المتغير بحيث يظل الحل الأساسي الأمثل الحالي مثاليا بعد التغيير.

2- تحديد قيمة المتغيرات الأساسية.

3- تحديد قيمة دالة الهدف.

تغير معامل دالة الهدف لمتغير غير اساسي

Changing the Objective Function Coefficient of a Nonbasic Variable

عندما يتغير أحد معاملات دالة الهدف المتغير غير أساسي، نجد أن C_N هي الحد الوحيد الذي سوف يتغير، إذا الطرف الأيمن للقيود $B^{-1}b$ لن يتغير، ولكن معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية $c_B B^{-1} N -$ c_Nسوف تتغير، والواقع أن المعامل الوحيد الذي سوف يتغير هو معامل المتغير غير الأساسي. في هذه الحالة نجد أن قيمة المتغيرات الأساسية $x_B = B^{-1}b$سوف تضل كما هي، كما أن قيمة دالة الهدف $z = C_B B^{-1} b$ لن تتغير نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال: لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية والمكتوبة في الصيغة القياسية:

$$max\ z = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$s.t. x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 30$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + s_3 = 18$$

أوجد تحليلاً للحساسية للمسألة الواردة في المثال السابق عندما يتغير معامل المتغير غير الأساسي x_3.

الحل:

في المثال السابق نلاحظ أن المتغير x_3 هو متغير القرار الوحيد غير الأساسي. في المسألة الأصلية كان معامل x_3 هو $c_3 = 15$ السؤال الآن كيف سيتغير الحل الأمثل إذا تغيرت قيمةc_3 ؟ أي ما هي قيم c_3بحيث تظل المتغيرات الأساسية $BV = \{x_2, x_1, s_2\}$ مثاليا؟

لنفرض أننا غيرنا معامل x_3من ١٥ إلى $15 + \Delta$ السؤال الآن ما هي قيم Δ بحيث تظل المتغيرات الأساسية $BV = \{x_2, x_1, s_2\}$ أمثلية؟ لإجابة هذا السؤال نحدد كيفية تغير جدول المتغيرات الأساسية في حالة تغير من ١٥ إلى$15 + \Delta$ في هذه الحالة تكون المعاملات كالتالي:

$c_B = [\ 20\ ,0,10]$ $c_N = [15 + \Delta\ ,0,0\ ]$,

$,N = [4,1,0; 5,0,0; 1,0,1]$, $b = [12,30,18]$ $B = [4, 0 ,1 ; 2,1,3; 3,0,3]$

نلاحظ أن تغير c_3 لن يغير B^{-1} ولا b وعليه فإن الطرف الأيمن $B^{-1}b$ لن يتغير. أي أن المتغيرات الأساسية مازالت مقبولة. وبما أن . x_3 ليس متغيرا أساسيا فإن c_B لن تتغير. نقوم الآن بالتعويض عن المتغيرات السابقة في العلاقة $z + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N = c_B B^{-1} b$

فنحصل على

$$z + \left(\begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15+\Delta & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

والتي يمكن تبسيطها لتصبح:

$$z + (5/9 - \varDelta) x_3 + 10/3 s_1 + 20/9 s_3 = 80$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن لم يتغير كما أن معاملات s_1 و s_3 ولم تتغير، الذي سوف يتغير هو معامل x_3 فقط. كان معاملx_3 في الحل الأمثل 5/9الآن سوف يصبح $5/9 - \varDelta$ إذا المتغيرات الأساسية سوف تظل أساسية مادام $5/9 - \varDelta \geq 0$ أي $\varDelta \leq 5/9$.

الواقع أنه في حالة تغير معامل دالة الهدف المتغير غير أساسي فإنه يكفي أن نقوم بحساب قيمة معامل هذا المتغير في دالة الهدف المثالية ومن ثم التثبت من أن قيمة المعامل الجديد لن تكون سالبة. أي أنه في المثال السابق نقوم بحساب:

$$\bar{c}_3 = \mathbf{c}_B B^{-1} \mathbf{a}_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - (15+\Delta)$$
$$= 5/9 - \Delta$$

إذا المتغيرات الأساسية سوف تظل أساسية طالما $5/9 - \Delta \geq 0$ (أي $\Delta \leq 5/9$) إذا كانت $c_3 \leq 140/9$ فإن المتغيرات الأساسية $BV = \{x_1, x_2, s_2\}$ سوف تكون أمثلية وقيمة z^* لن تتغير أي $z^* = 80$؛ وذلك لأن تغير c_3 لن يؤدي إلى تغير الطرف الأيمن في الصف Row ٠

بينما لو زادت Δ عن ٩/٥ (أي أن $c_3 > 140/9$) فإنه في هذه الحالة سوف تكون المتغيرات الأساسية عبارة عن أساس جزئي، وذلك لأن دالة الهدف في الصف Row 0 أصبحت تحوي معاملاً سالبا. فمثلا لو كانت $c_3 = 16$ لأصبح Row 0

$$z - 4/9x_3 + 10/3s_1 + 20/9s_3 = 80$$

وفي هذه الحالة يصبح x_3 ومتغيرا داخلاً ويتغير الأساس.

وباختصار، إذا كانت $\Delta \leq 5/9$ نجد أن الحل سوف يظل كما هو، أي أن

حل المسألة سوف يكون:

$x_2{}^* = 2$ $x_1{}^* = 4$, $s_2{}^* = 14$,

وقيمة دالة الهدف $z^* = 80$. أما لو كانت $\Delta > 5/9$، فإن الحل الأمثلي للمسألة الأصلية لن يكون مثاليا للمسألة بعد التغيير ونحتاج أن نكمل الحل باستخدام طريقة أخرى

تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي

Changing the Objective Function Coefficient of a Basic Variable

عندما يتغير أحد معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي، نجد أن c_B هي الحد الوحيد الذي سوف يتغير، إذا الطرف الأيمن للقيود $B^{-1}b$ لن يتغير، ولكن معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية هي $c_B B^{-1} N - c_N$ سوف تتغير؛ وذلك لاحتوائها على c_B. في هذه الحالة نجد أن قيمة المتغيرات الأساسية $x_B = B^{-1}b$ سوف تضل كما هي لعدم احتوائها على c_B ، بينما قيمة دالة الهدف $z = c_B B^{-1} b$ سوف تتغير نوضح ذلك من خلال المثال التالي أوجد تحليلاً للحساسية للمسألة الواردة في المثال السابق عندما يتغير معامل المتغير الأساسي x_1

الحل:

عندما يتغير معامل المتغير الأساسي x_1، نلاحظ أن b و B^{-1} لن تتغير، إذا الطرف الأيمن من القيود لن يتغير ولذلك فالحل الأساسي سوف يكون مقبولاً. الآن نحسب التغير في دالة الهدف في الجدول النهائي. سوف نقوم بتغيير c_1 من 10 إلى $10 + \varDelta$ وبذلك فإن $c_B = [\ 20\ 0\ 10 + \varDelta]$ والآن نعيد كتابة دالة الهدف في الجدول الأمثلي كالتالي:

$$z + \left(\begin{bmatrix} 20 & 0 & 10+\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10+\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها بعد التبسيط بالشكل التالي:

$$z + (5/9 - 8/9\varDelta)x_3 + (10/3 - 1/3\varDelta)s_1 + (20/9 + 4/9\varDelta)s_3 = 80 + 4\varDelta$$

حتى تظل المتغيرات الأساسية أمثلية، لابد أن تكون معاملات المتغيرات غير الأساسية غير سالبة، أي أن:

$$5/9 - 8/9\varDelta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varDelta \leq 5/8$$

$$10/3 - 1/3\varDelta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varDelta \leq 10$$

$$20/9 + 4/9\varDelta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varDelta \geq -5$$

إذا المتغيرات الأساسية الحالية سوف تظل أمثلية مادام $-5 \leq \varDelta \leq 5/8$ ، وبما أن $c_1 = 10 + \varDelta$ إذا قيمة c_1التي سوف تحافظ على المتغيرات الأساسية دون تغيير هي $5 \leq c_1 \leq 10 + 5/8$ وفي هذه الحالة نجد أن الحل سوف يظل كما هو أي أن حل المسألة سوف يكون:

$$[x_1{}^* = 4\,; x_2{}^* = 2\,;\ s_2{}^* = 14\,]$$

وقيمة دالة الهدف المثالية $z^* = 80 + 4\varDelta$.

تغير الطرف الأيمن من القيود

Changing the Right-Hand side of a Constraint

عندما يتغير الطرف الأيمن لأحد القيود، نجد أنb هي الحد الوحيد الذي سوف يتغير، إذا الطرف الأيمن للقيود $B^{-1}b$ سوف يتغير، ولكن معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية $c_B B^{-1}N - c_N$ لن تتغير. في هذه الحالة نجد أن قيمة المتغيرات الأساسية $x_B = B^{-1}b$ سوف تتغير، كما أن قيمة دالة الهدف $z = c_B B^{-1}b$

سوف تتغير أيضًا. نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (5-3)

أوجد تحليلاً للحساسية للمسألة الواردة في المثال السابق عندما يتغير الطرف الأيمن في القيد الأول.

الحل:

نلاحظ أن تغير الطرف الأيمن للقيد الأول لن يغير الصف Row 0 في الجدول الأمثل، ولكنه سوف يغير الطرف الأيمن في الجدول الأمثل.

القاعدة هنا أنه مادام الطرف الأيمن لكل قيد في الجدول الأمثل غير سالب فإن الحل الأساسي الحالي يظل مقبولاً ومثاليا، أما لو كان هناك على الأقل طرف أيمن سالب فإن الأساس الحالي لن يكون مقبولاً، ولذلك فلن يكون مثاليا.

في مثالنا السابق لو فرضنا أننا غيرنا من ١٢ إلى $12 + \Delta$فإن الطرف الأيمن للقيود في الجدول المثالي سوف يصبح:

$$B^{-1}\begin{bmatrix} 12+\Delta \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12+\Delta \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\Delta/3 \\ 14+\Delta/3 \\ 4-\Delta/3 \end{bmatrix}$$

وحتى يظل الحل الأساسي الحالي مثاليًا، لابد أن يكون الطرف الأيمن في كل قيد عددًا غير سالب، أي أن:

$$2 + \Delta/3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -6$$

$$14 + \Delta/3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -42$$

$$4 - \Delta/3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 12$$

إذ الحل الأساسي يظل مثالياً في حالة كون $-6 \leq \Delta \leq 12$ أي عندما $-6 \leq b_1 \leq 24$ أما لو كانت $b_1 < 6$ أو $b_1 > 24$ فإن الأساس الحالي لن يكون مقبولاً
فهو من ثم ليس حلاً مثالياً
من الواضح أن تغير الطرف الأيمن في حالة كون $-6 \leq b_1 \leq 24$ سوف يبقي على المتغيرات الأساسية كمتغيرات أساسية في المسألة الجديدة، إلا أن قيمة دالة الهدف والمتغيرات الأساسية سوف تتغير بالطبع. نقوم الآن بحساب قيمة المتغيرات الأساسية وكذلك دالة الهدف عندما تتغير b_1 بمقدار Δ بحيث $-6 \leq \Delta \leq$ 24 وبما أن قيمة المتغيرات الأساسية تعطى بالعلاقة $B^{-1}b$ وقيمة z تعطى بالعلاقة $c_B B^{-1} b$ نجد أن تغير b سوف يؤدي إلى تغير قيم متغيرات القرار وكذلك قيمة الدالة z إذا قيمة الحل
الأمثل تعطى بالعلاقة:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12+\Delta \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\Delta/3 \\ 14+\Delta/3 \\ 4-\Delta/3 \end{bmatrix}$$

بينما قيمة z^* سوف تصبح:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12+\Delta \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\Delta/3 \\ 14+\Delta/3 \\ 4-\Delta/3 \end{bmatrix}$$

وكمثال على ذلك، لنفرض أن b_1تغيرت إلى ٢١ (أي أن $\Delta = 9$)، في هذه الحالة، الحل الأساسي سوف يظل أمثليًا، وسوف تكون قيم المتغيرات الأساسية كالتالي:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2+9/3 \\ 14+9/3 \\ 4-9/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بينما قيمة z^* سوف تصبح:

$$z^* = c_B B^{-1} b = 80 + 9(10/3) = 110$$

وبهذا نكون قد أوجدنا قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف عند تغير الطرف الأيمن في قيود المسألة الأصلية.

المصادر

[1]الاستاذ الدكتور محمد الطراونة و الاستاذ الدكتور سليمان عبيدات ،مقدمة في بحوث العمليات عمان - الاردن، دار النشر دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة ٢٠١٠ م

[2] أ.د. عبد المنعم فليح عبد الله، أ.د خالد عبد المنعم زكي لبيب ،د. طه الطاهر إبراهيم، د. محمد عبد العظيم حسن، بحوث العمليات في المحاسبة، القاهرة – مصر، دار النشر جهاز الكتب – كلية التجارة – جامعة القاهرة٢٠١٨م

[3] د. دلال صادق الجواد د. حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، عمان -الاردن ، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع،

٢٠٠٨م

[4] د. ابراهيم بن صالح العليان، مقدمة في البرمجة الخطية، الرياض - المملكة العربية السعودية ،دار جامعة الملك سعود للنشر ،٢٠٠٧م

[5] د. خالد بن موسى الطاسان ٢٠١٩م، المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة، الرياض- المملكة العربية السعودية ،دار جامعة الملك سعود للنشر ،٢٠١٩م

[6] د.م. ابو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، القاهرة -مصر، دار النشر المجموعة العربية للتدريب والنشر،٢٠٠٩م

[7] Hamdy A. Taha،"Operations Research: An Introduction،Upper Saddle River, New Jersey, USA،Pearson Education, Inc.2007.