جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية الاساسية - قسم الرياضيات

بعض طرائق حل انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية الاساسية في جامعة ميسان و هو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات

اعداد الطالب

يوسف فاضل محسن

بأشراف الاستاذ

م . احمد اسماعيل

١٤٤٥هـ ٢٠٢٤م

إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة بـ بعض طرائق حل انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة المقدمة من قبل الطالب (يوسف فاضل محسن) قد جرت بأشرافي في جامعة ميسان - كلية التربية الأساسية وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في التربية الاساسية (الرياضيات) .

التوقيع :

الاسم : م . احمد اسماعيل محمد

توصية رئيس قسم الرياضيات

بناء على التوصيات المتوافرة أرشح هذه الرسالة للمناقشة

التوقيع :

الاسم : م . د . سامي عطية سيد

رئيس قسم الرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة يونس اية (٥)

الإهـداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلّت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلـم

(والدي العزيز)

إلى من وضعتني على طريق الحياة

(امي (رحمها الله))

الى من كان لهـم بالغ الأثر في كثير من العقبات والصعاب .

(الام التي ربت ، إخوتي و اخواتي)

إلى المرأة التي صنعت أيامي وكللتها بالجمال

(زوجتي العزيزة)

إلى جميع أساتذتي الكرام ؛ممن لم يتوانوا في مد يد العون لي . . .

اهدي جهدي المتواضع هذا

الشكر والتقدير

" ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي "

الحمد لله رب العالمين . . والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آلة وصحبه الطيبين الطاهرين وعلى أله وصحبه اجمعين .

بعد الشكر والثناء اشكر الله سبحانه وتعالى على توفيقه وفضله والذي من علي بنعمة الصبر ويسر امري وشد من ازري .

ويطيب لي ان اشكر كل من غمرني وجاد علي بعلمه واحاطني بطوق العرفان الجميل وها انا احمل نفحات شكري بين كفتي وانحني اجلالا واحتراما إلى الاستاذ ومشرف بحثي م . احمد اسماعيل لجهده في غمر هذا البحث بفيض علمه وسديد توجيهاته ومتابعته العلمية الجادة والمخلصة في تصحيح هفواتي وتقويم خطوات عملي فله من الله جزيل الشكر والاجر كما اتوجه بالشكر والعرفان الى اساتذتي في القسم الرياضيات في كلية التربية الاساسية الذين غمروني بفضلهم وعلمهم وتوجيهاتهم سائلا المولى عز وجل لهم التوفيق وجزيل الثواب .

كما لا يفوتني أن أشكر الذين مهما كتبت في حقهم من عبارات الشكر والامتنان لن أو فيهم حقهم والدي العزيزين وأخوتي وأخواتي زوجتي واولادي الذين تعلمت منهم معاني الكفاح وغرسوا حب العلم بداخلي فلهم خالص دعواتي أن يوفقهم الله لمرضاته

وعسى الله أن يوفقنا إلى ما فيه خير لنا "

الفهرس

المستخلص (Abstract) :

تهدف الدراسة المعروضة في هذا البحث الى بيان انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة و اهم الطرائق المستخدمة لحل هذا النوع من الانظمة لذلك تطرقنا في **الفصل الاول** الى اهمية واهداف البحث بالإضافة الى النبذة التاريخية والمقدمة و **الفصل الثاني** احتوى على اهم التعاريف الخاصة بالمعادلات التفاضلية والأنظمة بصورة خاصة فيما اقتصر **الفصل الثالث** على ذكر اهم الطرائق لحل انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة

الفصل الاول

مقدمة

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت اهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

سوف نتناول في بحثنا هذا انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة وطرائق حلها مع الأمثلة على طرق حلها حيث تطرقنا في **الفصل الاول** الى اهمية واهداف البحث بالإضافة الى النبذة التاريخية والمقدمة و **الفصل الثاني** احتوى على اهم التعاريف الخاصة بالمعادلات التفاضلية والأنظمة بصورة خاصة وأنواع حلول المعادلة التفاضلية وكيفية تحول المعادلة التفاضلية الى نظام معادلات فيما اقتصر **الفصل الثالث** على ذكر أهم الطرائق لحل انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة

نبذة تاريخية :

تتمتع المعادلات التفاضلية بتاريخ غني يعود تاريخه إلى القرن السابع عشر عندما قام إسحاق نيوتن وجو تفريد فيلهلم لايبنتز بشكل مستقل بتطوير حساب التفاضل والتكامل، والذي وضع الأساس لدراسة المعادلات التفاضلية. تعتبر هذه المعادلات أساسية في وصف الظواهر المختلفة في الفيزياء والهندسة والاقتصاد والبيولوجيا. تتضمن دراسة المعادلات التفاضلية فهم العلاقات بين الدوال ومشتقاتها، والتي تمثل معدلات التغير والكميات الفيزيائية.

مع مرور الوقت، تطورت المعادلات التفاضلية لتصبح أداة حاسمة في نمذجة أنظمة العالم الحقيقي والتنبؤ بسلوكها. من المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى إلى المعادلات التفاضلية الجزئية المعقدة، كانت هذه الأدوات الرياضية مفيدة في تقدم المعرفة العلمية والتطورات التكنولوجية. أحدث تحويل لابلاس، الذي تم تقديمه في القرن الثامن عشر، ثورة في حل المعادلات التفاضلية عن طريق تحويلها إلى معادلات جبرية، مما أدى إلى تبسيط تحليلها.

اليوم، تلعب المعادلات التفاضلية دورًا مركزيًا في مجالات متنوعة، بما في ذلك الهندسة والفيزياء والاقتصاد وعلم الأحياء. إن القدرة على نمذجة الأنظمة الديناميكية والتنبؤ بالسلوكيات وتحليل الظواهر المعقدة تجعل دراسة هذه المعادلات أمرًا لا غنى عنه في البحث العلمي الحديث والتقدم التكنولوجي. إن التطوير المستمر وتطبيق المعادلات التفاضلية يسلط الضوء على أهميتها الدائمة في فهم العالم من حولنا.

اهمية البحث :

تكمن اهمية بيان طرائق الحل لأنظمة المعادلات التفاضلية في فهم سلوك النظام الديناميكي وتحديد كيفية تغير الكميات مع مرور الوقت. يتم ذلك من خلال البحث عن دوال تفاضلية تحقق المعادلة التفاضلية وتمثل الحلول الممكنة للنظام. يتيح حل نظم المعادلات التفاضلية لنا فهم الظواهر الطبيعية والتنبؤ بالتغيرات المستقبلية في النظام.

أهداف البحث:

نهدف من هذا البحث الى:

- معرفة المعادلات التفاضلية و تصنيفها من حيث الرتبة والدرجة
- ايجاد الحل الخاص والحل العام
- التعرف على المعادلات التفاضلية الخطية وانواعها
- تحويل المعادلة التفاضلية الى نظام معادلات تفاضلية
- دراسة طرائق حل انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة

الفصل الثانـي

التعاريف والمفاهيم الاساسية

تعريف (1-2) : المعادلة التفاضلية (Differential Equation) [5] :

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير(المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات

وتسمى المعادلة التفاضلية :

١. المعادلة التفاضلية عادية (Ordinary Differential Equation) إذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد ، وبالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية .
٢. المعادلة التفاضلية الجزئية (partial Differential Equation) هي معادلة تفاضلية فيها المتغير التابع دالة لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية

مثال (1-2) :

ليكن x المتغير المستقل و y المتغير التابع فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية عادية :

$$\frac{dy}{dx}+y=3x^2 \qquad (1)$$

$$x\frac{d^{3y}}{dx^3}+\frac{(2sinx)d^{2y}}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dx}=(3-x^2)y \qquad (2)$$

$$\frac{d^{2y}}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (3)$$

$$(x-y)dx+(x+y)dy=0 \qquad (4)$$

ليكن U المتغير التابع و x ,y ,z المتغيرات المستقلة فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية جزئية :

$$\frac{\partial U}{\partial x}+3\frac{\partial U}{\partial y}=0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=f(x,y,z) \qquad (6)$$

ملاحظة (2-1) :

كثير ما نستخدم الاشرطة المائلة للدلالة على المشتقة الاعتيادية فمثلاً:-

المشتقة الأولى للمتغير y بالنسبة إلى x تكتب على الصورة : $y' = \frac{dy}{dx}$

المشتقة الثانية تكتب على الصورة : - $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة تكتب على الصورة : $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

والمشتقات العليا تكتب على الصورة : $y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$

حيث توضح مرتبة المشتقة أعلى المتغير وبين قوسين لتميزها عن الأس على ذلك $y^{(4)}$ تعني المشتقة الرابعة $y^{(5)}$ تعني المشتقة الخامسة وعليه يمكن كتابة المعادلة (2) من مثال (2-1) على الصورة :-

$$xy''' + (2sinx)y''y' = (3 - x^2)y$$

تعريف (2-2) : رتـبـة الـمـعــــادلة الـتـفـاضـلـيـة (Order of Differential Equation) [3]

تكون رتبه المعادلة هي اعلى مشتقه موجودة بالمعاملة.

من المثال السابق (2-1) :

المعادلة التفاضلية (1) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى .

المعادلة التفاضلية (2) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثالثة ..

المعادلة التفاضلية (3) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية .

المعادلة التفاضلية (4) هي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى .

تعريف (2-3) : درجة المعادلة التفاضلية (Degree of Differential Equation)

هي درجة (اس) أعلى مشتقة في المعادلة شريطة ان تكون المشتقة الأعلى في المعادلة خالية من الأسس الكسرية.

من المثال السابق (1-2) :-

المعادلة (1) و (2) و (3) و (4) هي معادلات تفاضلية اعتيادية من الدرجة الأولى .

بينما المعادلة :

$$\left(\frac{d^2y}{dc^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = e^x sinx \qquad (7)$$

هي معادلة تفاضلية اعتيادية من الدرجة الثالثة .

ملاحظة (1-2) [5] :

هناك بعض المعادلات التي لا يمكن تحديد درجتها إلا بعد وضعها على صورة خالية من الجذور

فمثلا :

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0 \qquad (8)$$

بتربيع الطرفين

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(-3\frac{d^2y}{dx^2} - xy\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2$$

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} + x^2y^2 - 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad (9)$$

وأصبحت هذه المعادلة معادلة تفاضلية اعتيادية من الدرجة الاولى والرتبة الثانية .

تعريف (2-4) : الثابت الاختياري (Arbitrary Constant) [5] :

عادة ما تظهر ثوابت في حل المعادلة التفاضلية، ويكون الثابت اختيارياً إذا كانت القيم التي يأخذها لا تعتمد على المتغير التابع أو المتغير المستقل، وتكون الثوابت الاختيارية الداخلة في تعبير ما جوهرية إذا لم يكن دمج احدها في ثابت آخر

مثال (2-2):-

اذا كانت $T(x) = Ae^{-x^2+B}$ ما قد يبدو لأول وهلة أن هناك ثابتين A و B ولكن بإمعان النظر ترى أنه يمكن دمج الثابتين في ثابت جوهري واحد بالتالي : $T(x) = Ae^{-x^2+B} = Ae^{B}.e^{-x^2} = ce^{-x^2}$

حيث : $c = Ae^{B}$

تعريف (2-5) : حل المعادلة التفاضلية (Solution of Differential Equation) [2] :

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)) = 0$ إذا كانت :

(١) قابلة للاشتقاق n من المرات .

(٢) تحقق المعادلة التفاضلية أي أن $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)) = 0$

مثال (2-3) :

أثبت أن $y(x) = csinx$ حلا للمعادلة $y'' + y = 0$ حيث C ثابت اختياري .

الحل :

$$y''(x) = -c\ \sin x\ , \qquad y'(x) = c\ \cos x\ , \qquad y(x) = c\ sinx$$

وعلى ذلك نجد أن:

$$y'' + y = -c\ \sin x\ +\ c\ \sin x\ = 0$$

تعريف (2-6) أنواع حلول المعادلة التفاضلية (Types of differential equation solutions) :

- **الحل العام** [1] : يسمى حل المعادل التفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختيارية بالحل العام
- **الحل الخاص** [1] : هو أي حل وقد نحصل عليه من الحل العام وذلك بإعطاء ثوابت اختيارية قيماً محددة
- **الحل الشاذ** [7] : هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يمكن ان يستنتج من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية

مثال (2-4) [1] **:** الحل العام للمعادلة $y''' = -\omega^2\ y$ يكون $y = A\ cos\ \omega + B\ \sin\ \omega$
بوضع $A = B = 1$ مثلا نجد ان $y = A\ cos\ \omega + B\ \sin\ \omega$ هو الحل الخاص

مثال (2-5) [7] **:**

تحقق من كون $y = cx + \frac{c^2}{2}$ تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية $y = xy' + \frac{y'}{2}$

بينما $y = -\frac{x^2}{2}$ تمثل الحل الشاذ لها

الحل $y = cx + \frac{c^2}{2} \qquad , \ y' = c$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد انها تحقق المعادلة التفاضلية

كذلك

$$y = -\frac{x^2}{2} \qquad , \qquad y' = -x$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد انها تحقق المعادلة التفاضلية

ولكن الحل $y = -\frac{x^2}{2}$ لا يمكن ان يستنتج من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية اذن فان الحل $y = -\frac{x^2}{2}$ يمثل حل شاذ للمعادلة التفاضلية

تعريف (2-7) الشروط الابتدائية والشروط الحدية [2] :

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية . وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

مثال (2-6) :

اوجد حل المعادلة $y' = 2x$ التي تحقق $y(2) = 3$

الحل

بتكامل المعادلة التفاضلية $y = x^2 + c$

بالتعويض في الشرط $c = -1 \qquad \rightarrow \qquad \therefore 3 = 4 + c$

∴ الحل المطلوب $y(x) = x^2 - 1$

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوى على ثابتين اختياريين ، لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة ، وهذان الشرطان يأخذا صوراً مختلفة ومنها :

١- اذا اعطى هذان الشرطان عند نفس النقطة x_0

$$y(x_0) = a \qquad , \qquad y'(x_0) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند x_o ونسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية Initial Value Problem .

٢- إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y = (x_1) = y_1 \quad , \quad y(x_2) = y$

كانت الشروط شروطاً حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية Boundary Value Problem .

مثال (2-7) :

(١) اوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$y'' = x \,, \qquad y(0) = 1 \;, \qquad y'(0) = -1$$

الحل :

بأجراء التكامل مرتين

$$y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

الذي يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة

حيث $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

وبالتعويض في الشروط الابتدائية : $y'(0) = -1 \quad \rightarrow \quad -1 = c_1$

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = c_2$$

(٢) اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y'' = 6x + 2$$

مع شروط الحدية $y(0) = 2 \quad , \qquad y(2) = 8$

الحل :

بتكامل طرفي المعادلة مرتين بالنسبة الى x ، نجد ان :

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية فنحصل على : $y(0) = 2 \quad , \quad \therefore 2 = B$

$$y\,(2) = 8 \;, \quad \therefore 8 = 8 + 4 + 2A + 2 \quad , \qquad A = -3$$

تعريف (2-8) :المعادلات التفاضلية الخطية (Linear Differential Equations) : [6] :

المعادلة التفاضلية $F(x \;,y\;,y,\ldots, y^n) = o$ تسمى خطيه إذا كانت F داله خطيه في المتغيرات $(y\;,y',\ldots\;,y^n)$

- **تكون الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n على النحو الاتي :**

$$a_0(x)yn + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = g(x) \qquad (10)$$

وأي معادله تفاضليه لا تكون على هذه الصورة فإنها تكون غير خطية فمثلا المعادلة

$y'' + 2ex\,y'' + y\,y' = x$ غير خطيه لوجود $y\,y'$ اما $y'' + y = 0$ فهي خطيه

- **والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الأولى هي**

$$y' + p\,(x\,)y = Q(x) \qquad (11)$$

حيث $p(x)$,$Q(X)$ دوال متصلة في x ومعامل y' يساوي الوحدة وإذا كانت وحالة خاصة $Q(x)=0$ فتؤول المعادلة (١) إلى الصورة :

$$y' + p\,(x\,)y = 0 \qquad (12)$$

تعريف(2-9) : المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة [6]:

- **تسمى المعادلة (12) بالمعادلة الخطية المتجانسة**
- **أما المعادلة (11) فهي معادله خطيه غير متجانسة**

(2-10) نظم المعادلات التفاضلية [5] :

مجموعة معادلات تفاضلية لعدة متغيرات تابعة لمتغير مستقل واحد كما يمكن تحويل كل معادلة تفاضلية إلى مجموعة معادلات تفاضلية من المرتبة الاولى

تحويل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n إلى نظام المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى في n متغير [7] :

اذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = f(t) \qquad (13)$$

فانه يمكن تحويل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n إلى نظام من المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى كما يلي:

نأخذ $x = x_1$

$$x'_1 = x_2$$

$$x = -b(t)x_1 - a(t)x_2 + f(t) \qquad (14)$$

اذن نحصل على نظام المعادلات التفاضلية الخطية بالمصفوفات :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

أي ان :

$$x' = AX + F(t)$$

حيث :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} , \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & a(t) \end{bmatrix} , \quad F(t) \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

تعريف (2-10) : تعرف القيمة المميزة والمتجهات المميزة (Eigenvalues and Eigenvectors) [4] :

تعرف القيمة المميزة (eigenvalue) للمصفوفة المربعة A من الرتبة n x n على أنها تلك القيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة A X = λ X حيث X هي مصفوفة العمود من الرتبة ١× n والمقابلة للقيمة المميزة λ . تسمى المصفوفة X المتجه المميز (Eigenvector) للمصفوفة A والمقابل للقيمة المميزة λ إذا كانت A هي المصفوفة

$$A = [a_{ij}] \; ; \; i = 1, n \; ، j = 1, n$$

فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا كان وفقط إذا كان $|\lambda I_n - A| = 0$ والعكس فإذا كانت λ هي قيمة مميزة فإن أي حل غير صفري للمصفوفة A (Nontrivial Solution) , X , للنظام $|\lambda I_n - A| = 0$ حيث 0 هي المصفوفة الصفرية هو متجه مميز مقابل للقيمة المميزة λ .

هذا، وللحصول على القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ للمصفوفة A X = λ X يتم فك المحدد $|\lambda I_n - A| = 0$ فنحصل على معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في القيمة المميزة λ . بحل هذه المعادلة تحصل على عدد n من القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$. وبما أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ يوجد متجه مميز ، بحيث أن

$$A\,X_i = \lambda_i\,X_i \quad \forall\ i = 1, n$$

إذاً فللحصول على المتجه المميز X_i المقابل للقيمة المميزة λ_i علينا بحل نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس

$$|\lambda_i\, I_n - A| X_i = 0 \ \forall\ i = 1, n$$

بما أن المصفوفة $|\lambda_i\, I_n - A| X_i = 0$ مصفوفة شاذة (Singular) حسب التعريف فمن المعروف عندئذ أن حل هذا النظام ليس متجهاً مميزاً واحداً، بل هو فراغ من المتجهات المميزة، الأمر الذي يعني إنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد عدد لا نهائي من المتجهات المميزة X_i

مثال (2-8) :

أوجد القيم المميزة، وكذلك المتجهات المميزة المقابلة لكل قيمة ميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل

المصفوفة A مربعة من الرتبة الثانية، أي أن n = 2 إذا توجد قيمتان مميزتان. المعادلة المميزة للمصفوفة

$$|\lambda\, I_2 - A| = 0 \ \rightarrow\ \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 4 \\ 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 1)(\,\lambda + 3) = 0$$

إذا القيم المميزة هي $\lambda_1 = -1\,, \quad \lambda_2 = 3$

للحصول على المتجهات المميزة في مقابل القيمة المميزة $\lambda_1 = -1$

نوجد حل النظام $|\lambda_1\, I_n - A| X_1 = 0$

او النظام $\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

او النظام $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

والذي يمكن أن يستبدل بالنظام $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

حيث تم استبدال المصفوفة المختزلة (Reduced Matrix) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ حسب طريقة جاوس – جوران و التي تقول أيضاً أن المتغير x_1 هو متغير تابع بينما المتغير x_2 هو متغير مستقل. ولنفرض أن $x_1 = \alpha \neq 0$ حيث α تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر. بما أن

$$0x_1 + x_2 = 0 \quad , \quad x_2 = 0$$

اذا فان

$$x_1 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha}{0} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فراغ لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً اختيارية ماعدا الصفر.

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$

نوجد حل النظام $|\lambda_2 I_n - A| X_2 = 0$

او النظام $\left(3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

او النظام $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

والذي يمكن أن يستبدل بالنظام $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

حيث تم استبدال المصفوفة المختزلة (Reduced Matrix) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حسب طريقة جاوس – جوران كذلك نرى أن المتغير x_1 هو متغير تابع بينما المتغير x_2 هو متغير مستقل. ولنفرض أن $x_2 = \beta \neq 0$ حيث β تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر. بما أن

$$x_1 - x_2 = 0 \quad , \qquad x_1 = x_2 = \beta$$

اذا فان

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \quad \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فراغ لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β نأخذ قيماً اختيارية ماعدا الصفر.

الفصل الثالث

بعض طرائق حل انظمة المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة

المقدمة :

هناك عدة طرائق لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة منها

١- طريقة الحذف
٢- طريقة المؤثر التفاضلي
٣- طريقة المؤثر التفاضلي المختصرة
٤- طريقة لا بلاس
٥- طريقة الحلول المتممة والخاصة
٦- طريقة المصفوفات (استخدام مفهوم القيم المميزة و المتجهات المميزة)

سندرس في هذا الفصل ثلاث طرائق فقط وهي

١- طريقة المؤثر التفاضلي
٢- طريقة الحلول المتممة والخاصة
٣- طريقة المصفوفات (استخدام مفهوم القيم المميزة و المتجهات المميزة)

اولاً / طريقة المؤثر التفاضلي [4] :

مثال (3-1) :

اوجد حل النظام

$$\left.\begin{array}{ll} x' + y' = e^t & ; \; x = x(t) \\ x' + x + y = 1 & ; \; y = y(t) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

الحل/

هذا نظام مكون من معادلتين تفاضليتين خطيتين من الرتبة الأولى في مجهولين هما

$x = x(t)$ $y = y(t)$ باستخدام المؤثرات التفاضلية يتحول النظام المعطى إلى الشكل

$$\left.\begin{array}{r} Dx + Dy = e^t \\ (D+1)x + y = 1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

للحصول على المجهول الاول $x = x(t)$ يتم ضرب المعادلة الثانية في (-D) فيتحول النظام الى

$$DX + Dy = e^t$$

$$-D(D+1)x + Dy = 0$$

بالجمع نجد ان

$$-D(D+1)x + Dx = e^t \quad \Longrightarrow D^2x = -e^t$$

وبالتالي

$$x'' = -e^t \qquad (3)$$

بالتأكيد يمكن اعتبار المعادلة (3) معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية يمكن حلها بفصل المتغيرات

$$x' = -e^t + c_1$$

وبالتكامل مره اخرى نحصل على

$$x = -e^t + c_1 + c_2 \qquad (4)$$

و للحصول على المجهول الثاني $y = y(t)$ يتم ضرب المعادلة الاولى من النظام (2) في (D+1) وضرب المعادلة الثانية في (-D) فيتحول النظام (2) الى نظام

$$D(D+1)x + D(D+1)y = (D+1)e^t$$

$$(-D)(D+1)x - Dy = 0$$

بالجمع نجد ان

$$D(D+1)y - Dy = (D+1)e^t = De^t + e^t$$

وبعد الاختصار

$$D^2y = 2e^t$$

وهذا الاخيرة يمكن ان تأخذ شكل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية أي يمكن ان تأخذ الشكل

$$y'' = 2e^t \qquad (5)$$

وبالتكامل مره واحدة نحصل على

$$y' = 2e^t + k_1$$

وبالتكامل مرة اخرى نحصل على

$$y = 2e^t + k_1 t + k_2 \qquad (6)$$

للحصول على الثوابت c_2 , c_1 , k_2 , k_1 نعوض المعادلة (4) ، (6) عن x , y في النظام (2)

$$Dx + Dy = e^t$$
$$(D+1)x + y = 1$$

فنحصل على النظام

$$\left.\begin{array}{r} -e^t + c_1 + 2e^t + k_1 = e^t \\ -e^t + c_1 - e^t + c_1 t + c_2 + 2e^t + k_1 t + k_2 = 1 \end{array}\right\} \quad (7)$$

وهكذا نحصل من المعادلة الاولى من هذا النظام على العلاقة بين الثابتين k_1 و c_1 في الشكل

في الشكل

$$c_1 + k_1 = 0 \quad \rightarrow \quad k_1 = -c_1$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد ان

$$k_2 = 1 - c_1 - c_2$$

وهكذا نجد ان حل النظام المعطى هو

$$x = -e^t + +c_1 t + c_2 \quad , \quad y = 2e^t - c_1(t+1) - c_2 + 1$$

ثانياً / طريقة الحلول المتممة و الخاصة [8] :

يمكن تلخيص هذا الأسلوب المستخدم في حل نظم المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وكالتالي :

أ / اكتب المعادلة المتممة :

يتم هذا بأبدال الطرف الايمن لكل معادلة في النظام بصفر

ب / جد الحل المتمم :

لإيجاده افرض حلولا بالصيغة $x = ae^{mt}$, $y = be^{mt}$ لا وجد المعادلة التي بشكل محددة لـ m ثم جد قيم التي هي جذور هذه المعادلة واستخدمهما لتعيين a و b بدلالة الثوابت الاختيارية، هناك ثلاثة حالات يمكن ان تظهر :

١. الجذور حقيقية ومختلفة في هذه الحالة يمكن كتابة الحل المتمم حالا .

٢. الجذور مكررة. اذا كان الجذران هما m_1 و m_1 مثلا ، فنضرب الحل الاصلي

$$x = ae^{m_1 t} \quad , \quad y = be^{m_1 t}$$

ب t ونضيف مضاعفا ثابتا لـ $e^{m_1 t}$ لنحصل على حل جديد :

$$x = ate^{mt} \quad , \quad y = bte^{mt}$$

حيث يمكن تحديد قيمة كل من k_1 و k_2 وذلك بالتعويض في احدى المعادلات المتممة للنظام.

٣ الجذور خيالية :

في هذه الحالة نستخدم الحقيقة ان الجزئيين الحقيقي والخيالي للحلول يكونان حلولا ايضا.

جـ / جد الحل الخاص

يمكن ايجاده باستخدام طريقة تغيير المعالم اي ابدال الثوابت الاختيارية بدوال لـ : اختيارية، التي يجب ان تحدد بعد ذلك من النظام المعطى . عندئذ يتم الحصول على الحل العام المطلوب بجمع الحلين المتمم والخاص .

يمكن استخدام الاسلوب المذكور انفاً بتعديلات طفيفة لنظم في n من المعادلات ذات n من المجاهيل حيث n>2 مهما يكن فان الحسابات تصبح اكثر مشقة فيما يخص قيم الكبيرة يمكن اختزال العمل وذلك باستخدام المصفوفات التي ستبحث فيما بعد مهما يكن فان احد الاسباب الرئيسة لاستخدام المصفوفات هو من الوجهة النظرية، لأن قيم m ستكون القيم المميزة (characteristic values) أو كما تسمى غالبا بالقيم الذاتية (eigenvalues)، للمصفوفة النظرية مماثلة لنظرية ستورم ليوفيل

مثال (3-2) :

حل النظام :

$$\left.\begin{aligned}(2D-2)x+(D-7)y=t-1\\(3D-2)x+(2D-8)y=e^{-t}\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

نجد الحل التام

$$\left.\begin{aligned}(2D-2)x+(D-7)y=0\\(3D-2)x+(2D-8)y=0\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

ملاحظة (*3-1*) : ان المعادلة التفاضلية المفردة $\Phi(D)y=0$, $D={}^{d}/_{dx}$ يكون لها حلول بالصيغة $y=e^{mx}$ ثم نحدد قيمة الثابت m من المعادلة المساعدة نعمل نفس الشي للنظام (8) فنفرض انه يوجد حل بالصيغة

$$y=be^{mt}\quad,\quad x=ae^{mt}\qquad(10)$$

حيث *a , b , m* ثوابت غير معلومة الان نستخدم ثابتين *a , b* لان ليس من المحتمل ان تكون عندنا المعامل نفسها في (*10*) واذا عوضنا (*10*) في (9) وقسمنا على $e^{mt}\neq 0$ نجد ان :

$$\left.\begin{aligned}(2m-2)a+(m-7)b=0\\(3m-2)a+(2m-8)b=0\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

الان سيكون للمعادلة (11) حل غير تافه ل a , b (أي حل واحد حيث a و b ليسا مساويان للصفر) اذا كانت محدد المعاملات ل a ,b في (3) تساوي صفراً

$$\left.\begin{vmatrix} 2m-2 & m-7 \\ 3m-2 & 2m-8 \end{vmatrix} = 0 \right\} \qquad (12)$$

وهذا تعطي

$$m = -1 \ , -2 \quad ، \quad m^2 + 3m + 2 = 0$$

نلاحظ الجذور حقيقية و مختلفة ولكن ان تكون متساوية او خيالية وهناك حالتان يجب بحثهما

الحالة الاولى

$m = -1$ في هذا الحالة تعطي المعادلة (11) ما يأتي

$$-5a - 10b = 0 \quad ، \quad -4a - 8b = 0$$

وكل منهما تؤدي الى $a = -2b$ اذا فرضنا ان $b = c_1$ حيث c_1 ثابت اختياري ، فان $a = -2c_1$

عندئذ نحصل على الحل $x = -2c_1e^{-t}$ ، $y = c_1e^{-t}$

الحالة الثانية

$m = -2$ في هذا الحالة تعطي المعادلة (11) ما يلي :

$$-8a - 12b = 0 \ ، -6a - 9b = 0$$

وكل منهما تؤدي الى $a = -\frac{3}{2}b$ لتجنب الكسور نفرض ان $b=2c_2$ حيث ان c_2 ثابت اختياري اخر اذن تكون $a = -3c_2$ وعلية يكون عندنا

$$y = 2c_2e^{-2t} \quad ، \quad x = -3c_2e^{-2t}$$

وبما ان مجموع الحلول تكون حلولا ايضا فيكون لدينا

$$y = c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t} \quad ، \quad x = -2c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} \qquad (13)$$

ويمكن ان يبرهن ان الحل المطلوب وذلك بالتعويض المباشر في (8)

ملاحظة (*3-2*):

كما هو ملاحظ في الحالتين 1 و 2 المذكورتين انفا ان قيمة m تؤدي الى معادلتين متكافئتين متضمنتين a و b فأننا نحتاج واحدة فقط والحصول على المعادلتين قد يكون مفيدا احيانا اذا اردنا التأكد من صحة الحل.

ملاحظة (*3-3*)

من الواضح ان الطريقة التي تم بحثها صالحة عندما تكون الجذور حقيقية ومختلفة

والان يجب ان نجد الحل الخاص :

نستخدم طريقة تغيير المعالم في ايجاد الحل ، لقد وجدنا انفاً الحل المتمم وهو

$$y = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-2t} \quad ، \quad x = -2c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t} \qquad (13)$$

تتوقف طريقة تغيير المعالم على ابدال الثوابت الاختيارية في هذا الحل بدوال اختيارية للمتغير المستقل ومن ثم ايجاد تلك الدوال بتعويض الحل الذي تم افتراضه في (8)

من (10) نحصل على :

$$y = \gamma_1 e^{-t} + 2\gamma_2 e^{-2t} \quad ، \quad x = -2\gamma_1 e^{-t} - 3\gamma_2 e^{-2t} \qquad (14)$$

حيث λ_1 , λ_2 دالتان ل t نرغب في ايجادهما نعوض (8) في (14) ونفرض ان γ'_1 , γ'_2 ترمزان الى مشتقتي γ_1 , γ_2 بالنسبة الى t نجد بعد الاختصار

$$-e^{-t} = 4\gamma'_1 e^{-t} + 5\gamma'_2 e^{-2t} \quad ، \quad 1 - t = 3\gamma'_1 e^{-t} + 4\gamma_2 e^{-2t} \qquad (15)$$

لاحظ ان جميع الحدود التي تحتوي على γ'_1 , γ'_2 غير موجودة، وهذا غير مدهش اذا علمنا انه للثابتين γ'_1 , γ'_2 تكون (14) حلا متمما لـ (7) تساعدنا هذه الملاحظة في اختصار العمل في ايجاد الحلول (15).

لإيجاد γ'_2 , γ'_1 فمن (15) نحصل على :

$$\gamma'_2 = 3e^t - 4t\,e^{2t} + 4e^{2t} \quad ، \quad \gamma'_1 = 5te^t - 5e^t - 4 \qquad (16)$$

وبالتكامل وحذف ثابت التكامل نجد ان :

$$\gamma_2 = 3e^t - 2t\,e^{2t} + 3e^{2t} \quad ، \quad \gamma_1 = 5te^t - 10e^t - 4t \qquad (17)$$

بتعويض (16) في (14) وجمع الحل التام (13) ، يكون لدينا.

$$x = -2c_1e^{-t} - 3c_2e^{-2t} + 8te^{-t} - 9e^{-t} - 4t + 11$$
$$y = c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t} - 4te^{-t} + 6e^{-t} + t - 4$$

الذي هو الحل العام المطلوب. يجب ان يلاحظ ايضا انه لو لم تحذف ثوابت التكامل الاختيارية في (16) لكنا قد توصلنا الى الحل المتمم ايضا .

ثالثاً / المصفوفات (استخدام مفهوم القيم المميزة و المتجهات المميزة) [4] :

مثال (3-3) :

اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

الحل /

الحل العام لنظام المعادلات لتفاضلية الخطية غير المتجانسة هو :

$$X(t) = \varphi(t)\left\{C + \int \varphi^{-1}(t) f(t)dt\right\} \qquad (19)$$

لذا نحتاج ان نحسب اولا مصفوفة الحلول الاساسية $\varphi(t)$:

لذا نفرض صورة الحل للمعادلات المتجانسة باستخدام المصفوفات على صورة :

$$X = ae^{rt}$$

اذن المعادلة المميزة هي

$$[A - rI_n] = 0 \qquad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 6-r & -3 \\ 2 & 1-r \end{bmatrix} = 0$$

بفك هذا المحدد نحصل على

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$(r-3)(r-4) = 0$$

اذن الجذور هي :

$$r_1 = 3 \ , \quad r_2 = 4$$

ولإيجاد المتجهات المميزة المناظرة للقيمة المميزة $r_1 = 3$ نستخدم :

$$[A - rI_n]a = 0 \qquad (21)$$

فيكون لدينا :

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

فنحصل على

$$a_1 = a_2$$

وبالتالي نأخذ

$$a_1 = 1 \ , \quad a_2 = 1$$

اذن الحل الاول هو

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (23)$$

ولإيجاد المتجهات المميزة المناظرة للقيمة المميزة $r_2 = 4$ نستخدم :

$$[A - rI_n\,]a = 0$$

فيكون لدينا :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

فنحصل على

$$a_1 = \frac{3}{2} a_2 \qquad (25)$$

وبالتالي نأخذ

$$a_1 = 3 \;,\quad a_2 = 2$$

اذن الحل الثاني هو

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix} \qquad (26)$$

اذن مصفوفة الحلول الاساسية هي :

$$\varphi(t) = (X^1 \;\; X^2) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad (28)$$

وبما ان الحل العام لنظام المعادلات لتفاضلية الخطية غير المتجانسة هو :

$$X(t) = \varphi(t)\left\{C + \int \varphi^{-1}(t) f(t) dt\right\}$$

لذا نحسب :

$$\varphi^{-1}(t) f(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 12e^{-3t} \\ e^{t} - 4e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad (29)$$

وبالتالي

$$\int \varphi^{-1}(t)f(t)dt = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 12e^{-3t} \\ e^t - 4e^{-4t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} \\ e^t + e^{-4t} \end{bmatrix} \quad (30)$$

اذن :

$$X(t) = \varphi(t)\left\{C + \int \varphi^{-1}(t)f(t)dt\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} + \begin{matrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} \\ e^t + e^{-4t} \end{matrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 - e^{2t} - 4e^{-3t} \\ c_2 + e^t + e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} + 2e^{5t} - 1 \\ c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} + e^{5t} - 2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

اذن الحل العام هو :

$$x_1 = c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} + 2e^{5t} - 1$$
$$x_2 = c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} + e^{5t} - 2$$

العمل المستقبلي :

١- اجراء دراسة شاملة على جميع طرق حل انظمة المعادلات التفاضلية وتحديد الطريقة الافضل للحل اختصارا للوقت والجهد في العمليات الرياضية

٢- بحث امكانية دمج اكثر من طريقة لأجل الحصول على حل لأنظمة المعادلات التفاضلية

٣- تقديم دراسة عن حل انظمة المعادلات التفاضلية لا خطية لما لها اهمية في التطبيقات العملية

المصادر :

(١) أ. د السيد محمد أبو ذهب خضيري د طاهر عبد مراجعة دكتور أ. د عبد المعطي محمد عبدالله الحميد نوفل مقدمة في المعادلات تفاضلي عادية ١٤٤١ هـ - ٢٠٢٠ م الطبعة الأولى ص ٤

(٢) أ. د حسن مصطفى العويضي د. عبد الوهاب عباس عجب د. سناء علي زاره ، المعادلات تفاضلية الجزء الأول مكتبة الرشد ٢٠٠٧ م ، ص ١٠ – ١١ ، ١٥ – ١٧

(٣) أ. د عبد الشافي فهمي عبادي أ. د حسن مصطفى العويضي أ. د عفاف أبو الفتوح صالح المعادلات لتفاضلية وتطبيقاتها ، الطبعة الأولى ١٤٣١ هـ - ٢٠١٠م ، ص ٢١ – ٢٢

(٤) اميل شكر اللة المعادلات التفاضلية وتحويلات لا بلاس مؤسسة الاهرام الطبعة الرابعة ٢٠٠٦ ص ١٥٦ - ١٥٩ ، ١٦٢ - ١٦٦

(٥) د. اسماعيل بوقفه د. عايش الهنادوة المعادلات التفاضل العادية حلول وتطبيقات مطبوعات جامعة العلوم والتكنولوجيا اليمنية ، ص ٦ – ٩ ، ١١ – ١٢

(٦) د. مجدي آمين كتبي د. مروان آمين كتبي المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية ١٤١٩ هـ - ١٩٩٩م الطبعة الأولى ص ٤٤- ٤٥

(٧) روحي ابراهيم خطيب مقدمة في المعادلات التفاضلية دار المسيرة الطبعة الاولى ٢٠١٢م ص٥٧٧ – ٥٧٨ ، ٦٣٦ - ٦٣٨

(٨) موري ار شبيجل ترجمة د. محمد دخيل الاسدي د. علي يوسف عبدالله المعادلات التفاضلية التطبيقية ص ٦٠٤ ، ٦٧٩ – ٦٨٢ ، ٦٨٤ – ٦٨٦