جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان/ كلية التربية
قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بطريقة رانج كوتا

بحث مقدم إلى مجلس كلية التربية / قسم الرياضيات كجزء من
متطلبات نيل درجة بكالوريوس التربية في علوم الرياضيات

من قِبل الطالبة
فاطمة حامد عرب

إشراف
أ.م.د عقيل عبد الواحد قاسم

1446هـ 2025م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ﴾

صدق الله العلي العظيم

(سورة المجادلة آية ١١)

الإهداء

بسم الله، الذي علّم بالقلم، علّم الإنسان ما لم يعلم...

وإلى نوره الذي لا يُطفأ، وعدله الذي لا يُظلَم...

إلى سيدي ومولاي أمير المؤمنين علي بن أبي طالب عليه السلام، قدوتي في طلب العلم، ومعلّمي في طريق الحكمة، الذي قال: "العلم خير من المال، العلم يحرسك وأنت تحرس المال".

إلى من زرعوا في قلبي حب العلم وسقوني من نبع الحنان وعلّموني الصبر، ومنحوني الحب، وكانوا الدافع الأول في كل إنجاز... عائلتي الحبيبة وخصوصًا أمي وأبي، مصدر قوتي وفخري، وصاحبي الفضل الأول بعد الله فيما وصلت إليه...

إلى زوجي العزيز، شريك دربي، وسندي في هذه الرحلة، وصاحب الأثر الكبير في دعمي وتحفيزي لأكمل هذا الطريق الذي احتمل تعبي بصمت، وشاركني الحلم حتى صار واقعًا...

إليكم جميعًا... أهدي ثمرة جهدي وتعب أيامي، راجيةً من الله القبول والتوفيق

الشكر والتقدير

الحمد لله أولًا وآخرًا، ظاهرًا وباطنًا، الذي علّم الإنسان ما لم يعلم، الذي ألهمني الصبر، ويسّر لي السبل، ومنّ عليّ بنعمة العلم والتوفيق، ووفّقني لإتمام هذا العمل المتواضع، فله الشكر والثناء عدد ما كان ويكون. وله الحمد في الأولى والآخرة.

كما أتقدم بأسمى مشاعر الولاء والمحبة لأهل بيت النبوة، سراج الأمة، ومعدن العلم والمعرفة، الذين كانوا وما زالوا مصدر إلهامٍ روحي وعقلي في طريقي العلمي.

ولا يفوتني أن أتوجه ببالغ الشكر والتقدير إلى أستاذي الفاضل والمشرف الكريم (أ.م.د عقيل عبد الواحد قاسم)، الذي لم يبخل عليّ بعلمه وتوجيهه وصبره، فكان خير معينٍ لي خلال هذا البحث، فجزاه الله عني كل خير، وبارك في علمه وجهده.

وختامًا، شكرًا لكل من كان سببًا في هذا الإنجاز، ودعائي أن يرزقنا الله الإخلاص في القول والعمل، وأن يجعل هذا البحث لبنة خير في بناء العلم وخدمة المجتمع

المحتويات

اسم الموضوع	رقم الصفحة
المستخلص	V-IV
الفصل الأول	
التحليل العددي	2
المعادلة التفاضلية الاعتيادية	2
الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية	3-2
المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى	5-4
الفصل الثاني	
رانج-كتا	7
نبذة عن مكتشفي الطريقة	7
مزايا رانج-كتا	8
عيوب رانج-كتا	8
متسلسلة تايلور ودورها في تطوير طريقة رانج-كتا	12-8
طريقة رانج-كتا من الرتبة الرابعة	14-12
الفصل الثالث	
اختبار دقة طريقة رانج-كتا	20-16
الاستنتاج والمقارنة	20
المصادر والمراجع	21

المستخلص

لقد تناول بحثي موضوع دراسة المعادلات التفاضلية الاعتيادية(ODEs) ، مع التركيز على أهمية استخدام الطرق العددية كوسيلة للحصول على حلول تقريبية عندما يكون الحل التحليلي غير ممكن أو معقد حيث تم اختيار طريقة رانج -كتا كإحدى هذه الطرق العددية

لقد قدم هذا البحث

- في الفصل الاول

بدأنا بتقديم مقدمة عامة عن التحليل العددي وأهدافه، ودوره في التعامل مع المشكلات الرياضية والفيزيائية التي تتطلب حلولاً تقريبية باستخدام الحاسوب.

ثم تطرقنا إلى تعريف المعادلة التفاضلية الاعتيادية، موضحين الفرق بين الحل الخاص والحل العام لهذه المعادلات، وأهمية الشروط الابتدائية في تحديد الحلول مع المثال الاتي (اثبت ان $y = x \ln x - x$) أحد حلول المعادلة

كذلك استعرضنا أيضاً أنواع المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى، مثل المعادلات القابلة للفصل، المعادلات المتجانسة، المعادلات التامة، المعادلات الخطية، ومعادلات برنولي، مع إعطاء أمثلة لكل نوع وطريقة حله.

بعد ذلك،

- في الفصل الثاني

تناولنا طريقة رانج-كوتا (Runge-Kutta Method) كأحد أهم الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية، حيث عرضنا نبذة عن مكتشفي الطريقة (كارل رانج ومارتن كوتا) وتاريخ تطويرها، ثم قمنا بشرح مفصل لصيغ الطريقة بمختلف مراتبها مع التركيز على طريقة الرتبة الرابعة نظراً لدقتها العالية وشيوع استخدامها. بيّنا كذلك مزايا الطريقة، مثل الدقة العالية وسهولة التنفيذ والاستقلال عن المشتقات العليا، وناقشنا عيوبها مثل ارتفاع التكلفة الحسابية والحاجة لتخزين بيانات إضافية.

كما تطرقنا إلى العلاقة بين متسلسلة تايلور وطريقة رانج-كوتا، موضحين كيف ساهمت متسلسلة تايلور في تطوير الصيغة العامة للطريقة وتحليل دقتها. قمنا أيضاً بتطبيق طريقة رانج-كوتا في حل مسائل عملية مع إعطاء أمثلة تفصيلية وجداول مقارنة بين الحلول العددية والحلول الحقيقية.

وفي الجزء الأخير من البحث،

- الفصل الثالث

أجرينا مقارنة بين طريقة رانج-كوتا وطريقة أويلر من حيث (الفكرة الأساسية والصيغة الرياضية والدقة والتكلفة الحسابية...الخ)

موضحين تفوق طريقة رانج-كوتا في تقديم نتائج أكثر دقة واستقراراً، خاصةً عند استخدام خطوات زمنية صغيرة أو عند التعامل مع مسائل تحتاج إلى تتبع طويل للزمن.

وبذلك، يهدف هذا البحث إلى إبراز أهمية الطرق العددية، وخاصة طريقة رانج-كوتا، في توفير حلول فعالة وعملية لمشكلات رياضية متنوعة، وتأكيد دور هذه الطرق في التطبيقات الهندسية والفيزيائية والعلمية المعاصرة.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1.1. التحليل العددي

هو أحد فروع الرياضيات الهامة وهو الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الالي ويستخدم عادة في ايجاد حلول بعض المسائل والمشاكل التي لا يمكن حلها بالرياضيات التحليلية [1] ويدرس التحليل العددي جميع جوانب المشكلة الموجودة من الناحية العددية ويكون ذلك من خلال التطور والتقدم النظري وفهم الأساليب العددية وتنفيذها على شكل برامج محوسبة.

نشأت خوارزميات قبل الميلاد بحوالي 1650 سنة حيث كانت تهتم بطرق الحصول على الجذر من اجل حل المعادلات البسيطة وقد طور العلماء اليونانيون القدامى العديد من طرق العد ومن هؤلاء العلماء إيودوكسوس وكنيدوس وارخميدس [2]

ان الكثير من المسائل في الحلول العلمية المختلفة تؤدي الى معادلات تفاضلية اعتيادية او جزئية يكون حل البعض منها بسيطاً يمكن إيجاده باستخدام الطرق المعروفة لحلول المعادلات التفاضلية ولكن هنالك العديد من هذه المسائل لا يمكن التغلب عليها الا باستعمال الحلول العددية وسنتطرق الى بعض الطرق العددية لحلول المعادلات التفاضلية الاعتيادية. [3]

1.2. المعادلة التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation) [3]

المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي أي معادلة تحتوي على دالة غير معروفة لمتغير واحد مع واحد او أكثر من مشتقاتها

$$y^n = f(x, y, y^{(1)} \dots \dots \dots y^{(n-1)})$$

وحل هذه المعادلة هي الدالة $y(x)$ التي تكون مع مشتقاتها مستمرة وقابلة للاشتقاق n من المرات وتحقق المعادلة

الحل العام للمعادلة أعلاه يحتوي على n من الثوابت الاختيارية الذي تتحدد عليهما عندما تكون قيمة كل من y^1, y ..... y^{n-1} معروفة لبعض قيم x وهذه توفى للشروط الابتدائية

عنما تكون الشروط الابتدائية لمسألة في نقطة واحدة x من المطلق فأن المسألة تدعى ذات القيم الابتدائية كما تسمى بالمسألة ذات القيم الحدودية وتلك المسألة التي تكون شروطها الابتدائية معروفة في أكثر من نقطة من نقاط المطلق

1.3. الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما أسلفنا هو أي علاقة بين x، تحقق المعادلة، غير أن الحل العام لاي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساو لرتبة المعادلة،

فإذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب أن يكون حلها العام مشتملاً على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى.

اما إذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها على ثابتي تكامل نظراً لاجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا ...

فعلى سبيل المثال: $\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويحققها الحل الخاص $y = e^{5x}$ كما يبدو من التعويض في المعادلة التفاضلية الى أن حلها العام يجب ان يشتمل على ثابت اختياري واحد c، فيكون $y = ce^{5x}$ اما المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx} + y = 0$ فهي من الرتبة الثانية وتحققها الحلول الخاصة: $y = \sin x, y = \cos x$ غير أن حلها العام يجب أن يشتمل على ثابتي تكامل اختياريين، كان يكونا A, B ويصبح الحل العام عندئذ بالصورة $y = A\sin x + B\cos x$

مثال (1): اثبت ان $y = x\ln x - x$ أحد حلول المعادلة:

$$x\frac{dy}{dx} = x + y, x > 0 \dots\dots\dots (1)$$

الحل: ان المعادلة $y = x\ln x - x$ خالية من المشتقات ومعرفة في $x > 0$ ولكي نثبت انها أحد حلول المعادلة التفاضلية (1) نقوم بالتعويض المباشر في (1)

$$\text{LHS} = x\frac{dy}{dx} = x.\left(x.\frac{1}{x} + \ln x.1 - 1\right)$$

$$= x.(1 + \ln x - 1) = x\ln x$$

$$\text{RHS} = x + y = x + x\ln x - x = x.\ln x$$

$$\rightarrow \text{LHS} = \text{RHS}$$

اذن الدالة المعطاة هي أحد الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (1).

1.4. المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل، أي يقوم على عمليات التكامل، ومن المعروف انه لا يمكن ايجاد عكس تفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة، أي لا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة، وعليه فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى انواع متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام

حيث سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بمتغيرين x,y، ومع ان هذا النوع من المعادلات التفاضلية قد تبدو بسيطة إلا أنه ليس من الممكن ايجاد حل عام لاي منها بصورة عامة، ولا توجد طريقة عامة للحل

وعليه فسوف نقسم هذه المعادلات والتي يمكن ايجاد حلها بطريقة مباشرة الى عدة انواع، أهمها:

1. المعادلات التي تنفصل متغيراتها (Separable Equation)

وهي المعادلة التي تكون من الشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

الدالة f(x,y) يجب ان تكون مستمرة بالنسبة للمتغير x

ومثال على هذا النوع من المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = x,y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = xdx$$

2. معادلات التفاضلية من النوع المتجانس (Homogeneous Equations)

يقال ان الدالة f(x,y) التابعة للمتغيرين y,x بأنها متجانسة من الدرجة n إذا تحققت العلاقة

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

حيث $t \neq 0$ عدد حقيقي

إذا كانت n=0 فأن الدالة متجانسة من الدرجة صفر

ومثال على هذا النوع من المعادلات

$$y'' = 3y + 2y = 0$$

3. المعادلات التفاضلية التامة (Exact Differential Equations)

وهي المعادلة التي تكون من الشكل:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ويقال انها تامة إذا تحقق الشرط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومثال على هذا النوع من المعادلات

$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

4. المعادلات التفاضلية الخطية (Linear Equations)

هي معادلة تفاضلية يكون فيها المتغير (y او y´ , y´´ , الخ) ومشتقاته ظاهرة بمرتبه واحدة فقط، ولا تظهر مرفوعة لأسس او داخل دوال غير خطية مثل $\sin(y)$ او y^2.

ومثال على هذا النوع من المعادلات:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$$

5. معادلة برنولي (Bernoulli Differential Equations)

وهي نوع خاص من المعادلات التفاضلية حيث تصنف ضمن المعادلات التفاضلية غير الخطية والتي تكون من الشكل:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^2$$

حيث Q(x), x دوال في p(x)

ومثال على هذا النوع من المعادلات

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2$$

الفصل الثاني

طريقة رانج-كتا

(Runge- kutta)

2.1. تعريف

هي احدى الطرق العددية الشائعة لحل المعادلات التفاضلية العادية التي تعطي الدقة الجيدة وبجهد أقل حيث لا تحتاج الى حساب المشتقات كما في صيغة أويلر وانما أيجاد قيمة الدالة $f(x,y)$عدة مرات لنقاط مختارة لكل فترة المجال المطلوب. ثم تطويرها في أواخر القرن التاسع عشر على يد كارل رانج (carl Runge) ومارتن كتا (Martin Kutta) وهما عالمان رياضيان ألمانيان.

2.2. نبذة عن مكتشفي الطريقة

1. كارل رنغ (Carl Runge) (1856-1927)

كان عالم رياضيات وفيزياء ألمانيا، اشتهر بعمله في التحليل العددي والرياضيات التطبيقية. ساهم في تطوير الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية، وكان له أيضًا تأثير في الفيزياء النظرية.

2. مارتن كتا (Martin Kutta) (1867-1944)

كان رياضياتيا ألمانيا متخصصا في التحليل العددي والرياضيات التطبيقية عمل إلى جانب رنغ لتطوير الطريقة التي تحمل اسميهما، والتي أصبحت من أكثر الطرق استخدامًا في حل المعادلات التفاضلية عددياً.

تم تقديم الطريقة لأول مرة في عام 1901 من قبل مارتن كتا بعد ان وضع كارل رنغ الاساس لبعض الأفكار المتعلقة بها، وتوجد صيغ مختلفة لطريقة رانج - كتا حيث توجد صيغ أربع مراتب وخمسة رتب وأكثرها شيوعاً واستخداماً هي صيغة الرتبة الرابعة (Rky) حيث تعطي نتائج دقيقة وسهلة الاستخدام، وتستخدم على نطاق واسع في الهندسة، والفيزياء والعلوم التطبيقية لحل الانظمة الديناميكية التفاضلية [4]

ويمكن كتابة طريقة رانج-كتا ذات المرحلة M بالشكل التالي:

$$w_{i+1} = w_i + \Psi(t_i, w_i, h)$$

حيث إن:

$$\Psi(t_i, w_i, h) = \int_{M=1}^{M} 6_M k_M$$

$$k_y = hf(t_i, w_i)$$

$$k_m = hf(t_i + \propto_M h, w_i + \int_{I-1}^{m-1} P_{Mi}\, k_I$$

$$\propto_m = \int_{I-1}^{m-1} P_{mI}$$

$$m = 2, 3, \dots\dots\dots M$$

2.3. مزايا طريقة رانج-كتا

1. الدقة العالية
2. سهولة التنفيذ
3. الاستقلال من المشتقات الأعلى
4. تعدد الاستخدامات
5. عدم الحاجة الى المصفوفات
6. تحليل الخطأ التراكمي
7. مرونة اختيار الخطوة الزمنية
8. توفير الوقت والجهد

2.4. عيوب طريقة رانج-كتا

1. التكلفة الحسابية العالية
2. تخزين القيم الوسطية
3. عدم الحفاظ على الخصائص النوعية للحل
4. الحساسية لأحجام الخطوة الزمنية
5. عدم الكفاءة في المسائل الصلبة

2.5. متسلسلة تايلور ودورها في تطوير طريقة رانج-كتا

تتطلب دراسة طريقة رانج - كتا التطرق إلى متسلسلة تايلور لأنها توفر الأساس الرياضي لفهم دقة الطريقة وكيفية اشتقاقه، وذلك لأسباب رئيسية:

1. تعتمد طريقة رائج كنا على تقدير القيم المستقبلية لحل المعادلة التفاضلية، ولذلك من المهم معرفة مدى دقة هذا التقدير. باستخدام متسلسلة تايلور يمكن مقارنة التقريب العددي مع الحل الحقيقي، مما يساعد في حساب درجة الخطأ للطريقة وتحديد رتبتها (Order of Accuracy)

2. اشتقاق طريقة رانج- كتا عندما نحاول اشتقاق طريقة رائج كنا نستخدم متسلسلة تايلور لتوسيع الحل حول النقطة الحالية ، ثم نختار معاملات الطريقة بحيث تطابق هذه التوسعة قدر الإمكان.

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2i}y''_i + \frac{h(n+1)}{3i}y''(\int i)$$

حيث ان $(\int i)$ تقع بين t_i , t_{i+1} بما ان $y' = f(t_i, y_i)$ فأن يمكن كتابة المعادلة بالشكل

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2i}f'(t_i, y_i) + \frac{h^2}{3i}f''(\int_i, y(\int_i))$$

التخلص من $f'(t_i, y_i)$

$$f_t(t_i, y(t_i)) + f(t_i, y(t_i))f_y(t_i, y(t_i))$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$f'(t_i, y_i)$ بتقريبها بواسطة الفرق الامامي

$$F'(t_i, y(t_i)) \cong \frac{1}{h}[f(t_i + h, y(t_i + h)) - F(t_i, y(t_i))]$$

وبالتالي تصبح المعادلة بالشكل

$$y_{i+1} \cong y_i + \frac{h}{2}[F(t_i + y_i) + F(t_i + h, y_i + 1)] - \frac{h^3}{12}f''(\int_i, y(\int_i))$$

حيث ان $\int_i$ تقع بين t_i و $t_i + h$ يوضع $w_i \cong y(t_i)$

$w_{i+1} \cong y(t_i + h)$ واهمال الخطأ المحلي المقطوع تحصل على معادلة الفروق

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[F(t_i, w_i) + F(t_i + h, w_i + 1)]$$

من اجل $i = 0,1,2, \dots \dots \dots \dots N - 1$ باستبدال المجهول w_{i+1} في الطرف الأيمن من المعادلة

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i)]$$

من اجل $i = 0,1,2, \dots \dots \dots \dots N - 1$ المعادلة تسمى صيغة رانج-كتا ذات الرتبة الثانية

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2}f'(t_i, w_i)$$

لتطور أسلوب لاستخراج طريقة رانج-كتا ذلك باستخدام نظرية تايلور نحن نبحث عن صيغة عددية من الشكل

$$w_{i+1} = w_i + 6_1k_1 + 6_1k_2$$

$k_1 = hf(t_i, w_i)$ حيث ان:

$$k_2 = hf(t_i + \propto_2 h, w_i + p_{21}\, k_1)$$

حيث ان 6_1 , 6_2 , p_{21} ثوابت حقيقية

$$6_2 = \frac{1}{2\propto_2}$$

$$6_1 = 1 = 6_2 = 1 - \frac{1}{2\propto_2} = \frac{2\propto_2 - 1}{2\propto_2}$$

$$p_{21} = \frac{1}{26_2} = \propto_2$$

تدرج بعض طرائق رانج-كتا المعروفة ذات الرتبة المتقاربة الثانية الذي يمكن استنتاجها بوضع قيم مختلفة $\propto_2$ في المعادلة [5]

1- عندما $\propto_2$=1 فأن p_{21} =1 و $\propto_1 = \propto_2 = \frac{1}{2}$ وتأخذ صيغة رانج-كتا ذات الرتبة التقاربية الثانية

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + h, w_i + k_i)$$

والذي يمكن كتابته ايضاً بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + F(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))]$$

2- عندما $\propto_2 = \frac{1}{2}$ فأن $p_{21} = \frac{1}{2}$, 6_1= 0 , 6_2=1 وتكون الصيغة بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + k_2$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_1)$$

والتي عادة تكتب بالشكل التالي:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i + \frac{1}{2}, w_i + \frac{1}{2}f(t_i, w_i))$$

والتي تعرف باسم طريقة اويلر المعدلة

3- عندما $\propto_2 = \frac{1}{2}$ فأن $p_{21} = \frac{1}{2}$, $6_1 = \frac{1}{4}$, $6_2 = \frac{3}{4}$ تصبح طريقة رانج-كتا بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{4}[k_1, 3k_2]$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{2}{3}h_3 w_{i+} \frac{2}{3}k_1)$$

والذي يمكن كتابتها بالشكل:

$$w_{i+1} = w_{i+1} + \frac{1}{4}\left[F(t_i, w_i) + 3f(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i))\right]$$

ولفهم كيفية تطبيق طريقة رانج-كتا في حل المسائل الرياضية نقدم المثال الاتي:

مثال (1): حل مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y + e^t$$

$$y_{(0)} = 1$$

في الفترة $0 \le t \le 1$ وذلك بوضع $N = 10$

هنا يكون لدينا $h = 0.1$, $t_i = 0.1i$ من اجل $i = 0, 1, 2, \dots \dots N$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[k_1, k_2]$$

$$k_1 = h\left[w_i + e^{ti}\right]$$

$$k_2 = h\left[w_i + k_i + e^{ti+h}\right]$$

وبالتعويض عن قيم h , t_i نحصل على

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$

$$k_1 = 0.1\left[w_i + e^{0.1i}\right]$$

$$k_2 = 0.1\left[w_i + k_i + e^{0.1(i+1)}\right]$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \dots \dots N - 1$$

عندما $i = 0$ يكون لدينا

$$k_1 = 0.1[w_\circ + 1] = 0.1[1 + 1] = 0.2$$

$$k_2 = 0.1[w_\circ + k_1 + e^{0.1}] = 0.1[1 + 0.2 + 1.105171] = 0.2305171$$

$$w_i = w_\circ + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 1 + 0.5[0.2 + 0.2305171] = 1.215259$$

وبالتالي يمكن الحصول على النتائج العددية للمثال كما موضح في الجدول التالي:

جدول (1): النتائج العددية للمثال (1)

i	t_i	w_i	y_i	$w_i - y_i$
0	0.0	1.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.215259	1.215688	0.000430
2	0.2	1.464715	1.463683	0.000968
3	0.3	1.753180	1.754816	0.001636
4	0.4	2.586098	2.088555	0.002457
5	0.5	2.469625	2.473082	0.003457
6	0.6	2.910721	2.915390	0.004669
7	0.7	3.417251	3.423380	0.006129
8	0.8	3.998095	4.005974	0.006129
9	0.9	4.663280	4.673259	0.007878
10	1.0	5.424117	5.436564	0.012447

ولإعطاء مثال أكثر تعقيداً نستخدم طريقة رانج-كتا في حل امثلة من رتب اعلى سوف نتطرق الى التالي:

2.6. طريقة رانج-كتا من الرتبة الرابعة

هي من أشهر طرائق رانج-كتا ذات الأربع مراحل يمكن كتابتها بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_i\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, w_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, w_i + k_3)$$

مثال (2):

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$$

$$k_1 = 0.1\left[w_i + e^{0.1i}\right]$$

$$k_2 = 0.1\left[w_i + \frac{1}{2}k_1 + e^{0.1(i+1)}\right]$$

$t_i = 0.1_i, h = 0.1$ وذلك لان $i = 0,1,2, \ldots \ldots 9$

اما بالنسبة لطريقة رانج-كتا ذات الرتبة الرابعة فتصبح بالشكل:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = 0.1\left[w_i + e^{0.1i}\right]$$

$$k_2 = 0.1\left[w_i + \frac{1}{2}k_2 + e^{0.1(i+0.5)}\right]$$

$$k_3 = 0.1\left[w_i + \frac{1}{2}k_2 + e^{0.1(i+(0.5))}\right]$$

$$k_4 = 0.1\left[w_i + k_3 + e^{0.1(i+1)}\right]$$

والجدول (2) التالي يوضح النتائج العددية بعد إعطاء عدة قيم للزمن

جدول (2): النتائج العددية للمثال (2)

i	t_i	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$	w_i	$\lvert w_i - y_i \rvert$
0	0.0	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
1	0.1	1.215675	0.000013	1.215688	0.000000
2	0.2	1.465654	0.000029	1.465682	0.000001
3	0.3	1.454768	0.000049	1.754315	0.000001
4	0.4	2.088482	0.000073	2.088552	0.000001
5	0.5	2.472980	0.000102	2.473078	0.000002
6	0.6	2.915253	0.000138	2.915385	0.000003
7	0.7	3.423199	0.000108	3.423373	0.000003
8	0.8	4.005743	0.000231	4.005965	0.000004
9	0.9	4.672955	0.000291	4.673235	0.000005
10	1.0	5.436201	0.000363	5.436550	0.000007

الفصل الثالث

اختبار دقة طريقة رانج-كتا

من أجل اختبار دقة الطريقة المقدمة في هذا البحث الا وهي طريقة (رانج_كتا) سوف نقوم بتقديم طريقة اخرى الا وهي (طريقة اويلر) نوضح الفرق بين الطريقتين من حيث (الفكرة الاساسية. الدقة. الصيغة الرياضية...الخ) مع تقديم مثال يحل بالطريقتين وايجاد النتائج العددية مع مقارنتهما والحكم على دقة الطريقتين

3.1. طريقة اويلر

هي احدى الطرق العددية البسيطة لحل المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) من النوع:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

حيث تعتمد طريقة أويلر على استخدام المشتقة لتقدير قيمة الدالة في نقطة تالية انطلاقاً من نقطة معلومة، أي أننا نستخدم ميل المنحنى (المشتقة) عند النقطة الحالية لتقريب قيمة y عند النقطة التالية، حيث تكون طريقة اويلر متسارعة ولكنها غير دقيقة في بعض الحالات.

الصيغة العامة:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

- النقطة الحالية: x_n
- x_n قيمة y عند: y_n
- خطوة التقريب (حجم الفاصل الزمني بين النقاط): h
- المشتقة أو معدل التغير عند النقطة الحالية: $f(x_n, y_n)$

خطوات التطبيق:

1. تحديد قيم البدء: x_0 و y_0
2. اختيار خطوة h
3. استخدام الصيغة لحساب y_1, y_2 حتى نصل إلى النقطة المطلوبة.

ومن اجل ملاحظة الفرق بين الطريقتين سنقوم بمقارنتهما من حيث:

1. الفكرة الأساسية

أويلر:

تعتمد على الميل (المشتقة) عند بداية الفترة فقط لتقدير القيمة التالية.

رانج- كتا (الدرجة الرابعة):

تستخدم متوسطا مرجحًا لأربعة تقديرات مختلفة للميل داخل الفترة، مما يعطي تقريبًا أدق.

2. الصيغة الرياضية

أويلر:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

رانج - كتا (الدرجة الرابعة) :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

3. الدقة

أويلر:

دقة من الرتبة الأولى (الخطأ يتناسب مع h) .

رانج - كتا:

دقة من الرتبة الرابعة (الخطأ يتناسب مع h^4) أي أعلى بكثير.

4. التكلفة الحسابية

أويلر:

سريع جدا وخفيف في الحسابات (عملية واحدة لكل خطوة)

رانج كتا:

يحتاج إلى حساب الدالة 4 مرات في كل خطوة، أي أبطئ لكنه أكثر دقة

5. الاستقرار والأخطاء

أويلر:

غير مستقر نسبيًا عند استخدام خطوات كبيرة، وتراكم الخطأ يكون سريع.

رانج – كتا:

أكثر استقرارًا وأقل عرضة لتراكم الأخطاء.

الخلاصة

الجانب	أويلر	رانج-كتا (الدرجة الرابعة)
الدقة	منخفضة (الدرجة 1)	عالية (الدرجة 4)
السرعة	أسرع	أبطئ
الاستقرار	أقل	أعلى
السهولة	بسيط جداً	متوسط
مناسب ل	مسائل بسيطة	مسائل دقيقة أو طويلة المدى

مثال (1):

$\frac{dy}{dt} = y \ , \ y_{(0)} = 1$

$f(t,y) = y$ الحسابات

$y_0 = 1$

$h = 0.1$

وباستخدام طريقة اويلر حصلنا على النتائج العددية التالية:

t_n	y_n	$f(t_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$
0	1	1	0.1+1∗1=1.1
0.1	1.1	1.1	1.1∗0.1+1.1=1.21
0.2	1.21	1.21	1.2 ∗0.1+1.21=1.331
0.3	1.331	1.331	1.331∗0.1+1.331=1.4641
0.4	1.4641	1.4641	1.4641∗0.1+1.4641=1.50161

ولنأخذ نفس المعادلة نحلها بطريقة رانج-كتا

$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$

$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n)$

$k_2 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

$k_n = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_3}{2})$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$\frac{dy}{dt} = y \ , \ y_{(0)} = 1$

$f(t,y) = y$ الحسابات

$y_0 = 1$

$h = 0.1$

وبالتالي حصلنا على النتائج العددية التالية:

t_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	$y_n + 1$
0	1	0.1	0.105	0.10525	0.110525	1.105170
0.1	1.10517	0.110517	0.116043	0.116321	0.121608	1.221402
0.2	1.2214	0.12214	0.17226	0.127474	0.132842	1.349858
0.3	1.34986	0.134986	0.140735	0.140991	0.146430	1.491825
0.4	1.49183	0.149183	0.15508	0.155337	0.161063	1.648721

من اجل تقييم طريقة رانج-كتا من حيث الدقة والسهولة فان الجدول التالي يوضح ذلك:

جدول مقارنة القيم

t_n	طريقة أويلر y_n	طريقة رانج-كتا y_n	$y_{(x)} = e^t - x - 1$
0.0	*1*	*1*	*1*
0.1	*1.1*	*1.10517*	*1.1113*
0.2	*1.21*	*1.2214*	*1.2461*
0.3	*1.331*	*1.34986*	*1.4073*
0.4	*1.4641*	*1.49183*	*1.5982*

الاستنتاج والمقارنة

- ناتج رانج - كتا أقرب بكثير إلى الحل الحقيقي أو التحليلي من ناتج أويلر.
- الفرق بين الناتج الحقيقي وطريقة أويلر يكون كبيرا، خاصة عند خطوات الزمن الكبيرة.
- الخطأ في طريقة أويلر يزداد بسرعة مع تقدم الزمن، بينما يبقى منخفضا في رانج-كتا.
- عدد النقاط المطلوبة للحصول على دقة جيدة أكبر في أويلر مقارنة برانج- كتا.
- طريقة رانج - كتا تحقق نتائج دقيقة حتى مع عدد خطوات أقل.
- النتائج المحسوبة بطريقة أويلر تظهر انحرافا واضحًا عن المسار الصحيح.
- رانج - كتا تثبت كفاءتها في تتبع الحل بدقة على مدى أطول.
- الفروقات بين الطريقتين تزداد وضوحًا كلما كان المثال يحتوي على تغيرات سريعة في الحل.

المصادر والمراجع

المراجع

[1] كتاب التحليل العددي تأليف (د. صالح منيع الحربي) (د. محمد منصور صبيح) كلية المعلمين مكة المكرمة.

[2] Kerdall E, Atkinson Numerical analysis, www.britannica.com , Retrieved 2018-5-20 Edited.

[3] كتاب مبادئ التحليل العددي تأليف (د. علي محمد صادق سيفي) (د. ابتسام كمال الدين) مطبعة جامعة الموصل، ١٨٩٦.

المصادر

[4] بوابة رياضيات، بوابة تحليل رياضي.

[5] كتاب التحليل العددي تأليف (أ.د. عيسى بن عبد الله السعيد) قسم الرياضيات/ كلية العلوم جامعة الملك سعود -١٤٣٢هـ- ص٥٣٢.