جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية

قسم الرياضيات

عنوان البحث

(طريقة التحويل التفاضلي)

بحث

مقدم الى مجلس كلية التربية / جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

تقدم بها

(انوار كاظم عمار)

بأشراف

(أ.م.د.أسماء جاسم حرفش)

2025م **1446هـ**

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَقُل رَّبِّ زِدْنِي عِلْمًا)

صدق الله العلي العظيم

الإهداء

اهدي هذا البحث الى :

مدمر عروش الظالمين والمنتقم من اعداء ائمة الامة ومنقذ الانسان من الحيرة والضلالة باسط الامن والعدالة على وجه الارض الامام المهدي(عجل الله فرجه)

إلى من غرَسوا في قلبي حب العلم،

إلى من كانت دعواتهم سر نجاحي،

إلى والديّ العزيزين،

إلى نبع الحنان والدعم، أمي الغالية،

وإلى سندي وفخري، والدي الكريم،

أُهدي هذا العمل المتواضع، عرفاناً وتقديراً لما قدمتماه لي من حب وتضحية

وإلى كل من شجعني وآمن بي،

لكم جميعاً أهدي ثمرة جهدي.

"الشكر والتقدير"

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبتوفيقه تتحقق الغايات

أتقدم بخالص الشكر والتقدير لكل من كان له دور في إنجاز هذا البحث، وفي مقدمتهم الأستاذة (أ.م.د اسماء جاسم) على دعمها وتوجيهاتها المستمرة التي كان لها بالغ الأثر في توجيه مسار هذا العمل العلمي

ولا يفوتني أن أقدم شكري العميق لأسرتي الكريمة التي كانت الداعم الأول لي، والتي لم تبخل عليّ بالتشجيع والدعاء طوال فترة إعداد هذا البحث وخصوصاً ابي وامي

كما أخص بالشكر كل من ساهم ولو بكلمة أو رأي أو نصيحة كان لها الأثر الإيجابي في إخراج هذا البحث بهذه الصورة.

الملخص

قدمنا في هذا البحث طريقة التحويل التفاضلي لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية الخطية ولا خطية في مسائل القيم الابتدائية والحدودية.

حيث تظمن هذه الدراسة ثلاثة فصول وهي :

الفصل الاول : تطرقنا فيه عن أهم المفاهيم الاساسية للمعادلات التفاضلية

الفصل الثاني : قدمنا في هذا الفصل دراسة عن مفهوم طريقة التحويل التفاضلي واهم المبرهات التي تمثل خواص هذا التحويل في البعد الواحد والتحويل ثنائي البعد.

الفصل الثالث : تناولنا في هذا الفصل عدة امثلة مختلفة تمثل كيفية تطبيق طريقة التحويل التفاضلي على مسائل القيم الابتدائية والحدودية .

الفصل الاول

مقدمة عامة

(١-١) المقدمة Introduction

كانت المعادلات التفاضلية فرعاً رئيساً من فروع الرياضيات البحتة والتطبيقية منذ نشأتها في منتصف القرن السابع عشر ورغم ان تاريخها قد درس جيداً الا انها لاتزال مجالاً حيوياً للتحقيق المستمر ،حيث تظهر ارتباطات جديدة مع فروع اخرى من الرياضيات وتفاعل خصب مع الموضوعات التطبيقية بالاضافة الى اعادة صياغة مثيرة للمشكلات الاساسية ونظرياتها في فترات زمنية مختلفة مما اتاح افاقا جديدة في القرن العشرين

بدأ مفهوم "المعادلات التفاضلية " مع لايبنز والاخوة برنولي وغيرهم منذ ثمانينات القرن السابع عشر ،اي بعد وقت قصير من معادلات نيوتن "التدفقية" في سبعينات القرن نفسه وقد طبقت هذه المعادلات الى حد كبير في الهندسة والميكانيكا ، حيث كانت المسائل المتناظرة في جوهرها تمارين في التحسين الرياضي في القرن الثامن عشر عززت التطورات الرياضية نهج لايبنز ، مما ادى الى توسيعه ليشمل الشكل متعدد المتغيرات وهو ماقاد الى المعادلات التفاضلية الجزئية. كما ادى التعميم لمسائل تحسين الشكل المتناظر الى ظهور حساب التفاضل والتكامل في التغيرات ظهرت شخصيات جديدة من بينها اويلر ،دانيال برنولي،لاجرانج ،لابلاس ،وقد تضمنت التطورات في نظرية الحلول العامة حلولاً فردية وحلولاً وظيفية واخرى بواسطة السلاسل اللانهائية كما تم تطبيق العديد من الحلول على الميكانيكا ،لاسيما في نظرية الاوتار المهتزة في القرن السابع عشر ،توسعت النظرية العامة بفضل تطوير الفهم الخاص بالحلول العامة والخاصة واثبات نظريات الوجود ظهرت انواع جديدة من المعادلات وحلولها ،على سبيل المثال ،تحليل فورييه والدوال الخاصة .

في هذا الفصل سوف نتطرق لبعض المفاهيم العامة للمعادلات التفاضلية وتصنيفاتها وطرق حلها

(1−2) المعادلات التفاضلية *The Differential Equations*

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات دالة واحدة أو أكثر، وهي تعبّر عن العلاقة بين هذه الدالة ومشتقاتها بالنسبة إلى متغير مستقل واحد أو أكثر. بعبارة أخرى، هي معادلة تصف كيف تتغير كمية معينة (الدالة) بالنسبة للزمن أو أي متغير آخر.

أنواع المعادلات التفاضلية:

١. **معادلات تفاضلية الاعتيادية (ODEs):** تحتوي على مشتقات دالة واحدة أو أكثر بالنسبة إلى متغير مستقل واحد فقط [1].

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots , y^{(n)}(x)) = 0$$

حيث

$$y' = \frac{dy}{dx}, y" = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3x}{dy^3}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

٢. **معادلات تفاضلية جزئية (PDEs):** تحتوي مشتقات دالة واحدة أو أكثر بالنسبة إلى عدة متغيرات مستقلة [2].

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, \ldots) = 0$$

حيث

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots$$

(1−3) المفاهيم الاساسية للمعادلات التفاضلية

Basic Concepts of Differential Equations

رتبة المعادلة: هي اعلى مشتقة تظهر في المعادلة بالنسبة للمتغير المستقل

درجة المعادلة: هي أعلى أس (قوة) تظهر فيه أعلى مشتقة للدالة، وذلك بعد تبسيط المعادلة والتأكد من أن جميع المشتقات ليست تحت جذور أو داخل دوال غير جبرية (مثل الجيب أو اللوغاريتم). فعلى سبيل المثال

معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية الدرجة الاولى $y'' + 2y' + y = x$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية و الدرجة الاولى $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial^2 z}{\partial 2} = 0$

المعادلة التفاضلية الخطية: المعادلة التفاضلية تكون خطية اذا كان المتغير التابع وكل مشتقاته الجزئية تظهر في الصورة الخطية (اي انها غير مضروبة في بعضها او مرفوعة لاس غير الواحد) وخلاف ذلك فان المعادلة التفاضلية تصبح لاخطية. على سبيل المثال

$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u2$ معادلة تفاضلية جزئية خطية

$uu_x - 2tu_t + uu_{yy} + u^2 = 0$ معادلة تفاضلية جزئية لاخطية

حل المعادلة التفاضلية: هي دالة حقيقة تحقق المعادلة التفاضلية من الرتبة n وقابلة للاشتقاق ، والتي عند تعويضها هي ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية ، تجعل المعادلة صحيحة في كل نقطة ضمن مجال التعريف.

هنالك عدة انواع من الحلول للمعادلة التفاضلية:

- **الحل العام** : الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n يحتوي الحل على n من الثوابت الاختيارية او دوال اختيارية ، حيث اذا احتوى هذا الحل على ثوابت اختيارية فأنه يعتبر حل عام

للمعادلة التفاضلية الاعتيادية ، اما اذا احتوى هذا الحل على دوال اختيارية فأنه يعتبر حل عام للمعادلة التفاضلية الجزئية .

- **الحل الخاص:** الحل الخاص للمعادلة التفاضلية لا يشتمل على اي ثوابت او دوال اختيارية وقد تحصل عليه احيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام.
- **الحل المنفرد:** هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ولا يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار قيم معينة للثوابت أو الدوال الاختيارية.

ويمكن ان يكون للمعادلة حل وحيد او يوجد لها حلول عديدة أو قد لا يوجد لها حل على الاطلاق.

مسائل القيم الابتدائية والحدودية

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية تعطى بعض الشروط التي يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية , وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت او الدوال الإختيارية. ولو كان الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n (مثلا) يحتوي على من n الثوابت الاختيارية , لذا يستلزم لتحديد هذه الثوابت بوجود n من الشروط على المعادلة التفاضلية , وهذه الشروط تأخذ صور مختلفة ومنها:

- إذا أعطيت هذه الشروط عند نفس النقطة $x_{\cdot}$

$$y\left(x_{\cdot}\right)=y_{\cdot}, \; y'\left(x_{\cdot}\right)=y'_{\cdot}, \ldots,, \; y^{(n-1)}\left(x_{\cdot}\right)=y_{\cdot}^{(n-1)}$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الإبتدائية عند $x_{\cdot}$ وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الإبتدائية بمسألة القيم الإبتدائية (*Initial value Problems*).

- إذا أعطيت هذه الشروط نقاط مختلفة... $x_{١}, x_{٢},$

$$y\left(x_{١}\right)=y_{١}, \; y\left(x_{٢}\right)=y_2 \;, \ldots$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الحدودية وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدودية مسألة القيم الحدودية (*Boundary value Problems*).

- اما اذا اعطيت الشروط على شكل قيم دالة عند نقاط معينة والبعض الآخر على شكل قيم

لمشتقات الدالة عند نقاط اخرى

$$y\left(x_{١}\right) = y_{١}, \quad y'\left(x_{٢}\right) = y'_{2} \ , \ldots$$

هذا النوع من المسائل تسمى مسائل القيم الحدودية المختلطة *(Mixed Boundary Value Problem)* ، يُستخدم بكثرة في النماذج الفيزيائية، مثل انتقال الحرارة، والمرونة، وتدفق السوائل.

وهنالك طرائق كثيرة جدا لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية او الجزئية، منها الطرق التحليلية والطرق العددية أو الطرق الشبه العددية. ففي هذا البحث سوف نقدم دراسة عددية لايجاد الحلول التقريبية لمسائل القيم الابتدائية الخطية ولا خطية ومسائل القيم الحدودية بالاعتماد على طريقة التحويل التفاضلي.

الفصل الثاني

طريقة التحويل التفاضلي

(2-1) المقدمة *Introduction*

تُعد طريقة التحويل التفاضلي (Differential transform method (**DTM**)) واحدة من الأساليب التحليلية – العددية الفعّالة لحل المعادلات التفاضلية، سواء الاعتيادية أو الجزئية ، وتعتمد هذه الطريقة على تحويل المعادلة التفاضلية إلى شكل جبري باستخدام مفهوم مشتق تايلور، ولكن بطريقة أبسط من التوسع الكامل لمتسلسلة تايلور التقليدية.

تقوم الفكرة الأساسية للتحويل التفاضلي على تحويل الدوال والمشتقات إلى صورة متسلسلة، بحيث يمكن التعامل مع المعادلة المعطاة بشكل جبري في مجال التحويل، ثم استخدام التحويل العكسي للحصول على الحل التقريبي في المجال الزمني أو المكاني.

تتميز طريقة التحويل التفاضلي بما يلي:

- سهولة الاستخدام وقلة العمليات الحسابية مقارنة بالطرق العددية التقليدية.
- إمكانية الحصول على حلول شبه تحليلية بصيغ مغلقة.
- ملائمتها العالية للمعادلات غير الخطية والمعقدة.

(2−2) التحويل التفاضلي ذات البعد الواحد

One-dimensional differential transform

يتم تعريف التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$ على النحو التالي [7]

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \qquad \cdots (1)$$

$y(x)$: تمثل الدالة الاصلية ,

$Y(k)$: تمثل التحويل التفاضلي للدالة $y(x)$

تعريف التحويل العكسي التفاضلي للدالة $Y(k)$ على النحو الأتي

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \qquad \cdots (2)$$

نستبدل المعادلة (١) في (٢)

$$\mathrm{y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\left[\left.\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right|_{x=0}\right] \qquad \cdots (3)$$

وهو ما يعني ان مفهوم التحويل التفاضلي مشتق من متسلسلة تايلر.

في التعريف السابق نأخذ في الاعتبار الحالة عند $x = 0$ ولكنها صحيحة لاي عدد حقيقي ثابت $x = x_0$ ، ويمكن ان نستخدم الاحرف الصغيرة للأشارة الى الدالة الاصلية والاحرف الكبيرة الى للتحويل التفاضلي

النظريات التالية [7] تمثل الخواص الرئيسية للتحويل التفاضلي ذات البعد الواحد التي يمكن استنتاجها من المعادلتين (١) و(٢)

مبرهنة (1)

اذا كانت f, g, h دوال بالمتغير x وكانت $f(x) = \alpha\, g(x) + \beta\, h(x)$ حيث α , β ثوابت فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k) = \alpha\, G(k) + \beta\, H(k)$$

البرهان :

$$F(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{k!} \frac{d^k\big(\alpha\, g(x) + \beta\, h(x)\big)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k\big(\alpha\, g(x)\big)}{dx^k} + \frac{d^k\big(\beta\, h(x)\big)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$$= \alpha \frac{1}{k!} \frac{d^k\, g(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0} + \beta\, \frac{1}{k!}\, \frac{d^k\, h(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$= \alpha\, G(k) + \beta\, H(k)$$

مبرهنة (2)

اذا كانت f, g, h دوال بالمتغير x وكانت $f(x) = g(x)\, h(x)$ فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} G(r)\, H(k-r)$$

البرهان :

افرض $f(x) = g(x)\, h(x)$ تكون الدالة الاصلية، اذاً من صيغة لابينتس للمشتقة رقم n للحاصل لدينا

$$\frac{d^n\big(g(x)\,h(x)\big)}{dx^n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{d^r g(x)}{dx^r}\,\frac{d^{n-r}h(x)}{dx^{n-r}}$$

بأستخدام معادلة (١) يتم اعطاء التحويل التفاضلي $f(x)$

$$F(k) = \frac{1}{k!}\,\left.\frac{d^n f(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\frac{d^r g(x)}{dx^r}\,\frac{d^{k-r}h(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!\,(k-r)!}\,\frac{d^r g(x)}{dx^r}\,\frac{d^{k-r}h(x)}{dx^{k-r}}\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} G(r)\,H(k-r)$$

النظرية التالية هي تعميم للنظرية السابقة.

مبرهنة (3)

اذا كانت f, g دوال بالمتغير x وكانت $f(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)$ فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة التالية

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k}\ \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2-k_1)\cdots G_n(k-k_{n-1})$$

مبرهنة (4)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت $f(x) = x^n$ حيث n ثابت فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \; k = n \\ 0 & \text{if } \; k \neq n \end{cases}$$

البرهان :

$f(x)$ تكون الدالة الاصلية ثم يكون التحويل التفاضلي لـ $f(x)$ معطى بواسطة

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k (x^n)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

من قاعدة التفاضل لدينا

$$\frac{d^k (x^n)}{dx^k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

لذلك

$$F(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}}{k!}$$

فاذا كانت $n = k$ فأن

$$F(k) = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-k+1)x^{k-k}}{k!}$$

$$F(k) = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(1)}{k(k-1)(k-2)\cdots(1)}$$

لذلك $F(k) = 1$

اما اذا كان $x = 0$, $n \neq k$ فأن

$$F(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)0^{n-k}}{k(k-1)(k-2)\cdots(1)}$$

$$F(k)=0$$

$$\therefore F(k)=\delta(k-n)=\begin{bmatrix}1 & \text{if} \quad k=n \\ 0 & \text{if} \quad k\neq n\end{bmatrix}$$

مبرهنة (5)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت

$$f(x)=\frac{d^n g(x)}{dx^n}$$

حيث n ثابت فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k)=(k+1)(k+2)\cdots(k+n)G(k+n)$$

البرهان :

$f(x)$ الدالة الاصلية والتحويل التفاضلي لها

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left.\frac{d^k \frac{d^n g(x)}{dx^n}}{dx^k}\right|_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{d^n g(x)}{dx^n}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\left.\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}}\right|_{x=0}=\frac{(k+n)!}{k!}\left[\frac{1}{(k+n)!}\frac{d^{k+n} g(x)}{dx^{k+n}}\right]_{x=0}$$

$$=(k+1)(k+2)\cdots(k+n)G(k+n)$$

مبرهنة (6)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت $f(x) = e^{\lambda x}$ فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

البرهان :

$f(x)$ الدالة الاصلية والتحويل التفاضلي للدالة $f(x)$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k e^{\lambda x}}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left. e^{\lambda x} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \lambda^k e^{\lambda(0)}$$

$$= \frac{1}{k!} \lambda^k$$

مبرهنة (7)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت $f(x) = \sin(wx + \alpha)$ فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة عندما w, α ثوابت

$$F(k) = \frac{w^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$$

البرهان :

نأخذ التحويل التفاضلي للدالة $f(x) = \sin(wx + \alpha)$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k(\sin(wx+\alpha))}{dx^k} \right|_{x=0} = \frac{w^k}{k!} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$$

مبرهنة (8)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت $f(x) = \cos(wx+\alpha)$ فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة عندما w, α ثوابت

$$F(k) = \frac{w^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$$

البرهان :

نأخذ التحويل التفاضلي للدالة $f(x) = \cos(wx+\alpha)$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k(\cos(wx+\alpha))}{dx^k} \right|_{x=0} = \frac{w^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$$

مبرهنة (9)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت $f(x) = (1+x)^b$ حيث b ثابت ، فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k) = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{k!}$$

البرهان :

نأخذ التحويل التفاضلي الدالة $f(x) = (1+x)^b$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k (1+x)^b}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \left. \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)(1+x)^{b-k}}{k!} \right|_{x=0} = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{k!}$$

مبرهنة (10)

اذا كانت f دالة بالمتغير x وكانت $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ فأن التحويل التفاضلي للدالة $f(x)$ يكون بالصيغة

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k} \qquad , \quad k \geq 1$$

البرهان :

نأخذ التحويل التفاضلي الدالة $f(x)$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \int_0^x g(t)dt}{dx^k} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!} \left. \frac{d^{k-1} g(x)}{dx^{k-1}} \right|_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} g(x)}{dx^{k-1}} \right|_{x=0} = \frac{G(k-1)}{k}$$

(2−3) التحويل التفاضلي ثنائي البعد

Two-dimensional differential transform

يعرف التحويل التفاضلي للدالة $w(x,y)$ بالصيغة الاتية [3]:

$$W(k,h)=\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}\,w(x,y)}{\partial x^{k}\partial y^{h}}\right]_{(0,0)} \qquad \cdots (4)$$

حيث $w(x,y)$ هي الدالة الاصلية و $W(k,h)$ يمثل التحويل التفاضلي للدالة $w(x,y)$.

ويتم تعريف التحويل العكسي التفاضلي لـ $W(k,h)$ على النحو التالي

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^{k}y^{h} \qquad \cdots (5)$$

ومن المعادلتين (٤) و (٥) يمكن ان نستنتج

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}\,w(x,y)}{\partial x^{k}\partial y^{h}}\right]_{(0,0)}x^{k}y^{h} \qquad \cdots (6)$$

وفيما يلي بعض الخصائص للتحويل التفاضلي ثنائي [3]

مبرهنة (11)

اذا كانت $u(x,y)\,,v(x,y)$ دالتين بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت $w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$

فأن $W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$

مبرهنة (12)

اذا كانت $u(x,y)$ دالة بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت $w(x,y)=\lambda u(x,y)$ فأن

$$W(k,h)=\lambda U(k,h)$$

حيث λ ثابت

مبرهنة (13)

اذا كانت $u(x,y)$ دالة بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت

$$v(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \quad و \quad w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

فأن

$$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h),$$
$$V(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$$

مبرهنة (14)

اذا كانت $u(x,y)$ دالة بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت الدالة u قابلة للاشتقاق r و s من المرات بالنسبة ل x و y على الترتيب و

$$w(x,y) = \frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

فأن

$$W(k,h) = (k+1)(k+2)\cdots(k+r)(h+1)(h+2)\cdots(h+s)U(k+r,h+s)$$

مبرهنة (15)

اذا كانت $u(x,y)\ ,v(x,y)$ دالتين بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)$$

فأن

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k} U(r,h-s)V(k-r,s)$$

مبرهنة (16)

اذا كانت $w(x,y) = x^m y^n$ فأن

$$W(k,h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$$

عندما

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \quad and \quad h = n \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

مبرهنة (17)

اذا كانت $u(x,y)$, $v(x,y)$ دالتين بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$$z(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$r(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

فأن

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$$

$$Z(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}(h-s+1)(s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$$

$$R(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{k}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$$

مبرهنة (18)

اذا كانت $u(x,y)$, $v(x,y)$, $z(x,y)$ دوال بالمتغييرين $x,\ y$ وكانت

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)z(x,y)$$

فأن

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s} U(r,h-s-p)V(t,s)\mathrm{Z}(k-r-t,p)$$

(2-4) المراجعة التاريخية *Literature Review*

شهدت طريقة التحويل التفاضلي **DTM** تطورًا واسعًا منذ طرحها لأول مرة في الثمانينيات، لتشمل حل أنواعًا متعددة من المعادلات مثل المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية ، المعادلات ذات المشتقات الكسرية، المعادلات التكاملية، ومعادلات التحكم الأمثل، كما استُخدمت في مجموعة واسعة من التطبيقات الهندسية والعلمية .

في هذا البند، تم استعراض الدراسات التي تناولت تطوير أو تحسين طريقة التحويل التفاضلي **DTM** ، وذلك حسب الترتيب الزمني [9]:

- **1986** : تم تأسيس مفهوم التحويل التفاضلي بواسطة الباحث الصيني "تشو" في مجال الهندسة الكهربائية. وقد تم شرح الطريقة لحل مسائل القيمة الابتدائية.
- **1996** : تم توسيع نطاق **DTM** ليشمل شروط الحدود الهجينة في مسائل القيم الذاتية.
- **1998** : تم تحسين الطريقة في حالة مسائل القيم الحدودية في أفق غير محدود. وكحالة تطبيقية، تم استخدامها بكفاءة لحل مسألة بلاسيوس.
- **1999** : تم اقتراح التحويل التفاضلي ثنائي الأبعاد لحل مسائل القيم الابتدائية التي تتضمن

معادلات تفاضلية جزئية.

- **2003** : في أعقاب التوسعات على **DTM** ثنائي الأبعاد، تم تطبيق الطريقة على معادلة الانتشار.
- **2004** : تم تقديم **DTM** ثلاثي الأبعاد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية المصحوبة بشروط ابتدائية.
- **2005:** كانت المعادلات التكاملية التفاضلية مع شروط حدودية هي النوع التالي من المسائل التي تم بحثها من حيث إمكانية حلها باستخدام **DTM** .
- **2006** : تم توسيع **DTM** لحل المعادلات الفرقية بأنواع وأوامر مختلفة.
- **2007** : أدى ظهور مفهوم المشتقات الكسرية وتزايد الاهتمام بمعادلات التفاضل الكسرية إلى تعريف التحويل التفاضلي الكسري.
- **2008** : تم تعميم التحويل التفاضلي الكسري **(FDTM)** بشكل أوسع ليشمل المعادلات ذات الرتب المتعددة. كما تم توسيع استخدام **FDTM** ليشمل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتب الكسرية.
- **2009** : تم تطبيق **DTM** ثنائي الأبعاد لحل فئة من معادلات فولتيرا التكاملية الخطية وغير الخطية. ولحل مشكلة التعقيد الحسابي في **DTM** متعدد الأبعاد، تم اقتراح طريقة مختزلةٌ **RDTM** تعتمد على فصل المتغيرات. وأُظهرت كفاءة الطريقة من خلال تطبيقها على عدة مسائل قيم ابتدائية. كما تم تقديم **DTM** الضبابي لحل المعادلات التفاضلية الضبابية. وتم أيضًا تطبيق **DTM** لحل مسائل التحكم الأمثل غير الخطية.
- **2010** : لتسريع تقارب حلول **DTM** ، تم اقتراح **DTM** متعدد الخطوات، حيث تتكون الحلول من دوال مقطعية عبارة عن عدد محدود من حلول **DTM** لفترات زمنية متعاقبة.
- **2011** : تم تطوير **DTM** المقطعي لحل الأنظمة الديناميكية الفوضوية الكسرية.
- **2012** : تم اقتراح التحويل التفاضلي العشوائي كإصدار آخر من **DTM** لحل المعادلات التفاضلية العشوائية. وأظهرت نتائج التطبيق على مسائل ريكاتي التفاضلية كفاءة هذا النهج.
- **2013** : تم توسيع طريقة **DTM** الضبابي لتشمل حل معادلات فولتيرا التكاملية. كما تم اقتراح

دمج **DTM** مع كثيرات حدود آدومين للتغلب على مشكلة الحدود غير الخطية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

- **2014** : تم فحص المعادلات التكاملية – التفاضلية غير الخطية ذات التأخير النسبي باستخدام **DTM**.
- **2015** : تم توسيع **DTM** المعمم لمسائل شروط الابتدائية في المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية ليشمل مسائل الشروط الحدودية. كما استُخدم **DTM** كأداة جديدة لحساب تحويل لابلاس للدوال ذات متغير واحد حقيقي. وتم حل معادلات التكامل التفاضلي من نوع كوشي باستخدام طريقة مقترحة تعتمد على**DTM** .
- **2016** : تم اقتراح **DTM** ثنائي الأبعاد الممتد لحل معادلات تفاضلية جزئية تحتوي على مشتقات كسرية محلية. وتم تحليل المفهوم لهذه النسخة من **DTM** للدوال غير القابلة للتفاضل، وأُثبتت النظريات الأساسية، وأظهرت المحاكاة العددية كفاءة ودقة الطريقة
- **2017** : تم تقديم إصدار من **DTM** لحل المعادلات التفاضلية الكسرية المريحة.
- **2018** : تم دمج **DTM** المسقط مع التحويلات التكاملية لتقديم طريقة فعالة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية، وأظهرت النتائج أن الطريقة دقيقة وسريعة التقارب.
- **2019** : تم تقديم **DTM** التبديلية لتغطية المسائل ذات الأفق غير المحدود، أي التي تحتوي على شروط حدودية عند اللانهاية. تتضمن الطريقة المقترحة حلاً من جزئين: حل باستخدام **DTM** ، وحل تحليلي يُطابق الشرط عند اللانهاية.
- **2020** : تم اقتراح دمج بين التحويل التفاضلي وطريقة الجسيمات الملساء لحل مشاكل التوصيل الحراري العابر، وأظهرت المحاكاة العددية أن الطريقة قوية ودقيقة.
- **2021** : من التطبيقات الحديثة لـ **DTM** في المسائل العملية ما ورد في دراسة توزيع الحرارة على زعنفة متحركة بشكل شبه منحرف طولي باستخدام **DTM** أحادي الأبعاد مع تقريب بادى.
- **2022** : تم حل المعادلات التكاملية التفاضلية ذات الحجة المتأخرة، والتي لها تطبيقات هندسية مهمة، باستخدام **DTM** بنتائج مرضية وقابلة للتطبيق.

الفصل الثالث

تطبيق طريقة التحويل التفاضلي

(3−1) مسائل القيم الأبتدائية الخطية ***Linear initial value problems***

في هذا البند، تُعرض حلول لمسائل القيمة الابتدائية الخطية باستخدام طريقة التحويل التفاضلي وتُوضح هذه الطريقة من خلال مجموعة من الأمثلة التطبيقية، بهدف إبراز آلية استخدامها وكفاءتها في معالجة هذا النوع من المسائل.

مثال (1) :

$$y''' - y'' - y' + y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \,, y'(0) = 1 \,, y''(0) = 0$$

الحل الدقيق للمسألة [8] هو

$$y(x) = (2 - x)e^x$$

من القيم الاولية لدينا

$$Y(0) = 2 \quad , \qquad Y(1) = 1 \quad , \qquad Y(2) = 0$$

يؤدي التطبيق **DTM** الى العلاقة التكرارية الاتية

$$Y(k+3) = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\big((k+1)(k+2)Y(k+2) + (k+1)Y(k) - Y(0)\big)$$

من استخدام العلاقة اعلاه والقيم الابتدائية (الاولية)

$$Y(3) = \frac{-1}{6} \quad , \qquad Y(4) = \frac{-1}{12} \quad , \qquad Y(5) = \frac{-1}{30}, \ldots$$

وبأستخدام المعادلة (3) تم الحصول على ما يلي:

$$y(x) = 2 + x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^5 - \cdots$$

مثال (2) :

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \quad , \qquad y(0) = -1 \, , y'(0) = 1$$

الحل الدقيق لهذه المسألة [8] هو

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)e^{-x}$$

وبتطبيق اسلوب **DTM** على المسألة المعطاة لدينا

$$Y(0) = -1 \, , Y(1) = 1$$

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) + 2(k+1)Y(k+1) + Y(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - 2(k+1)Y(k+1) - Y(k)\right]$$

عندما

$$k = 0 \implies Y(2) = 0$$

$$k = 1 \implies Y(3) = \frac{-1}{3}$$

$$k = 2 \implies Y(4) = \frac{5}{24}$$

$$\vdots$$

فيكون الحل بالصيغة الاتية

$$y(x) = -1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \cdots$$

مثال (3):

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-t} \ \sin 2t \quad , \quad y(0) = 0 \, , y`(0) = 1$$

يكون الحل الدقيق لهذه المسألة [8] هو

$$y(t) = \frac{2}{5} e^{-2t} \sin t - \frac{1}{5} e^{-2t} \cos t + \frac{1}{5} e^{-t} (\cos t + 2 \ \sin t)$$

فيكون

$$Y(0) = 0 \, , Y(1) = 1$$

وعند تطبيق **DTM** نحصل على العلاقة

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[\sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)! \, k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 4(k+1) Y(k+1) - 5Y(k) \right]$$

من خلال تطبيق **DTM** العكسي يكون حل المسألةعلى النحو الاتي:

$$y(t) = t - \frac{3}{2} t^2 + t^3 - \frac{3}{8} t^4 + \frac{1}{15} t^5 + \cdots$$

مثال (4):

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + x(t) + y(t) = 1$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2 \, x(t) + y(t)$$

الشروط الابتدائية لهذه المسألة [6] $x(0) = 0 \quad , y(0) = 1$

بأخذ التحويل التفاضلي للمعادلتين

$$(k+1) \, X(k+1) + (k+1) \, Y(k+1) + X(k) + Y(k) = \delta(k)$$

$$(k+1) \, X(k+1) = 2 \, X(k) + Y(k)$$

اعادة ترتيب المعادلتين اعلاه نحصل على:

$$X(k+1) = \frac{1}{k+1} [\delta(k) - (k+1) \, Y(k+1) - X(k) - Y(k)]$$

$$Y(k+1) = [2\,X(k) + Y(k)]$$

عندما

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

فيكون

$$X(0) = 0 \quad ,Y(0) = 1$$

$$k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(1) = -1, \qquad y(1) = 1$$

$$k = 1 \quad \Longrightarrow \quad x(2) = 1/2\,, \quad y(2) = -1/2$$

$$k = 2 \quad \Longrightarrow \quad x(3) = -1/6 \quad ,y(3) = 1/6$$

$$\vdots$$

فيكون الحل

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) t^k = -t + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3 - \cdots$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)\, t^k \; = \; 1 + t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 - \cdots$$

(3−2) مسائل القيم الأبتدائية اللاخطية

Nonlinear initial value problems

مثال (5):

$$\frac{dy}{dt} = 2y(t) - y^2(t) + 1$$

مع الشرط الاولي

$$y(0) = 0$$

الحل الدقيق لهذه المسألة [5] هو

$$y(t) = 1 + \sqrt{2}\ tanh\left(\sqrt{2t} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$$

بأخذ التحويل التفاضلي للمعادلة التفاضلية نحصل على

$$(k+1)Y(k+1) = 2Y(k) - \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r) + \delta(k)$$

من الشرط الاولي المعطى بالمسألة

$$Y(0) = 0$$

فتكون

$$Y(1) = 1, Y(2) = 1, Y(3) = \frac{1}{3}, Y(4) = \frac{-1}{3}, Y(5) = \frac{-7}{15}\ \ , \ldots$$

لذلك يمكن كتابة الحل بسهولة على النحو الاتي:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \cdots$$

مثال (6):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = \frac{1}{c}x^2 \ \ , x > 0, c > 0$$

بأخذ التحويل التفاضلي ثنائي البعد لهذه المسألة [4] ، نحصل على

$$(h+1)U(k,h+1)$$
$$= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s) \times U(k-r+1,s)$$
$$\times U(k-r+1,s)$$
$$+ \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(k-r+2) \times U(r,h-s)\ (k-r+2,s)$$

بأستخدام الشرط الابتدائي للمسألة تكون

$$U(i,0) = 0 \ \ , \ \ i = 0,1,3,\dots,m.$$

$$U(2,0) = \frac{1}{c}$$

وبأستخدام الصيغة التكرارية تكون النتائج النحو التالي:

$$U(2,1) = \frac{6}{c^2} \quad , \qquad U(2,2) = \frac{36}{c^3} \quad , \ U(2,3) = \frac{216}{c^4} \quad , \qquad \dots$$

فيكون الحل

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

ونحصل على الحل المتسلسل كما يلي:

$$u(x,t) = x^2\left(\frac{1}{c} + \frac{6}{c^2}t + \frac{36}{c^3}t^2 + \frac{216}{c^4}t^3 + \cdots\right)$$

(3−3) مسائل القيم الحدودية Boundary value problems

مثال7: المسألة ادناه تمثل مسألة قيم حدودية المتكونة من المعادلة التفاضلية – التكاملية [4] مع الشروط الحدودية

$$y^{(4)}(x) = x + xe^{x} + 3e^{x} + y(x) - \int_0^x y(t)dt$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$
$$y(1) = 1 + e, \quad y'(1) = 2e$$

وعندما $x = 0$ يوجد شرط حدودي اخر هو $y^{(4)}(0) = 4$

وعند تطبيق **DTM** نحصل على العلاقة التكرارية الاتية:

$$Y(k+4) = \frac{\delta(k-1) + \sum_{k_1=0}^{k} \delta(k_1 - 1)\frac{1}{(k-k_1)!} + \frac{3}{k!} + Y(k) - \frac{1}{k}Y(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

وعند تبسيط الصيغة اعلاه نحصل على

$$Y(k+4) = \frac{1}{(k+4)!}[k!\,\delta(k-1) + 3 + k + k!\,Y(k) - (k-1)!\,Y(k-1)]$$

وبتطبيق التحويل التفاضلي على الشروط الحدودية نحصل على

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 1, \quad Y(2) = a, \quad Y(3) = b, \ Y(4) = 1/6$$

حيث وفق التحويل التفاضلي فأن

$a = \frac{y''(0)}{2!}$, $b = \frac{y'''(0)}{3!}$ ،

وباستخدام علاقة التكرار وتحويلات الشروط الحدودية نحصل على الحل بالصيغة الاتية:

$$y(x) = 1 + x + ax^2 + bx^3 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{24} + \left(\frac{1}{180} + \frac{a}{360}\right)x^6 + \left(\frac{1}{840} - \frac{a}{2520} + \frac{b}{840}\right)x^7 + \left(\frac{11}{40320} - \frac{b}{6720}\right)x^8 + \frac{x^9}{40320} + \left(\frac{1}{453600} + \frac{a}{1814400}\right)x^{10} + \cdots$$

عندما $N = 10$ فأن القيم تكون

$$\mathrm{a} = 0.999998;\ \mathrm{b} = 0.500003$$

وعندما $N = 20$ فأن القيم تكون

$$a = 1.000000000000001, \quad b = 0{:}4999999999999991$$

من الواضح عندما $N \to \infty$ فان $a \to 1, \quad b \to 0.5$

فيصبح الحل بالصيغة الاتية:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{5!} + \frac{x^7}{6!} + \frac{x^8}{7!} + \frac{x^9}{8!} + \frac{x^{10}}{9!} + \cdots$$

الذي يكافأ الحل الدقيق لهذه المسألة $y(x) = 1 + xe^x$

(3-4) الاستنتاجات *Conclusions*

في هذا البحث، تم تطبيق طريقة التحويل التفاضلي **DTM** لإيجاد حلول العددية لمسائل القيم الابتدائية والحدودية المتضمنة معادلات تفاضلية خطية وغير خطية. وقد أظهرت النتائج أن طريقة **DTM** تُعد أداة فعالة وموثوقة لحل هذا النوع من المسائل، حيث توفر حلولًا على شكل متسلسلات تتقارب بسرعة.

وتزداد دقة الحلول المستنتجة كلما زاد عدد الحدود المأخوذة في المتسلسلة، كما أن العديد من هذه الحلول يمكن التعبير عنها بصيغ مغلقة دقيقة. وتُساهم الطريقة بشكل واضح في تقليل الصعوبات الحسابية المرتبطة بالطرق التقليدية، إذ تُجرى جميع العمليات الحسابية من خلال خطوات بسيطة ومباشرة.

المصادر

[1] اسماعيل بوقفه , عايش الهنداوه ، **المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات** , جامعة العلوم والتكنولوجيا اليمنية

[2] أ.د. عبدالمعطي محمد عبدالله & د. سامي رفاعي محمود، **المعادلات التفاضلية العادية والجزئية.** الناشر : خوارزم العلمية (٢٠٠٨)

[3] Ayaz, Fatma. "**On the two-dimensional differential transform method.**" *Applied Mathematics and computation* 143.2-3 (2003): 361-374.

[4] Arikoglu, Aytac, and Ibrahim Ozkol. "**Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method**." *Applied mathematics and computation* 168.2 (2005): 1145-1158.

[5] Biazar, Jafar, and Mahdi Eslami. "**Differential transform method for quadratic Riccati differential equation**." *International Journal of Nonlinear Science* 9.4 (2010): 444-447.

[6] Kareem, MG Fajlul, and PS Sehik Uduman. "**The Numerical Solution of Differential Transforms Method for Some Non-Linear System of Equations**." *International Journal of Research and Scientific Innovation (IJRSI)* Volume II Issue V(2015): 09-14

[7] Khatib, Alaa. "**Differential Transform Method for Differential Equations.**" (2016).

[8] Mohanty, Minakshi, and Saumya R. Jena. "**Differential transformation method (DTM) for approximate solution of ordinary differential equation (ODE).**" *Advances in Modelling and Analysis B* 61.3 (2018): 135-138.

[9] Hashemi Mehne, S. H. "**Differential transform method: A comprehensive review and analysis.**" *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization* 12.3 (Special Issue) (2022): 629-657.