جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية الأساسية

قسم الرياضيات

دراسة شاملة عن تحليل وتطبيق المعادلات التفاضلية والدوال المستمرة والاشتقاق في النمذجة الرياضية

بحث مقدم من قبل الطلبة

حوراء قيس كاظم فاطمة فلاح صالح براق مالك مجيد

البحث مقدم كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس للعام الدراسي ٢٠٢٥ – ٢٠٢٦

اشراف
المدرس الدكتور تاج الدين ناصر عبدعلي

بـــــسم الله الـــرحمن الـــــــــرحيم

وَلَا تَهِنُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَنتُمُ الْأَعْلَوْنَ إِن كُنتُم مُّؤْمِنِينَ

سورة آل عمران – الآية ١٣٩

صدق الله العلي العظيم

إقرار المشرف

اعلن عن ان البحث المعنون "دراسة شاملة عن تحليل وتطبيق المعادلات التفاضلية والدوال المستمرة والاشتقاق في النمذجة الرياضية" قد تم تحت اشرافي والذي تقدم بة الطلبة "حوراء قيس كاظم" و "فاطمة فلاح صالح" و "براق مالك مجيد" في قسم الرياضيات، كلية التربية الأساسية، جامعة ميسان. كجزء من متطلباتهم للحصول على شهادة البكالوريوس للعام الدراسي ٢٠٢٥ - ٢٠٢٦.

المشرف	رئيس القسم
المدرس الدكتور	الأستاذ المساعد الدكتور
تاج الدين ناصر عبدعلي	سامي عطية سيد
التوقيع:	التوقيع:
التاريخ:	التاريخ:

الاهـــــــداء

لابد لنا ونحن نخطو خطوتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود لأعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين جهوداً كبيرة في بناء جيل الغد لنبعث الامة من جديد.

واتقدم بخالص الشكر والامتنان لجميع أساتذة قسم الرياضيات والذين ساهموا في وصولنا الى هذه المرحلة ولم يبخلوا علينا باي مجهود والذين حفزونا الى العمل الدؤوب من اجل نجاحنا وارتفاع مستوانا العلمي.

الشكر والتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين ألهى لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك إلى من بلغ الرسالة وأدي الأمانة ونصح الأمة إلي نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا مُحَمَّد ﷺ

إلى من أسقتني الحب والحنان إلى رمز الحب وبلسم الشفاء إلى القلب الناصع بالبياض إلى من أكبر على يديها وعليها أعتمد إلى شمعة تنير ظلمة حياتي إلى من بوجودها أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها إلى من عرفت معها معني الحياة أمي الحبيبة

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار غلي من أحمل أسمه بكل افتخار أرجو أن يمد الله في عمره ليرى ثمارا قد حان قطفها بعد طول انتظار تبقي كلماتك نجوماً أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد إلى القلب الكبير والدي.

إلى من وهبوني الأمل والتفاؤل في الحياة ونهلت من تجاربهم وكانوا ومازالوا عوناً في حياتنا الأساتذة الأجلاء إلى ذلك الصرح الشامخ جامعة ميسان، كلية التربية الأساسية، قسم الرياضيات.

المـــلخـص

تعتبر الرياضيات من أقدم العلوم التي تطورت عبر التاريخ، حيث بدأت كأداة عملية في الحساب والقياس، ثم أصبحت أساسًا للعلوم والهندسة والتكنولوجيا الحديثة. شهدت كل حقبة تاريخية تطورًا مهمًا في الرياضيات، حيث ساهمت الحضارات المختلفة في تطوير نظريات ومفاهيم جديدة. في العصور القديمة، قدمت الحضارات البابلية والمصرية مفاهيم الحساب والهندسة لحل المشكلات العملية مثل التجارة والبناء. لاحقًا، قام الإغريق، بقيادة علماء مثل إقليدس وأرخميدس وفيثاغورس، بوضع أسس الهندسة ونظرية الأعداد، مما ساهم في بناء الرياضيات كنظام منطقي يعتمد على البرهان.

خلال العصور الوسطى، قام العلماء المسلمون، مثل الخوارزمي وابن الهيثم وعمر الخيام، بتطوير الجبر، وحساب المثلثات، والهندسة التحليلية، ونقلوا المعرفة الرياضية إلى أوروبا عبر الترجمات. في عصر النهضة، ساهم علماء مثل رينيه ديكارت في تطوير الهندسة التحليلية، بينما وضع نيوتن ولايبنتز أسس حساب التفاضل والتكامل. في القرن العشرين، تطورت الرياضيات بشكل كبير بفضل تطور علوم الحاسوب، وظهرت مجالات جديدة مثل الرياضيات التطبيقية، والإحصاء، ونظرية الاحتمالات، والتشفير. كما أصبحت الرياضيات جزءًا أساسيًا في مجالات مثل الفيزياء الحديثة، والذكاء الاصطناعي، وعلم البيانات. في القرن الواحد والعشرين، استمرت الرياضيات في التطور، حيث ساهمت في التشفير الكمي، وتحليل البيانات الضخمة، والنمذجة الرياضية في البيولوجيا والطب.

أصبحت الرياضيات اليوم لغة العلوم الأساسية، حيث تؤثر في جميع نواحي الحياة، من التكنولوجيا إلى الاقتصاد. يؤكد هذا البحث أن الرياضيات ليست مجرد علم نظري، بل هي القوة الدافعة وراء التقدم العلمي والتكنولوجي، ومن المتوقع أن تستمر في لعب دور حيوي في المستقبل.

الفهرست

التسلسل		العنوان	الصفحة
		الفصل الاول	
١.١		المقدمة	١
١.٢		المعادلات التفاضلية	٣
١.٣		مشكلة البحث	٦
١.٤		اهداف البحث	٧
١.٥		التطور التاريخي للرياضيات	٨
١.٦		الحافز البحثي	١٠
		الفصل الثاني	
٢.١		المقدمة	١٣
٢.٢		مفهوم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى	١٤
	٢.٢.١	التعريف العلمي	١٤
	٢.٢.٢	الشكل العام	١٤
٢.٣		أنواع الدوال	١٤
٢.٤		أهمية الدوال	١٦
	٢.٤.١	قواعد الاشتقاق	١٦
	٢.٤.٢	مشتقات الدوال المثلثية اللوغاريتمية	١٨
		الفصل الثالث	
٣.١		المقدمة	٢٩
٣.٢		الدوال المستمرة ذات المتغير الواحد	٣٠
	٣.٢.١	الدالة المستمرة	٣٠
	٣.٢.٢	دالة منفصلة بخط مقارب عمودي	٣١
	٣.٢.٣	مجال ومدى الدالة	٣١

٣.٣	التعريف الرئيسي للاستمرارية على أساس حد الدالة	٣٢
٣.٤	تعريف الاستمرارية	٣٢
٣.٥	الدالة المستمرة بقيم حقيقية	٣٣
٣.٦	تعريف الاستمراريّة بحسب كوشي (إبسيلون - دلتا)	٣٤
	الفصل الرابع	
٤.١	المقدمة	٣٧
٤.٢	بيئة التنفيذ	٣٧
٤.٣	الرسم البياني للدوال	٣٨
٤.٤	الرسوم البيانية	٣٩
٤.٥	السيناريوهات	٤٣
٤.٦	نتائج البحث	٤٤
	الفصل الخامس	
٥.١	المقدمة	٤٨
٥.٢	توصيات أكاديمية وعلمية	٤٨
٥.٣	توصيات البحث المستقبلية	٤٩
٥.٤	الخاتمة	٥٠
	المصادر	٥١

الفصل الأول

١.١ المقدمــة

الرياضيات هي لغة الكون وأداة أساسية لفهم الظواهر الطبيعية والعلمية. لقد تطورت الرياضيات على مدى العصور من مجرد وسائل حسابية بسيطة إلى نظام متكامل يشمل التحليل، والهندسة، والجبر، والإحصاء، وغيرها من الفروع الحديثة. في هذا البحث، سنستعرض تطور الرياضيات من العصور القديمة حتى العصر الحديث. حتى الآن لا يوجد تعريف عام مُتّفق عليه لتعريف علم الرياضيات ويمكن وصف علم الرياضيات بأنه عبارة عن مجموعة من المعارف المجردة الناتجة عن الاستنتاجات المنطقية المطبقة على مختلف الكائنات الرياضية مثل: المجموعات والأعداد والأشكال والتحويلات يختص علم الرياضيات بالقياس والأعداد وهو من أوائل العلوم التي عمل الإنسان على تطويرها وقد دفع إلى ذلك أهميته في جميع مجالات الحياة الإنسانية(Edwards and Ward 2004) .

كما يُعتبر علم الرياضيات أساسًا لكل العلوم الأخرى تعتبر الرياضيات ضرورية في العديد من المجالات لما لها من قدرة على وضع نماذج رياضية تمكّنها من صياغة سلوك ما أو التنبؤ بسلوك محتمل. من أشهر المجالات التي تستعمل النماذج الرياضية العلوم الطبيعية والهندسة والطب والتمويل والعلوم الاجتماعية. أدت الرياضيات التطبيقية إلى تخصصات رياضية جديدة تمامًا، مثل الإحصاء ونظرية الألعاب والتحكم الأمثل. يشارك علماء الرياضيات في الرياضيات البحتة دون وضع أي تطبيق على أرض الواقع، ولكن غالبًا ما يتم اكتشاف التطبيقات العملية(Vinner 1991, Frieder, Pinchetti et al. 2023) .

وقد توالى العلماء الذين وضعوا أركان هذا العلم ووضعوا الكثير والكثير من النظريات حتى وصل علم الرياضيات في صورته إلى عالمنا اليوم. فيما يلي نذكر نماذج لبعض علماء الرياضيات الذين كان لهم الفضل في وصل الرياضيات إلى ما وصلت إليه من تطور والتي ظلت أعمالهم تتناقل بين الأجيال ليكمل طريقهم غيرهم من العلماء حتى يومنا هذا. الشكل ١.١ صورة توضح تطور الرياضيات عبر العصور، بدءًا من الحضارات القديمة مثل البابلية والمصرية، مرورًا بالإغريق والعلماء المسلمين في العصور الوسطى، ثم عصر النهضة مع ديكارت، وصولًا إلى التطبيقات الحديثة في الذكاء الاصطناعي والتشفير والحوسبة الكمومية. يمكنك استعراض الصورة للاطلاع على التمثيل البصري لكل حقبة علما ان الصورة قد تم توليدها بالذكاء الاصطناعي. ((Capraro and Perc 2021.

الشكل ١.١: تطور الرياضيات خلال الحقبات التاريخية.

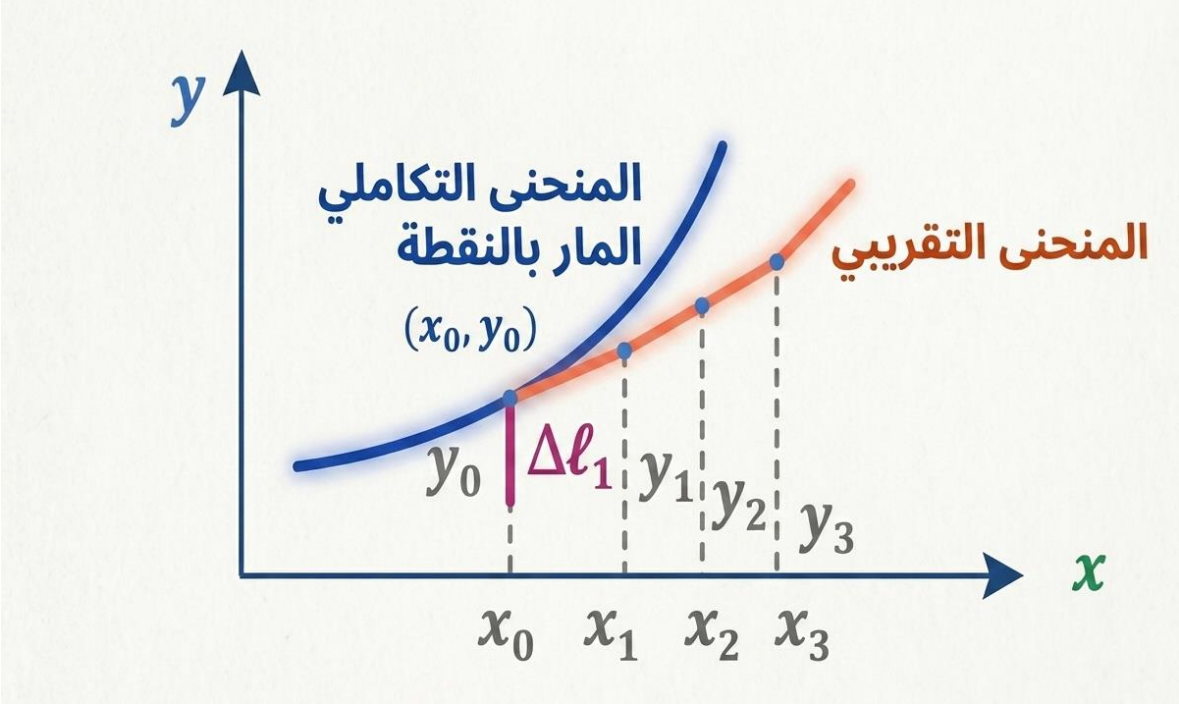
١.٢ المعادلات التفاضلية

يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية تحتل المكانة المرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية؛ حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائية أو هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضلية ولفهم هذه المسألة فلا بد من حل هذه المعادلة التفاضلية أو على الأقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل وأن استعصى الحصول عليه؛ وعملية الحصول على الحل ليست دوماً بالمسألة اليسيرة بل أن كثيراً من المعادلات التفاضلية غير قابل للحل. لقد استحوذ هذا الأمر على اهتمام علماء الرياضيات منذ بداية علم التفاضل في القرن السابع عشر وحتى أيامنا هذه؛ سواء من الناحية دراسة وجود الحل أو من ناحية خصائصه وطبيعته أو من ناحية الحصول عليه. ولم يقف الرياضي طويلاً أمام المعادلات التفاضلية التي يصعب حلها على صورة مغلقة (Closed Form Solution) بل تجاوز ذلك إلى الحل التقريبي والحل العددي.

وتمثل الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية مساحة كبيرة من خريطة الأبحاث الرياضية خصوصاً في عصرنا هذا عصر الحاسبات الآلية الكبيرة السعة والمفرطة السرعة.

مازالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية. وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات

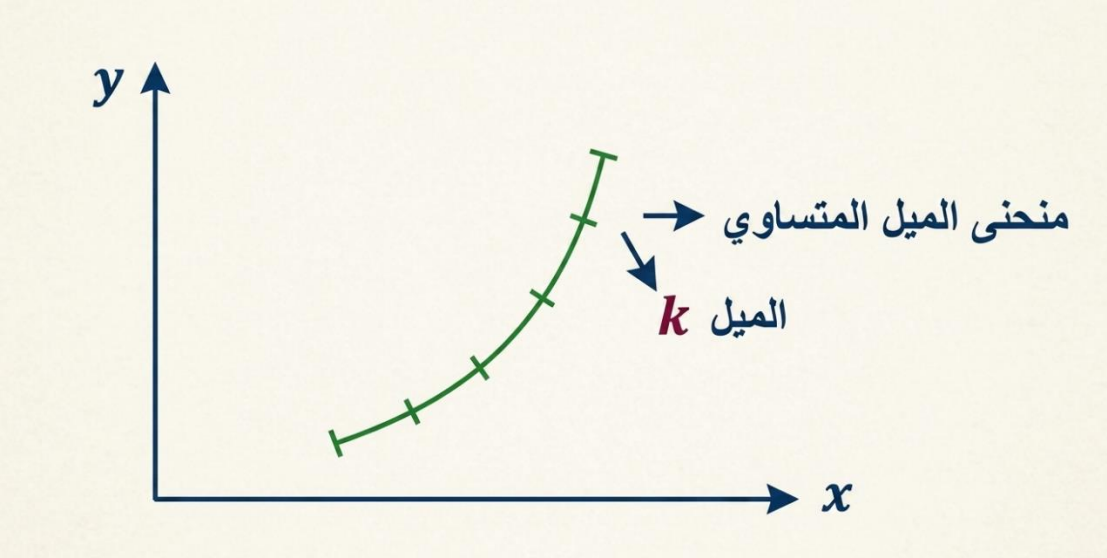
العلوم وتطبيقاتها. سوف نعرض كيفية تكوين المعادلة التفاضلية وطرق حلها سواء كانت خطية متجانسة أو غير متجانسة من أى رتبة وذات معاملات ثابتة أو متغيرة؛ هذا بالإضافة إلى حل المعادلات غير الخطية من الرتبة الأولى مع بعض التطبيقات المختلفة.



الشكل ١.٢: المعنى الهندسي للمعادلة.

حيث الدالة f(x,y) وحيدة القيمة عند جميع النقاط (x,y) في منطقة ما T، وتمثل القيمة f(x0,y0) قيمة المشتقة 'y عند النقطة (x0,y0) ، أي ميل المنحني التكاملي للمعادلة التفاضلية (٢) المار بالنقطة (x0,y0) وللحصول على المنحني التكاملي لهذه المعادلة المار بالنقطة (x0,y0) نتحرك مسافة $\Delta\ell$١ في اتجاه f(x0,y0) لنصل إلى النقطة (x1,y1) نحسب f(x1,y1) أي الميل عند النقطة ((x1,y1، ثم نتحرك مسافة $\Delta\ell$٢ في هذا الاتجاه الجديد (f

(x1,y1) لنصل إلى النقطة (x2,y2)، نحسب الميل f(x2,y2)) عند هذه النقطة، ثم نتحرك في هذا الاتجاه مسافة صغيرة $\Delta\ell_3$ لتصل إلى النقطة (x3,y3)، وهكذا لنحصل في النهاية، حينما تؤول المسافات الصغيرة إلى الصفر، على المنحني التكاملي المار بالنقطة (x0,y0) كما موضح في الشكل ١.٢.



الشكل ١.٣: منحنيات الميل المتساوية.

ويتميز هذا المنحني بأن أي نقطة عليه وميل مماسه عند هذه النقطة يحققان المعادلة التفاضلية. وهذا المنحني التكاملي هو أحد الحلول البيانية الخاصة بهذه المعادلة التفاضلية، وكل مرة نبدأ من نقطة جديدة نحصل على منحني تكاملي جديد كأحد الحلول للمعادلة كما موضح بالشكل ١.٣.

١.٣ مشكلـــة البحـــث

تعد المعادلات التفاضلية من المواضيع الأساسية في الرياضيات التطبيقية، إذ تُستخدم في تحليل ودراسة عدد كبير من الظواهر الطبيعية والهندسية التي تتغير بمرور الزمن. فهي تمثل أداة فعّالة لوصف العلاقات بين الكميات الفيزيائية ومعدلات تغيرها، مثل العلاقة بين السرعة والزمن، أو بين الجهد الكهربائي والتيار، أو بين درجة الحرارة والزمن. وتُعرف المعادلة التفاضلية الاعتيادية بأنها المعادلة التي تحتوي على متغير مستقل واحد، ومشتقات دالة مجهولة بالنسبة لذلك المتغير، وتُصنف بحسب رتبتها (أعلى مشتقة فيها) ودرجتها (أعلى قوة لتلك المشتقة).

ورغم أن دراسة هذه المعادلات تُعد من المواضيع النظرية المهمة في الرياضيات، إلا أن الكثير من الطلبة والباحثين يواجهون صعوبة في إدراك كيفية تطبيقها على الظواهر الواقعية. فغالبًا ما تبقى المفاهيم مجرد رموز وصيغ رياضية دون ربطها بالجانب العملي أو الفيزيائي. ومن هنا تبرز مشكلة البحث في السؤال الآتي:

إن الصعوبة الرئيسة تكمن في فهم العلاقة بين النموذج الرياضي والمعنى الفيزيائي لكل ظاهرة، وكيفية ترجمة الظواهر الحقيقية إلى معادلات تفاضلية تمثلها بدقة. لذلك، يسعى هذا البحث إلى توضيح الأسس النظرية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية، مع عرض بعض التطبيقات الواقعية التي تساعد على ترسيخ الفهم العملي وربط المفهوم الرياضي بالحياة اليومية والعلمية.

١.٤ اهداف البحث

يهدف هذا البحث إلى تقديم تحليل شامل لتطور الرياضيات عبر العصور المختلفة، وفهم العوامل التي ساهمت في تطورها، وتوضيح تأثيرها على العلوم الأخرى والتقدم التكنولوجي. فيما يلي شرح مفصل لكل هدف من أهداف البحث: يعد هذا البحث مهمًا من عدة نواحٍ، سواء من الناحية التاريخية، أو العلمية، أو التطبيقية. فهو لا يقتصر فقط على دراسة تطور الرياضيات، بل يوضح تأثيرها الكبير على مختلف مجالات الحياة. يمكن تصنيف أهمية البحث إلى الجوانب التالية:

- تعريف المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتصنيفها، مع التركيز على معادلات الرتبة الأولى والثانية.
- عرض أهم طرق الحل المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبتين الأولى والثانية.
- تقديم تطبيقات واقعية توضّح كيفية صياغة الظواهر الفيزيائية والهندسية والبيولوجية باستخدام المعادلات التفاضلية.
- تحليل نتائج الحلول وبيان دورها في تفسير سلوك الأنظمة الديناميكية التي تُمثَّل بهذه المعادلات.

- تنمية مهارات النمذجة الرياضية لدى الطالب وربط المفاهيم النظرية بالتطبيقات العملية في العلوم الحديثة

١.٥ التطور التاريخي للرياضيات

التطور التاريخي للرياضيات عبر عدة حقب زمنية متتالية، حيث يبين كيف تطورت الأفكار الرياضية بشكل تدريجي حتى وصلت إلى شكلها الحديث المستخدم في العلوم والهندسة والتكنولوجيا. في الحضارات القديمة مثل البابلية والمصرية، كانت الرياضيات ذات طابع عملي بسيط، يركز على الحسابات اليومية مثل القياس والبناء وحل مسائل هندسية ابتدائية. في هذه المرحلة لم تكن الرياضيات منظمة بشكل نظري، بل كانت تعتمد على التجربة والتطبيق المباشر.

أما في الحضارة اليونانية فقد حدث تحول مهم نحو الرياضيات النظرية، حيث تم تأسيس أسس البرهان المنطقي والهندسة الإقليدية. في هذه الفترة ظهرت أفكار علمية دقيقة ساهمت في بناء قواعد الرياضيات الحديثة، وبرز علماء كبار مثل إقليدس وأرخميدس الذين وضعوا أسس التفكير الرياضي المنظم. في العصر الإسلامي، شهدت الرياضيات تطورًا كبيرًا من خلال إدخال علم الجبر بشكل مستقل وتطوير علم المثلثات بشكل واسع، بالإضافة إلى استخدام الخوارزميات في حل المسائل.

كما تم الاهتمام بتطبيق الرياضيات في الفلك والهندسة والقياس، وبرز علماء مثل الخوارزمي الذي يُعد مؤسس علم الجبر. بعد ذلك جاء عصر النهضة الأوروبية الذي أعاد

إحياء العلوم القديمة وطورها، حيث ظهرت الرياضيات التحليلية التي ربطت بين الجبر والهندسة، وبدأ استخدام الرموز والمعادلات بشكل أكثر دقة، مما مهد لظهور التفاضل والتكامل.

في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر، تطورت الرياضيات بشكل كبير مع ظهور التفاضل والتكامل بشكل رسمي، إضافة إلى دراسة المعادلات التفاضلية والنظريات الرياضية المتقدمة. في هذه المرحلة ساهم علماء مثل أويلر وغاوس في بناء أساس قوي للرياضيات الحديثة. أما في العصر الحديث، فقد أصبحت الرياضيات أداة أساسية في جميع مجالات العلوم، وخاصة في النمذجة الرياضية، الحوسبة، الذكاء الاصطناعي، وتحليل البيانات. كما ظهرت فروع جديدة تعتمد على الحوسبة والخوارزميات، مما جعل الرياضيات جزءًا أساسيًا من التطور التكنولوجي.

بشكل عام، يوضح الجدول ١.١ أن الرياضيات لم تتطور بشكل مفاجئ، بل عبر مراحل تاريخية متتابعة، حيث ساهم كل عصر في بناء جزء من الهيكل الرياضي الحديث الذي نستخدمه اليوم.

جدول ١,١: يبين المساهمات الرياضية للحقبات الزمنية المتوالية مع ابزر العلماء.

المساهمات الرياضية	أبرز العلماء	السمات الرئيسية	الحقبة الزمنية

الهندسة الستيني، العد نظام الأعداد نظريات الإقليدية،	المصريون، البابليون، إقليدس،) الإغريق (أرخميدس فيثاغورس،	العد، أنظمة تطوير الهندسة الحساب، الأساسية	**(م 500 - م.ق 3000) الحضارات القديمة**
المثلثات، حساب الجبر، تطوير الهندسي البرهان أساليب	ابن الخيام، عمر الخوارزمي، الهيثم	وحساب الجبر تطور المعرفة انتقال المثلثات، الرياضية	**(م 1500 - م 500) العصورالوسطى**
التفاضل التحليلية، الهندسة والتكامل	لايبنتز نيوتن، ديكارت، رينيه	الجبر بين الربط حساب ظهور والهندسة، والتكامل التفاضل	**(م 1700 - م 1500) عصر النهضة**
الهندسة التفاضلية، المعادلات الإقليدية غير	لاغرانج أويلر، غاوس،	التحليل تطوير نظرية توسيع الرياضي، الأعداد	**19 - 18 القرن**
البيانات، تحليل الخوارزميات، الكمي التشفير	نيومان، فون تورينغ، آلان وايلز أندرو	الحوسبة، في ثورة الذكاء التشفير، الاصطناعي	**21 - 20 القرن**

١.٦ الحافز البحثي

يُعد علم الرياضيات حجر الأساس في تطور المعرفة البشرية، حيث لم يقتصر دوره على كونه مجرد أداة للحساب والقياس، بل تحول إلى لغة عالمية تُستخدم لفهم الظواهر الطبيعية وتطوير التقنيات الحديثة. إن استكشاف تطور الرياضيات عبر العصور لا يساعد فقط في فهم كيف نشأت النظريات الرياضية، ولكنه يكشف أيضًا عن الترابط الوثيق بين الابتكار الرياضي والتقدم العلمي والتكنولوجي.

يدفعنا هذا البحث إلى النظر في الرياضيات كعملية ديناميكية مستمرة، تتأثر بالسياق الثقافي والتطورات العلمية والتحديات المجتمعية. من الحضارات القديمة، التي استخدمت الرياضيات في الهندسة والفلك، إلى العصور الوسطى حيث لعب العلماء المسلمون دورًا رئيسيًا في تطوير الجبر وحساب المثلثات، وصولًا إلى عصر النهضة والعصر الحديث حيث شكلت الرياضيات الأساس لنظريات الفيزياء والكيمياء وعلوم الحاسوب.

ومع دخول القرن الواحد والعشرين، أصبحت الرياضيات أكثر أهمية من أي وقت مضى، حيث تعتمد مجالات مثل الذكاء الاصطناعي، وتحليل البيانات الضخمة، والتشفير، والتكنولوجيا الحيوية، على مفاهيم رياضية متقدمة. هذا البحث ليس مجرد استكشاف تاريخي، بل هو محاولة لفهم كيف أن التطورات الرياضية السابقة تمهد الطريق لاكتشافات مستقبلية قد تعيد تشكيل عالمنا.

تتمثل الدوافع الأساسية لهذا البحث في تقديم تحليل معمق لكيفية تفاعل الرياضيات مع التغيرات الحضارية والعلمية، وتحديد العوامل التي عززت نقل وتطور المعرفة الرياضية، ودراسة تأثيرها المباشر على العلوم الحديثة. من خلال هذا البحث، نطمح إلى تسليط الضوء على الدور المحوري للرياضيات في الابتكار والبحث العلمي، مع تقديم رؤية مستقبلية لكيفية استمرارها في تشكيل ملامح العلوم والتكنولوجيا في المستقبل.

الفصل الثاني

٢.١ المقدمة

تُعد المعادلات التفاضلية من أهم الأدوات الرياضية التي تُستخدم في وصف وتحليل الظواهر الديناميكية التي تتغير مع الزمن أو المكان، حيث تمثل العلاقة بين المتغيرات ومعدلات تغيرها بشكل دقيق ومنهجي. ومن بين أنواع هذه المعادلات، تحتل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى مكانة أساسية، نظرًا لبساطتها النسبية وقدرتها على تمثيل عدد كبير من الظواهر الطبيعية والهندسية.

تعتمد المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى على وجود المشتقة الأولى فقط للدالة المجهولة، مما يجعلها أداة فعالة لدراسة العديد من التطبيقات الواقعية مثل النمو السكاني، وانتقال الحرارة، وتدفق السوائل، وانتشار المعلومات في الأنظمة الرقمية. كما تُستخدم هذه المعادلات في مجالات متقدمة مثل الذكاء الاصطناعي والأنظمة الديناميكية، حيث تسهم في بناء نماذج رياضية قادرة على التنبؤ بسلوك الأنظمة المعقدة.

إن فهم هذا النوع من المعادلات لا يقتصر على الجانب النظري فحسب، بل يمتد ليشمل تطبيقات عملية واسعة، مما يجعل دراستها ضرورية لطلبة التخصصات العلمية والهندسية. ومن هذا المنطلق، يهدف هذا البحث إلى تقديم تحليل شامل للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، مع التركيز على مفهومها، وخصائصها، وطرق حلها، إضافة إلى استعراض أبرز تطبيقاتها في النمذجة الرياضية.

٢.٢ مفهوم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

٢.٢.١ التعريف العلمي: المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى هي معادلة تحتوي على مشتقة أولى لدالة مجهولة بالنسبة لمتغير مستقل واحد كما موضح في المعادلة التالية .

٢.٢.٢ الشكل العام:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

حيث ان:

- y تمثل الدالة للمجهول.
- x تمثل المتغير المستقل.
- $f(x, y)$ تمثل داله في xو دالة في y.

٢.٣ أنواع الدوال

الدوال هي أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات، حيث تصف العلاقة بين مجموعة من المدخلات (المجال) ومجموعة من المخرجات (المدى). يمكن تصنيف الدوال إلى أنواع مختلفة بناءً على الشكل الرياضي او خصائص سلوكها.

٢.٢.١ تعريف الدالة: الدالة هي علاقة رياضية بين متغيرين، حيث يتم تحديد قيمة واحدة للمخرجات (y) مقابل كل قيمة من المدخلات .(x) يرمز للدالة عادةً بـعلاقات التي تصفها :

- **الدوال الخطية (Functions Linear):** هي دوال من الدرجة الاولى على الشكل الاتي:

$$f(x) = ax + b$$

- **الدوال التربيعية (Functions Quadratic):** هي دوال على التالي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- **الدوال الاسية:** هي دوال على الشكل التالي:

$$f(x) = a.b^x$$

- **الدوال اللوغاريتمية:** هي دوال عكسية للدوال الاسية على الشكل التالي:

$$f(x) = a\log_b(x)$$

- **الدوال المثلثية:** هي دوال تستخدم في حسابات الزوايا والدوائر تشمل الجيب $\sin(x)$والجيب التمام $\cos(x)$لظل $\tan(x)$
- **الدوال المطلقة:** هي دوال على الشكل التالي:

$$f(x) = |x|$$

- **الدوال الكسرية:** وتمثل كالاتي:

$$P(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$$

- **الدوال الجذرية:** هي دوال تحتوي علي جذر، مثل

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ او } f(x) = \sqrt[n]{x}$$

- **الدوال العكسية:**

مثل دالة الجيب العكسية $\sin^{-1}(x)$

ودالة الجيب تمام العكسية $\cos^{-1}(x)$

٢.٤ أهمية الدوال

تستخدم في العلوم والهندسة لتحليل العلاقات بين المتغيرات .تدخل في تطبيقات يومية مثل الاقتصاد، الفيزياء، وعلم البيانات .تسهم في فهم الطبيعة من خلال نمذجة الظواهر المختلفة تمثل الدوال جزءًا أساسيًا من الرياضيات، وهي متنوعة وشاملة، تتيح وصف العلاقات الرياضية بطرق متعددة. فهم الأنواع المختلفة للدوال يساعد في تطبيقها بشكل فعّال في الحياة العملية والعلمية

٢.٤.١ قواعد الاشتقاق: الاشتقاق هو أحد فروع التفاضل في الرياضيات، ويهدف إلى إيجاد معدل تغير دالة بالنسبة لمتغيرها. يعتمد الاشتقاق على قوانين معينة لتسهيل إيجاد المشتقات. فيما يلي أهم قوانين الاشتقاق الأساسية:

- نعتبر الدوال U,V,W في الصيغة التالية قابلة للاشتقاق بالنسبة لX

ونسمي $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \acute{f}(x)$ المشتقة الاولى ل $f(x)$

قاعدة ثابتة

حيث c ثابت، فإن مشتقتها تساوي صفر

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

- قاعدة الاشتقاق للثوابت المضاعفة (ضرب الثابت):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$$

- قاعدة الجمع والطرح: اذا كانت الدالة عبارة عن جمع او طرح دالتين

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}(u \pm v \pm \cdots) = \frac{d}{dx}(u) \pm \frac{d}{dx}(v) \ldots$$

- قاعدة الضرب (ضرب دالتين):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + V\frac{d}{dx}(u)$$

- حاصل ضرب ثلاث دوال:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(uvw) = uv\frac{d}{dx}(w) + uw\frac{d}{dx}(v) + vw\frac{d}{dx}(u)$$

- قاعدة القسمة (قسمة دالتين):

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

٢.٤.٢ مشتقات الدوال المثلثية واللوغاريتمية: بشكل عام، يمكن القول إن الدوال المثلثية تعبر عن تغيرات دورية متكررة، بينما الدوال اللوغاريتمية تعبر عن تغيرات بطيئة ومتدرجة، وكلاهما ضروري لفهم سلوك الأنظمة في الرياضيات والعلوم التطبيقية.

$$1)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(sin\ u) = cos(u)\frac{du}{dx}$$

$$2)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\cos \mathrm{u}) = -\sin(\mathrm{u})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\tan \mathrm{u}) = \sec^2(\mathrm{u})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$4)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\cot \mathrm{u}) = -\csc^2(\mathrm{u})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$5)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\sec \mathrm{u}) = \sec(\mathrm{u}) \cdot \tan(\mathrm{u})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$6)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\csc \mathrm{u}) = -\csc(\mathrm{u}) \cdot \cot(\mathrm{u})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$7)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{e}^{\mathrm{u}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{u}}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$8)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{a}^{\mathrm{u}}) = \mathrm{a}^{\mathrm{u}} \cdot \ln(\mathrm{a})\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$9)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\ln \mathrm{u}) = \frac{1}{\mathrm{u}}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

- خواص الدوال اللوغاريتمية:

$$1)\ \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$2)\ \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$3)\ \ln(a^r) = r\ln(a)$$

$$4)\ \ln(1) = 0$$

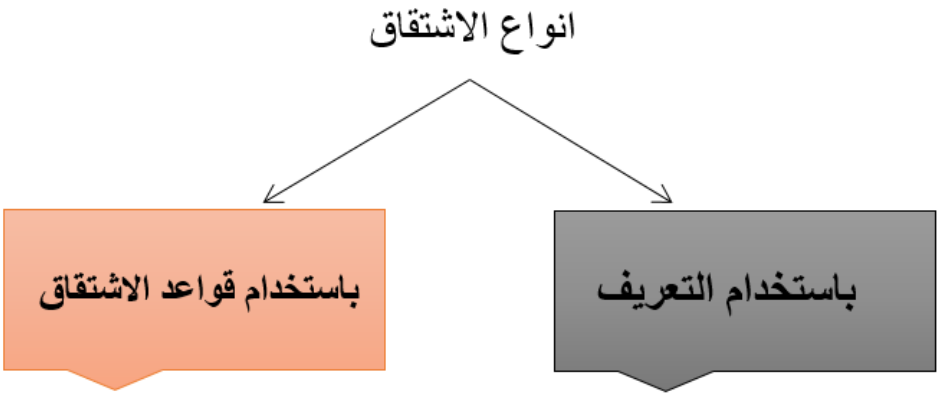
- خواص الدوال الاسية:

$$1)\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$2)\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$3)\ e^{(x)^r} = e^{rx}$$

$$4)\ e^{\frac{x}{y}} = e^{x \cdot y^{-1}}$$



الشكل ٢,١: يوضح انواع الاشتقاق.

- **باستخدام التعريف:** الاشتقاق باستخدام التعريف يعتمد على مفهوم الميل أو المشتقة الأولى لدالة عند نقطة معينة، وهو الطريقة الاساسية لحساب مشتقة دالة رياضية بناء على تعريف المشتقة ويتم تعريف المشتقة باستخدام الحد التالي مشتقة الدالة $f(x)$ عند نقطة x=a هي الحد التالي

<u>امثلة حول الاشتقاق باستخدام التعريف</u>

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال ١: جد $f'(2)$ بأستخدام التعريف

$$1)\ f(x) = x^2 + 5x + 3$$

الحل:

$$f'(2) = \begin{cases} f(2) \\ f(2+\Delta x) \end{cases}$$

$$f(2) = (2)^2 + 5(2) + 3$$

$$f(2) = 4 + 10 + 3 = 17$$

$$f(2+\Delta x) = (2+\Delta x)^2 + 5(2+\Delta x) + 3$$

$$f(2+\Delta x) = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x + 3$$

$$f(2+\Delta x) = (\Delta x)^2 + 9\Delta x + 17$$

نطبق بالقانون

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 9\Delta x + 17 - 17}{\Delta x}$$

نسحب (Δx) عامل مشترك

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 9)}{\Delta x}$$

نعوض لـ (0) في (Δx)

$$= 0 + 9 = 9$$

مثال ٢: اذا كانت $f(x) = \sqrt{x + 3}$ جد $f'(1)$ بأستخدام التعريف

الحل:

$$f'(1) = \begin{cases} f(1) \\ f(1 + \Delta x) \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x + 3}$$

$$f(1) = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$f(1+\Delta x)=\sqrt{1+\Delta x+3}$$

$$f(1+\Delta x)=\sqrt{\Delta x+4}$$

نطبق بالقانون

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

نعوض x في السؤال

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x+4}-2}{\Delta x}$$

ملاحظة: إذا كان سؤال التعريف يحتوي على جذر بعد التعويض فأننا نضرب في مرافق الجذر

المرافق هو عكس الاشارة الوسطية للمقدار

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x+4}-2}{\Delta x}.\frac{\sqrt{\Delta x+4}+2}{\sqrt{\Delta x+4}+2}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\Delta x+4}\right)^2-(2)^2}{\Delta x.\left(\sqrt{\Delta x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+4-4}{\Delta x.\left(\sqrt{\Delta x+4}+2\right)}$$

نعوض لـ (0) في (Δx)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x.\left(\sqrt{\Delta x + 4} + 2\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

مثال ٣: اذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ جد $f'(2)$ بأستخدام التعريف

الحل:

$$f'(2) = \begin{cases} f(2) \\ f(2+\Delta x) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

نعوض لـ (2) في (x)

$$f(2) = \frac{2(2)+1}{2-1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$f(2+\Delta x) = \frac{2(2+\Delta x)+1}{2+\Delta x-1}$$

$$f(2+\Delta x) = \frac{4+2\Delta x+1}{\Delta x+1} = \frac{2\Delta x+5}{\Delta x+1}$$

نطبق بالقانون وبدل كل (x) نعوض (2)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2\Delta x + 5}{\Delta x + 1} - \frac{5}{1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2\Delta x + 5 - (5\Delta x + 5)}{\Delta x + 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2\Delta x + 5 - 5\Delta x - 5}{\Delta x + 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-3\Delta x}{\Delta x + 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x + 1} . \frac{1}{\Delta x}$$

نعوض لـ (0) في (Δx)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{\Delta x + 1} = \frac{-3}{0+1} = \frac{-3}{1} = -3$$

- **باستخدام قوانين الاشتقاق:** قوانين الاشتقاق تساعدنا على إيجاد المشتقة بسرعة بدون الرجوع إلى التعريف الأساسي (حد الفرق). كل قانون ينطبق على نوع معين من الدوال أو العمليات.

امثلة حول الاشتقاق باستخدام قواعد الاشتقاق:

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^5$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x^4$$

$$1)\ f(x) = x.(x^2+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = x.\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}.2x + (x^2+3)^{\frac{1}{2}}.1$$

$$= \frac{x^2}{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}} + (x^2+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} + \sqrt{x^2+3}$$

$$2)\ f(x) = \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^4$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 . \frac{(x^2+1).2x - (x^2+3).2x}{(x^2+1)^2}$$

$$3)\ y = \sqrt[3]{3x+5} \Longrightarrow y = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(3x+5)^{\frac{1}{3}}.3 = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$4)\ f(x) = e^{3x}$$

$$f'(x) = 3e^{3x}$$

$$5)\ f(x) = \ln(2x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 1} . 4x = \frac{4x}{2x^2 + 1}$$

$$6)\ f(x) = \cos(5x)$$

$$f'(x) = -\sin(5x) . 5 = -5\sin(5x)$$

$$7)\ f(x) = \frac{e^{2x}.\sin(5x)}{\tan(x)}$$

$$f'(x) = \frac{(\tan(x)).e^{2x}.\cos(5x).5 + \sin(5x).2e^{2x}}{(\tan(x))^2}$$

$$8)\ f(x) = \ln(5x) . e^{3x^2} . \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{5x} . 5\ e^{3x^2} . \cos(x) + \ln(5x) . e^{3x^2} - \sin(x) + \ln(5x) . \cos(x) . 6xe^{3x^2}$$

$$9)\ f(x) = \sqrt[3]{5x^2 + \cos(3x + 1)^2}$$

$$f(x) = (5x^2 + \cos(3x + 1))^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x^2 + \cos(3x + 1))^{\frac{-1}{3}} . 10x - \cos(3x + 1) . 3$$

جد المشتقة الثانية $\frac{dy}{dx}$ أو y'

10) $y = \sin(3x) + \cos(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos(3x) - 2\sin(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin(3x) - 4\cos(2x)$$

11) $y = e^{\sin(\ln x)}$

$$y' = \frac{1}{x}\cos(\ln x) \,.\, e^{\sin(\ln x)}$$

$$y'' = \frac{1}{x}\cos(\ln x) \,.\, \frac{1}{x}\cos(\ln x) \,.\, e^{\sin(\ln x)} + e^{\sin(\ln x)} . -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$$

12) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = 6x - 12$$

13) $y = 2(3x^3 + 2x^3)^4$

$$y' = 8(3x^3 + 2x^3)^3 . 9x^2 + 6x^2$$

$$y'' = 24(3x^3 + 2x^3)^2 . 18x + 12x$$

الفصل الثالث

٣.١ المقدمة

في عالم الرياضيات، تعتبر مفاهيم الاستمرارية والاشتقاق من الركائز الأساسية التي تقوم عليها العديد من النظريات والتطبيقات. بالنسبة للدوال ذات المتغير الواحد، نفهم أن الدالة تكون مستمرة عند نقطة معينة إذا كان بالإمكان رسم منحناها دون انقطاع، بينما يشير الاشتقاق إلى وجود مشتقة تمثل معدل التغير اللحظي. هذه المفاهيم، التي تبدو بسيطة في بُعد واحد، تكتسب طبقات جديدة من التعقيد والأهمية عند توسيعها لتشمل الدوال ذات المتغيرين.

بالانتقال إلى الاشتقاق، فإننا نتحدث عن معدل تغير الدالة بالنسبة لكل متغير من متغيريها بشكل مستقل. هنا يظهر مفهوم المشتقات الجزئية، حيث نقوم بتفاضل الدالة بالنسبة لأحد المتغيرين مع اعتبار المتغير الآخر ثابتًا. هذه المشتقات الجزئية توفر لنا معلومات قيمة حول كيفية تغير الدالة في اتجاهي (x) و (y) بشكل منفصل. بالإضافة إلى ذلك، يوجد مفهوم التفاضل الكلي الذي يجمع بين هذه المشتقات الجزئية لتقديم تقريب خطي للتغير الكلي في الدالة نتيجة للتغيرات الصغيرة في كلا المتغيرين.

من المهم أن ندرك العلاقة الوثيقة بين الاستمرارية والاشتقاق. فإذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة ما، فإنها بالضرورة تكون مستمرة عند تلك النقطة. ومع ذلك، فإن العكس ليس صحيحًا دائمًا، حيث يمكن أن تكون الدالة مستمرة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند نقاط معينة، مثل تلك التي تظهر فيها زوايا حادة أو مماس رأسي.

تعتبر مفاهيم الاستمرارية والاشتقاق للدوال ذات المتغيرين أدوات قوية ذات تطبيقات واسعة في مجالات متنوعة مثل الفيزياء والهندسة. فهي تساعد في نمذجة الظواهر الطبيعية التي تتضمن تغيرات سلسة، وتحليل معدلات التغير، وتحسين أداء الأنظمة، مما يجعلها ضرورية لفهم العالم من حولنا وتطوير التقنيات المختلفة.

٣.٢ الدوال المستمرة ذات المتغير الواحد

الدالة لها تطبيقات عديدة في الرياضيات. تعتبر خصائص الدالة مثل الاستمرارية والانقطاع مهمة أيضًا في فهم الدَوَالّ لأنه يمكن التنبؤ بسلوك هذه الدَوَالّ واستخدامها للتعبير عن العديد من الظواهر الطبيعية. سنقدم في هذه المقالة الدالة المستمرة والدالة غير المستمرة ونتعرف على هذه المجموعة من الدَوَالّ بمساعدة الأمثلة.

٣.٢.١ الدالة المستمرة

نستخدم في هذا القسم، منحنى الدالة لتحديد الدالة المستمرة. إذا لم يكن هناك مقاطعة عند رسم منحنى الدالة $f(x)$ وكان الرسم البياني للدالة بدون نقطة قفزة، فإن الدالة $f(X)$ تسمى مستمرة. بالطبع، قد يكون هذا التفسير تعريفًا غير رسميا للاستمرار، لكنه يساعد على فهم الفكرة الرئيسية. في الصورة أدناه، يظهر منحنى الدالة المستمرة. يمكن أن تكون هذه الدالة متعددة الحدود من الدرجة الثانية بالصيغة $f\ (x) = ax4 + bx3 + cx2 + dx + e$، لأنها تتقاطع مع المحور

الأفقي عند أربع نقاط، أي أن لها أربعة جذور. كقاعدة عامة، كثيرات/ متعددات الحدود تكون مستمرة.

باستخدام التعريف المذكور أعلاه، قد يكون من السهل تحديد الدوال غير المستمرة (Discontinues). وبهذه الطريقة، ستكون الدالة المنفصلة دالة يكون برسمها البياني انقطاعًا أو قطعًا أو قفزة. لذلك، لتحديد مثل هذه الدَوَالّ، يجب أن نبحث عن نقاط التوقف أو القفزات. وفقًا لهذا الموضوع، يمكن التحقق من استمرارية وانقطاع الدوال التالية بمساعدة المخططات. منحنيات الدالة $\sin x$ و $X2$، التي تظهر في الصور التالية، على التوالي، تشير إلى استمرارية الدالة. لأنه لا توجد نقطة توقف أو قفزة أو خط مقارب عمودي فيها.

٣.٢.٢ دالة منفصلة بخط مقارب عمودي

يتم أيضا فصل دالة $sign\ (x - 1.5)$ عن طريق القفز بارتفاع وحدتين عند النقطة $x = 1.5$. تم رسم الصورة التالية لإظهار رسم تخطيطي لهذه الدالة. وتعني دالة $Sign$ أنه إذا كانت قيمة متغير الدالة (x) موجبة، فإن قيمة الدالة ستكون مساوية لـ ١، وإلا ستكون -١.

٣.٢.٣ مجال ومدى الدالة (Domain and Range)

- **مجال الدالة:** تسمى مجموعة القيم التي تُعطى للدالة كمتغيرات والتي يمكن حساب قيمة الدالة على اساسها نشير إلى مجال الدالة بالحرف D.

- **مدى الدالة:** مدى الدالة تُطلق على مجموعة القيم الناتجة عن حساب الدالة لكل عضو في مجموعة المجال. يشار إلى مدى الدالة بالحرف R. بناءً على ذلك، يمكن إظهار العلاقة بين مجال ومدى الدالة من خلال الرسم التخطيطي التالي. لذلك قد تكون الدالة مستمرة أو منفصلة حسب مجالها. على سبيل المثال، إذا كنت تفكر في الدالة $(1^\wedge(x-1)$ فإن مجال هذه الدالة هي:

وهو ما يعني الأعداد الحقيقية بدون قيمة ١. لأن مقام هذا الكسر هو صفر لـ $x = 1$ ولا يمكن حساب الدالة. لذلك يمكن القول أن هذه الدالة متصلة في مجالها. لذلك:

الدالة المستمرة في مجالها تسمى الدالة المستمرة.

٣.٣ التعريف الرئيسي للاستمرارية على أساس حد الدالة

الحد $(Limit)$ هو أحد المفاهيم الأساسية والمهمة في الرياضيات وله تطبيقات عديدة. على سبيل المثال، لحساب التكاملات أو المشتقات، يتم استخدام تعريف الحد لإثبات الصيغ لكيفية حساب التكاملات أو المشتقات. أيضًا، يعتمد التعريف الرئيسي للاستمرارية على مفهوم الحد.

٣.٤ تعريف الاستمرارية

الدالة المستمرة او المتصلة بانتظام (*Continuous Function*) هي دالة رياضية تؤدي فيها تغييرات طفيفة في متغيّر الدالّة إلى تغييرات طفيفة في قيمتها. الدالة التي لا تحقّق هذه الخاصّية تدعى (دالة غير مستمرة) أو (دالة منفصلة). بشكل بديهي، كما ذكرنا سابقا فإنّ دالة المستمرة

ما إذا استطعنا أن نرسم رسمها البياني بدون رفع القلم عن الورقة، مع أنّ هذا التعريف ليس دقيقًا.

على سبيل المثال: إذا كانت الدالّة $h(t)$ تمثّل ارتفاع زهرة ما في الزمن t، فإنّ هذه الدالة مستمرة. في الواقع، هنالك قول مأثور في الفيزياء الكلاسيكية يقضي بأنّ كل شيء في الطبيعة استمراري (مستمر). وإذا فرضنا أنّ الدالة $m(t)$تمثّل ارتفاع رصيد حساب في البنك في الزمن t، فإنّ قيمة الدالة تقفز كلّما تم سحب بعض المال أو إدخاله إلى الحساب، لذا فإنّ هذه الدالّة غير مستمرّة.

٣.٥ الدالة المستمرة بقيم حقيقية

ولنفترض أن دالّة معيّنة بمتغيّر واحد تحوّل أعدادًا حقيقية إلى أعداد حقيقية، وأنّ مجالها هو فاصل ما (كفترة زمنيّة مثلاً)، مثل الدوال h و m. بالإمكان رسم دالة كهذه في نظام إحداثي ديكارتي؛ وتكون هذه الدالّة دالة مستمرة إذا ما كان رسمها البياني منحنًى واحدًا غير منقطعًا، بدون ثغرات أو قفزات. التعريف الأدق هو أنّ الدالة f هي دالة مستمرة في نقطة c المعيّنة، إذا تحقّقت الشروط التالية:

- أن تكون القيمة $f(c)$ معرّفة، أي أنّ c هو عنصر تابع لمجال الدالّة f؛
- هنالك نهاية للدالة f عند اقترابها من العدد c إمّا من اليمين أو من اليسار وهي تساوي $f(c)$.
- وتدعى الدالّة دالة مستمرّة إذا تحقّق الشرطان أعلاه لكل نقطة في مجال الدالّة.

بشكل عام نقول أنّ الدالة مستمرة على مجموعة جزئية من مجال الدالّة، إذا كانت مستمرّة في كل نقطة من هذه المجموعة جزئية من مجال الدالّة، إذا كانت مستمرّة في كل نقطة من هذه المجموعة. تسمية الدالة بدالة مستمرة تعني بشكل عام أنّ الدالة مستمرة لكل الأعداد الحقيقيّة.

٣.٦ تعريف الاستمراريّة بحسب كوشي (إبسيلون - دلتا)

في الحديث عن النقاط الحدوديّة، بالإمكان تعريف الدالة المستمرة بالشكل الآتي: لننظر مجددًا إلى دالّة f بمتغيّر واحد حقيقي قيمها حقيقيّة، ولنفترض أنّ العدد c هو أحد عناصر مجال الدالّة f. تكون الدالّة f دالة مستمرة في النقطة c إذا تحقّق أنّ: لكل $\varepsilon > 0$، مهما كان صغيرًا، يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث أنّ لكل xفي مجال الدالّة f الذي يحقّق

$$c - \delta < x < c + \delta$$، يُحقّق التالي بالنسبة لـ$f(x)$.

$$F(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

وبتدوين بديل: إذا كانت المجموعتين IوD، مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد الحقيقيّة R، فإنّ استمراريّة الدالّة $F : I \rightarrow D$ في النقطة $C \in I$ تعني أنّه لكل $\varepsilon > 0$، هنالك $\delta > 0$يحقّق لكل $x \in I$:

$$< \rightarrow \forall |F(x) - F(c)| < \epsilon |x - c|$$

كان الرياضي أوغستين كوشي أوّل من برهن استمراريّة دالّة بهذه الطريقة. ولتفسير هذا التعريف بصورة بديهيّة: إذا اخترنا أي جوار ϵ، مهما كان صغيرًا، لـ $F(c)$ فبالإمكان إيجاد جوار δ لـ c بحيث تكون قيم الدالّة في الجوار الأخير موجودة كلّها في الجوار الأوّل.

الفصل الرابع

٤.١ المقدمة

يُعد الرسم البياني أداة فعالة وأساسية في فهم سلوك الدوال الرياضية وتفسير العلاقة بين المتغيرات. فمن خلاله يمكن تتبع كيف تتغير قيمة الدالة تبعًا لتغير المتغير المستقل، وهو ما يسهّل تحليل الكثير من الظواهر العلمية أو النماذج الرياضية. يعتمد الرسم البياني على التمثيل البصري للنقاط الناتجة عن إدخال قيم مختلفة في الدالة وملاحظة المخرجات. تنقسم الدوال الرياضية إلى عدة أنواع، ويختلف شكل الرسم البياني باختلاف نوع الدالة. على سبيل المثال، تأخذ الدالة الخطية شكل خط مستقيم يُعبر عن علاقة تناسبية بين المتغيرين تكمن أهمية الرسم البياني للدوال في قدرته على توصيل المفاهيم الرياضية بطريقة بصرية، تساعد المتعلم على التفاعل مع الرياضيات وفهمها بصورة أعمق.

كما يُستخدم في مجالات متعددة تشمل الهندسة، الاقتصاد، الفيزياء، والعلوم التطبيقية. وبالتالي، فإن إتقان مهارة قراءة ورسم الدوال يُعد أحد المفاتيح الأساسية لفهم وتطبيق الرياضيات في الحياة الأكاديمية والعملية. ومع تنوع الدوال الرياضية بين الخطية، والتربيعية، والأسية، والجذرية، والمثلثية، فإن لكل نوع منها تمثيلًا بيانيًا خاصًا يعكس خصائصه وسلوكه، مما يُسهم في توضيح الفروق الجوهرية بينها. وعليه، فإن فهم الرسم البياني يُعد مهارة لا غنى عنها في دراسة الرياضيات وتطبيقاتها الحديثة.

٤.٢ بيئية التنفيذ

تم اجراء هذا البحث التحليلي من خلال دراسة وتفحص مجموعة من المناهج التعليمية المعتمدة في تدريس الرياضيات للمرحلة الجامعية في العراق مع التركز على المواد التي تغطي موضوعات الاستمرارية والاشتقاق لدوال ذات المتغيرين تم اختيار هذا المناهج نظرا لأهميتها في تشكيل الاساس المعرفي للطلاب في هذا المجال شملت عملية التحليل مراجعة محتوى الكتب الدراسية وتقييم استراتيجيات التدريس المقترحة فيها

بالإضافة الى تحليل الامثلة والتمارين المقدمة استخدم الباحث منهجية التحليل الكمي والنوعي لتحديد مدى توافق هذه المناهج مع المعايير التعليمية الحديثة ومدى فعاليته في تحقيق الاهداف التعليمية المرجوة.

تم دعم التحليل بالاستعانة بأدوات إحصائية لقياس توزيع الموضوعات الرياضية ومدى تكرارها بالإضافة الى اجراءات مقارنات مع مناهج دولية معتمدة كما تم الاطلاع على دراسات سابقة ذات صلة لتوفير سياق اوسع للنتائج المستخلصة بواسطة البارامترات الاتية كما موضحة في الجدول ٤.١.

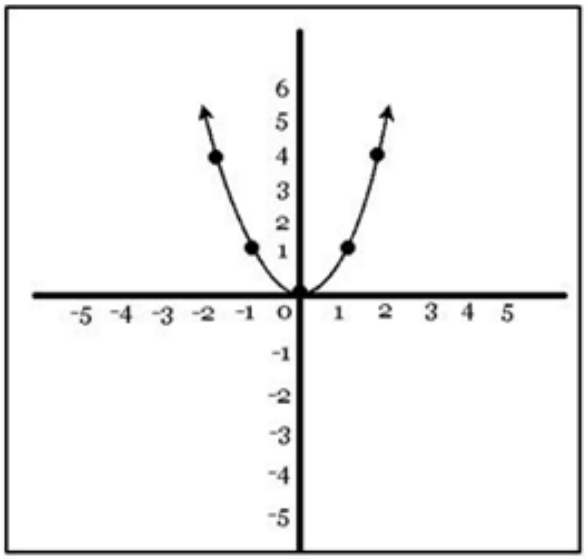
الجدول ٤.١: البيئة التنفيذية للدراسة الحالية.

التسلسل	الأدوات	التفاصيل
١	نوع البيئة	بيئة برمجية حاسوبية
٢	نوع الحاسبة	Lenovo
		Lenovo /2.20Ah7
		Cori7
		Ram 512
		Windows 2010 \ 64 bit
٣	الذكاء الاصطناعي	Chat GPT turbo 4.0
		Poe.com

٤.٣ الرسم البياني للدوال

الرسم البياني للدوال هو تمثيل بصري يُستخدم لتوضيح العلاقة بين المتغيرات في الدالة الرياضية. وهو أداة مهمة جدًا في فهم سلوك الدالة ومجالاتها، سواء كانت خطية، تربيعية، أسية، جذرية، أو غيرها. إليك نظرة عامة مختصرة. سنتناول في هذه المقالة أنواع الرسوم البيانية للدوال، والرسوم البيانية والدوال، وخصائص الرسوم البيانية للدوال، وخصائص الدوال، وغيرها. هناك علاقة بين الدالة ورسمها البياني. يساعد رسم

الدوال البياني على تصوّر الدالة المعطاة في صورة جبرية. الدالة في الرياضيات هي نوع محدد من العلاقات ذات قواعد محددة. على سبيل المثال، الدالة f هي علاقة بين مجموعة غير فارغة A ومجموعة غير فارغة B، حيث يكون مجال الدالة f هو A، ولا يوجد زوجان مرتبان متمايزان في الدالة f لهما نفس العنصر الأول. علاوة على ذلك، لدينا أنواع مختلفة من الدوال التي يمكن تعريفها بناءً على خصائصها. الوظائف: الوظيفة هي علاقة بين مجموعة من المدخلات ومجموعة من المخرجات، حيث يرتبط كل مدخل بمخرج واحد فقط افترض أن لدينا المجموعتين P وQ. سيكون التعيين من P إلى Q دالة فقط إذا كان كل عنصر في المجموعة P يحتوي على عنصر واحد فقط من المجموعة Q معين له كما مبين في الشكل ٤.١.



الشكل ٤.١: يبين رسم الدالة عند النقطة x, y.

٤.٤ الرسوم البيانية

في الرياضيات وتحديدًا في نظرية الرسوم البيانية الرسم البياني هو بنية تتكون من مجموعة من العناصر بعضها "مرتبط" بطريقة ما تتوافق هذه العناصر مع تجريدات رياضية تُعرف بالرؤوس ويُعرف كل زوج

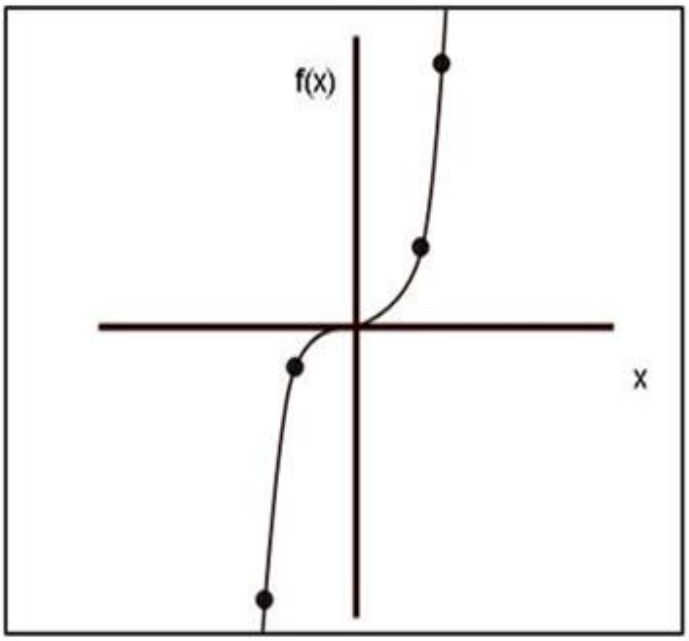
من هذه العناصر المترابطة بالحافة. الرسم البياني للدالة هو مجموعة جميع النقاط في المستوى الذي يتخذ الشكل

((x, f(x)). يمكن تعريف الرسم البياني للدالة f أيضًا بأنه الرسم البياني للمعادلة y = f(x) وبالتالي فإن الرسم البياني للدالة هو مجموعة جزئية من الرسم البياني للمعادلة.

a. أنواع الوظائف ورسومها البيانية

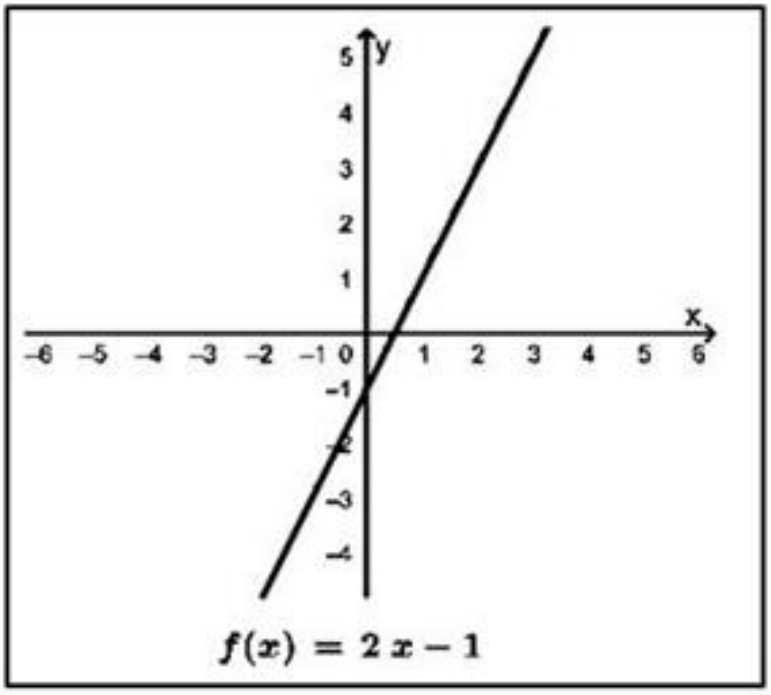
هناك عدة أنواع من الدوال الجبرية ولكل منها خصائصها الخاصة ويمكن تحديد العديد من هذه الدوال الجبرية ببساطة من خلال فحص رسمها البياني.

i. الرسم بياني للدالة الخطية :جميع الدوال الخطية لها الصيغة f(x)=ax+b، حيث a وb عددان حقيقيان وan ليس صفرًا. ستكون رسوم هذه الدوال البيانية دائمًا خطوطًا مستقيمة. هذا يعني أن الدالة الخطية هي دالة متعددة الحدود من الدرجة الأولى كما موضح في الشكل ٤.٢.



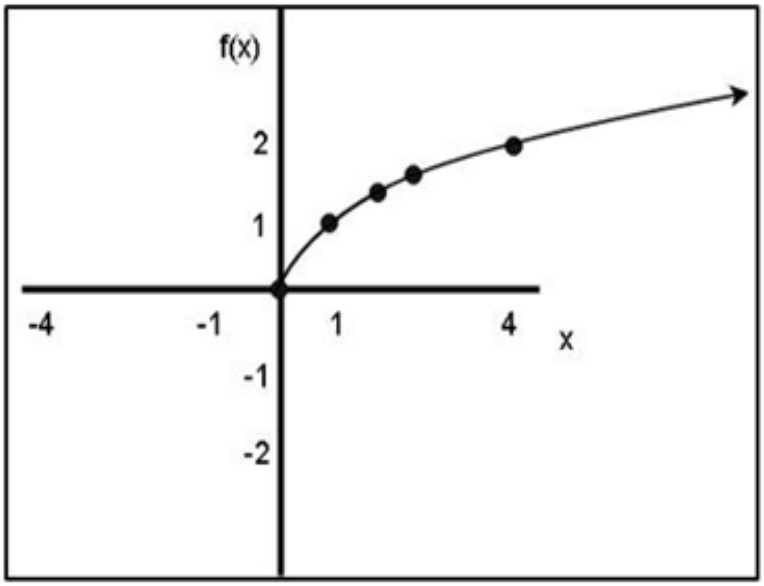
الشكل ٤.٢: يوضح رسم الدالة الخطية.

ii. **رسم بياني لدالة التربيعية:** يُشار عادةً إلى رسم دالة التربيع بالقطع المكافئ، وهو منحنى على شكل حرف U. دالة التربيع $f(x) = x^2$. يظهر الرسم البياني ٤.٣ أدناه الدالة التربيعية.



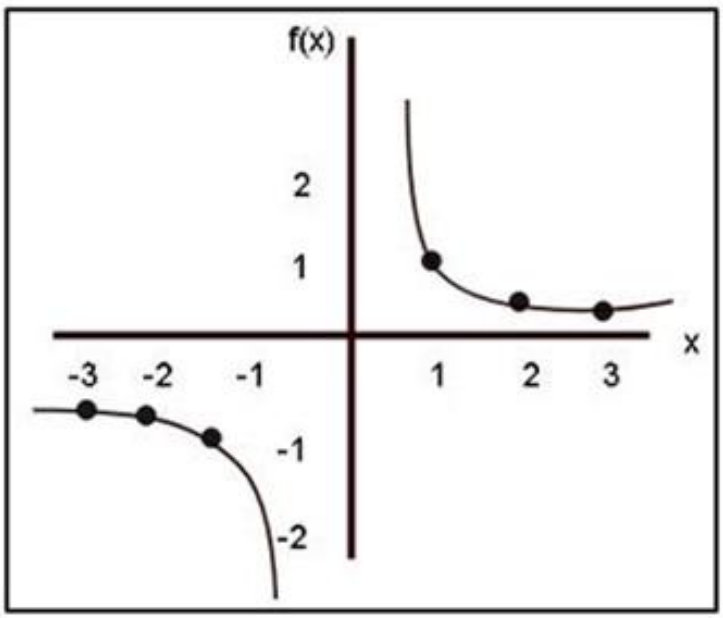
الشكل ٤.٣: يوضح رسم الدالة التربيعية.

iii. **رسم بياني للدالة التكعيبية:** على النقيض من دالة التربيع، فإن رسم الدالة التكعيبية له جانبان موجب وسالب. $f(x) = x3$ كما موضح في الشكل ٤.٤.



الشكل ٤.٤: يوضح رسم الدالة التكعيبية.

iv. **الرسم البياني لدالة الجذر التربيعي:** ان الرسم البياني للدالة $f = (x)$ حيث x ينتج عنه التمثيل البياني الموضح في الكل ٤.٥.



الشكل ٤.٥: يوضح الرسم البياني لدالة الجذر التربيعي.

٤.٥ السيناريوهات

a. **السيناريو الأول:** الاستمرارية عند نقطة معينة $f = (x, y) = x + y$ هل الدالة مستمرة عند النقطة $(0,0)$ ؟

الحل: اولا نحسب قيمة الدالة عند النقطة $(0,0)$

$$f(0,0) = 0 + 0 = 0$$

ثم نحسب النهاية عندما يقترب (x,y) من النقطة $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)} \rightarrow(0,0)(x, y) \rightarrow= 0 + 0 = 0$$

النتيجة: لأن النهاية عند النقطة $(0,0)$ تساوي قيمة الدالة عند نفس النقطة، فالدالة مستمرة عند النقطة $(0،0)$.

b. **السيناريو الثاني:** دالة غير مستمرة عند نقطة معينة لنأخذ الدالة المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

الحل: تحليل الاستمرارية عند $x = 2$هذه الدالة غير معرفة عند$x = 2$ لان المقام يصبح صفر كلما اقتربنا من $x = 2$

من اليمين

$$f(x) \rightarrow +\infty$$

من اليسار

$$f(x) \rightarrow -\infty$$

النهاية غير موجودة عند $x = 2$

c. **السيناريو الثالث:** الاشتقاق الجزئي لدالة بسيطة حساب المشتقة الجزئية لدالة بسيطة لنأخذ الدالة : $f(x,y) = x^2 + y^2$ نريد حساب المشتقات الجزئية لهذه الدالة بالنسبة لـ x،y

الحل:

المشتقة الجزئية بالنسبة لـ xهي:1

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dy}(x^2 + y^2) = 2x$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dy}(x^2 + y^2) = 2y$$

النتيجة:

المشتقة الجزئية بالنسبة لـ x هي 2x.

المشتقة الجزئية بالنسبة لـy هي2y.

الدالة تكون قابلة للاشتقاق بسهولة في جميع النقاط.

٤.٦ نتائج البحث

تُعد دراسة الاستمرارية والاشتقاق من الموضوعات الجوهرية في التحليل الرياضي، وتمثل حجر الأساس لفهم سلوك الدوال وتطبيقاتها في مجالات متعددة كالفيزياء والهندسة والاقتصاد. وبينما تُفهم هذه المفاهيم بصورة واضحة في سياق الدوال ذات المتغير الواحد، فإنها تصبح أكثر تعقيدًا عند الانتقال إلى الدوال متعددة المتغيرات، حيث يطرأ بعد جديد يتعلق بتعدد المسارات والاتجاهات المؤدية إلى نقطة معينة.

إن العلاقة بين الاستمرارية والاشتقاق في هذا السياق علاقة دقيقة ومترابطة، فبالرغم من أن قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة ما تعني بالضرورة استمراريتها عند تلك النقطة، إلا أن العكس لا يكون دائمًا صحيحًا.

هذا التفاوت المفاهيمي يفتح الباب أمام العديد من الأمثلة والتحليلات التي توضح أن الاستمرارية وحدها لا تكفي لضمان قابلية الاشتقاق، بل تتطلب شروطًا إضافية، مثل وجود واستمرارية المشتقات الجزئية.

تتناول هذه الدراسة الجوانب النظرية والتطبيقية لهذه العلاقة، وتسلّط الضوء على التحديات المرتبطة بفحص الاستمرارية والاشتقاق في الدوال ذات المتغيرين، كما تستعرض دور التدرج (Gradient) كأداة رياضية محورية في تحليل التغيرات الاتجاهية لقيم الدالة. ومن خلال ذلك، تهدف إلى تقديم فهم أعمق وأكثر دقة للخصائص الرياضية لهذه الدوال، بما يسهم في تعزيز القدرة على التعامل معها ضمن النماذج العلمية المختلفة.

- العلاقة بين الاستمرارية والاشتقاق: أظهرت الدراسة أن قابلية الدالة ذات المتغيرين للاشتقاق عند نقطة معينة تستلزم بالضرورة استمراريتها عند تلك النقطة، بينما العكس غير صحيح. فقد تم عرض أمثلة لدوال مستمرة عند نقطة لكنها غير قابلة للاشتقاق فيها، مما يؤكد على أن الاستمرارية شرط ضروري للاشتقاق لكنها غير كافية وحدها.

- تعقيد فحص الاستمرارية في الدوال متعددة المتغيرات: تبين أن التحقق من استمرارية الدالة ذات المتغيرين أكثر تعقيداً من نظيرتها ذات المتغير الواحد، نظراً لضرورة فحص وجود النهاية من عدة مسارات واتجاهات. وقد وُجد أن تساوي النهايات من جميع المسارات الممكنة هو الشرط الأساسي لوجود النهاية وبالتالي لاستمرارية الدالة.

- الدور الأساسي للمشتقات الجزئية والتدرج: أظهر التحليل أن المشتقات الجزئية لا تكفي وحدها لإثبات قابلية الاشتقاق، بل يجب أن تكون المشتقات موجودة ومستمرّة في جوار النقطة المدروسة. كما أن التدرج (Gradient) يُعد أداة فعّالة لتحديد اتجاه وشدة التغير في قيم الدالة، ويُستخدم بشكل رئيسي في التطبيقات الهندسية والفيزيائية.

- تمييز قابلية الاشتقاق عن وجود المشتقات الجزئية: وُجد أن وجود المشتقات الجزئية عند نقطة لا يعني بالضرورة أن الدالة قابلة للاشتقاق عندها، ما يستدعي استخدام التعريف الدقيق للاشتقاق الكلي وفحص التقريب الخطي للتحقق من ذلك.

- تطبيقات عملية واسعة: توصل البحث إلى أن مفاهيم الاستمرارية والاشتقاق تلعب دوراً محورياً في مجالات متعددة مثل تحليل توزيع الحرارة، ميكانيكا الموائع، الاقتصاد، وتحسين النماذج الرياضية متعددة المتغيرات، مما يعكس أهمية التعمق في فهم هذه المفاهيم النظرية وتطبيقاتها الواقعية.

الفصل الخامس

٥.١ المقدمة

تُعد الاستمرارية والاشتقاق من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، وتشكلان حجر الزاوية لفهم سلوك الدوال متعددة المتغيرات. تختلف هذه المفاهيم من حيث التعقيد عند الانتقال من دوال ذات متغير واحد إلى دوال ذات متغيرين أو أكثر، إذ يظهر بعد جديد يتعلق بتعدد الاتجاهات والمسارات الممكنة للوصول إلى نقطة معينة. توضح الأدبيات أن قابلية الاشتقاق لدالة عند نقطة تستلزم استمراريتها، بينما لا يكون العكس صحيحًا بالضرورة. في هذا السياق، تبرز أهمية مراجعة الدراسات العلمية التي تناولت العلاقة بين هذين المفهومين، سواء من ناحية النظرية أو التطبيقية، كما أن التدرج (Gradient) والمشتقات الجزئية يلعبان دورًا محوريًا في هذا المجال.

٥.٢ توصيات أكاديمية وعلمية

- **تعزيز الفهم المفاهيمي للاستمرارية والاشتقاق:**
  - ينبغي تطوير محتوى المناهج الجامعية ليُركّز على الفهم العميق للاستمرارية والاشتقاق في سياق الدوال متعددة المتغيرات، بدلًا من الاقتصار على الحلول الرمزية التقليدية.
- **التركيز على الجانب الهندسي والبصري:**
  - يوصى باستخدام أدوات رقمية مثل GeoGebra و Desmosو MATLABلتمثيل الدوال ورؤية تأثير التغيرات من عدة اتجاهات، مما يعزز الفهم البصري لتعدد المسارات والنهايات.
- **إدخال مفاهيم الاشتقاقية الضعيفة في المقررات المتقدمة:**
  - ينبغي إدراج موضوع الاشتقاقية الضعيفة والمشتقات المعممة في مقررات التحليل المتقدم والتحليل الوظيفي، نظرًا لدورها في تعميم مفاهيم التفاضل وتبسيط تطبيقاته.

- **الربط بين الرياضيات النظرية والتطبيقات:**
  - تشجيع الطلاب على تطبيق مفاهيم الاستمرارية والتدرج في مجالات مثل تحليل البيانات، تعلم الآلة، تصميم النماذج الهندسية، وتحليل الصور.
- **تحسين أدوات تقييم الطلاب:**
  - تطوير أدوات التقييم بحيث تقيس الفهم التحليلي العميق للمفاهيم، مثل الأسئلة التي تتطلب تحليل مسارات النهاية أو المقارنة بين اشتقاق جزئي وكلّي.

٥.٣ توصيات للبحث المستقبلي

- **إجراء المزيد من الدراسات حول دوال مستمرة وغير قابلة للاشتقاق:**
  - يُقترح استكشاف سلوك هذه الدوال في فضاءات وظيفية أخرى وربطها بالتطبيقات الفيزيائية أو الاقتصادية ذات الطبيعة المعقدة.
- **توسيع تطبيقات الاشتقاقية الضعيفة:**
  - دراسة إمكانية توظيف الاشتقاقية الضعيفة في حل مسائل التحسين غير المحدبة، والمعادلات التفاضلية الجزئية ذات الحلول غير الملساء.
- **تحليل أثر البنية التبولوجية للمجال على الاشتقاق:**
  - تحليل كيف يؤثر شكل المجال (مثل الزوايا أو الفجوات) في قابلية الدالة للاشتقاق، خاصة في التطبيقات الهندسية.
- **الاستفادة من تقنيات الذكاء الاصطناعي في تحليل الرسوم البيانية للدوال:**
  - دمج تقنيات التعلم الآلي للكشف التلقائي عن خصائص الاستمرارية والاشتقاق من الرسوم البيانية أو مجموعات البيانات.

٥.٤ الخاتمة

تؤكد الأدبيات الحديثة أن العلاقة بين الاستمرارية والاشتقاق في الدوال ذات المتغيرين أكثر عمقًا وتعقيدًا مما تبدو عليه في السياقات البسيطة. تتطلب قابلية الاشتقاق شروطًا إضافية تتجاوز مجرد الاستمرارية، بينما تلعب المشتقات الجزئية والتدرج دورًا مركزيًا في التحليل والتطبيق. توفر الاشتقاقية الضعيفة إطارًا عامًا ومرنًا يمكن اعتماده في السياقات النظرية والتطبيقية على حد سواء. كما تؤكد الدراسات التربوية على ضرورة تحسين الطرائق التعليمية لدعم فهم الطلاب لهذه المفاهيم الجوهرية.

المصادر

1. *Capraro, V. and M. Perc (2021). "Mathematical foundations of moral preferences." Journal of the Royal Society interface **18**(175): 20200880.*
2. *Edwards, B. S. and M. B. Ward (2004). "Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions." The American Mathematical Monthly **111**(5): 411-424.*
3. *Frieder, S., L. Pinchetti, R.-R. Griffiths, T. Salvatori, T. Lukasiewicz, P. Petersen and J. Berner (2023). "Mathematical capabilities of chatgpt." Advances in neural information processing systems **36**: 27699-27744.*
4. *Kaliaj, S. B. (2016). "Differentiability and weak differentiability." Mediterranean Journal of Mathematics **13**: 2801-2811.*

5. *Kuleshov, A. (2020). "The Various Definitions of Multiple Differentiability of a Function f: ℝ n→ ℝ." Mathematics **8**(11): 1946.*
6. *Martínez-Planell, R., M. T. Gaisman and D. McGee (2015). "On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables." The Journal of Mathematical Behavior **38**: 57-86.*
7. *Martínez-Planell, R., Maria Trigueros Gaisman, and Daniel McGee. (2015). "On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables." The Journal of Mathematical Behavior **38**(2): 57-86..*
8. *Pratsiovytyi, M. and S. Ratushniak (2021). "Continuous Nowhere Differentiable Function with Fractal Properties Defined in Terms of Q 2-Representation." Journal of Mathematical Sciences **258**(5).*
9. *Romanov, A. S. (2018). "On continuity of functions with generalized derivatives." Russian Mathematics **62**(11): 72-75.*
10. *Russell, B. and M. Potter (2022). Introduction to mathematical philosophy, Routledge.*

11. *Supriyadi, E. and K. S. Kuncoro (2023). "Exploring the future of mathematics teaching: Insight with ChatGPT." Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika **11**(2): 305-316.*

12. *Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Advanced mathematical thinking, Springer**:** 65-81.*

13. *Wang, B. and X. Yang (2016). "Weak differentiability with applications to variational analysis." Set-Valued and Variational Analysis **24**(2): 2.٣٢١-٩٩*

14. *Zhang, W. and Q. Zhang (2023). "Ethnomathematics and its integration within the mathematics curriculum." Journal of mathematics education: 151-157.*