جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان - كلية التربية

قسم الرياضيات

تحويل – Z

بحث مقدم الى قسم الرياضيات – كلية التربية - جامعة ميسان

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس

تقدم به الطالبة

زينب نعمة عبد الزهره

بأشراف

أ.م.د. أسماء جاسم حرفش

1446هـ

2025م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿قل هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون﴾

صدق الله العلي العظيم (سورة الزمر، آية 9)

الاهداء

الى من آنار الله به دربنا والى الذي خلقه الله لنفسه وهو الذي أنقذ الناس من الجهل والفتن

الى محمد رسول الله (ص)

الى أهل السماء وخير الأنبياء صلوات الله عليهم بقيه الليل والنهار

الى ولد علي وفاطمه (ع)

الى من غاب عنا وأشتقنا لرؤيته الى من كانت ألطافه

وحنانه يرافقنا الى باب الله الذي منه يؤتى

الى المهدي (عج) بقيه الله

الى كل من مد لي يد العون في يوم من الأيام الى من شجعني ووقف بجانبي

الشكر والتقدير

لابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد....

وقبل أن نمضي نقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا

أقدس رسالة في الحياة ....

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ....

إلى جميع أساتذتنا الأفاضل.........

كن عالما .. فإن لم تستطع فكن متعلما ، فإن لم تستطع فأحب العلماء ، فإن لم تستطع فلا تبغضهم"

وأخص بالتقدير والشكر الجزيل الى

الدكتورة أسماء جاسم حرفش

الملخص

قدمنا في هذا البحث دراسة مفصلة عن تحويل **Z**، حيث تضمن البحث

الفصل الاول : تطرقنا في هذا الفصل لمفهوم تحويل **Z** ، وتطبيقه على بعض الدوال الاولية والمتتابعات المنتهية وشبه المنتهية وغير المنتهية ومناطق التقارب الخاصة بها، كما تم استعرض اهم خواص التحويل.

الفصل الثاني :اما في هذا الفصل تم دراسة كيفية ايجاد معكوس تحويل **Z** من خلال ثلاث طرق مختلفة وهي طريقة التكامل وطريقة متسلسلة القوى وطريقة الكسور الجزئية . كما تم استنتاج العلاقة بين تحويل **Z** وكل من تحويل فورير وتحويل لابلاس

الفصل الاول

المفاهيم الأساسية لتحويل Z

(1-1) المقدمة Introduction

يُعد التحويل Z أداة رياضية قوية تُستخدم على نطاق واسع في العديد من المجالات لتسهيل معالجة وحل المسائل المعقدة. وتُعد فكرة التحويل، وخصوصًا تحويل Z ، من المفاهيم ذات الجذور التاريخية العميقة التي تطورت بشكل كبير على مر الزمن.

يعزى أصل فكرة التحويل Z إلى عام 1730، عندما قدّم أبراهام دي موفر مفهوم الدالة المولدة ضمن نظرية الاحتمالات. لاحقًا، في عام 1947، قام هوريفيتش بتعريف تحويل للإشارات أو المتتاليات المأخوذة بنظام العينات كطريقة عملية لحل المعادلات الفرقية ذات المعاملات الثابتة. وفي عام 1952، أطلق كل من "راجازيني" و"لطفي زاده" على هذا التحويل اسم تحويل Z ، وذلك ضمن مجموعة التحكم بالبيانات المأخوذة بنظام العينات في جامعة كولومبيا.

ويعتبر تحويل Z النظير الرقمي لتحويل لابلاس المستخدم في تحليل الإشارات المستمرة، كما أنه يُعتبر تعميمًا لتحويل فوربيه المتقطع. وفي السنوات الأخيرة، أصبح تحويل Z أداة أساسية في مجالات معالجة الإشارات، أنظمة التحكم، وتحليل الأنظمة الزمنية المتقطعة.

Z Transform — (1-2) تحويل Z

وهو اداة رياضية تستخدم في تحليل ومعالجة الانظمة المتغيرة مع مرور الزمن ذات الاشارات المتقطعة. ويعتبر امتداداً لتحويل فورير المتقطع وتحويل لابلاس، مما يجعله اداة قوية في مجالات مثل معالجة الاشارات، نظريه التحكم، وهندسة النظم و الاتصالات، وعلوم حاسبات.

<u>تعريف</u> (تحويل Z)

لتكن $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ متتابعة اعداد حقيقية (اشارة في النطاق الزمني المتقطع) يعرف تحويل **Z** [1,2] لهذه المتتابعة بالصيغة التالية :

$$X(z) = Z(y_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{y_k}{z^k}\right), \qquad z \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

احياناً تكتب $Z(y_k) = X(z)$

ملاحظة:

1. نقول ان التحويل **Z** موجود اذا كانت $R > 0$.

2. يكون متقارب اذا كان $|z| > R$.

مثال :

اوجد تحويل **Z** للدالة (اشارة) $x_k = (a^k)_{k=0}^{+\infty}$

الحل : حسب التعريف (1.1) لدينا

$$Z(a^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{z^k}$$

$$\Longrightarrow Z(a^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$$

$$\Longrightarrow Z(a^k) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \qquad , \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \, , |z| > |a|$$

اذن

$$Z(a^k) = \frac{z}{z-a} \qquad , |z| > |a|$$

عندما $a = 1$, فأن

$$Z(1) = \frac{z}{z-1} \qquad , |z| > 1$$

(1-3) تحويل Z لبعض الدوال الاولية

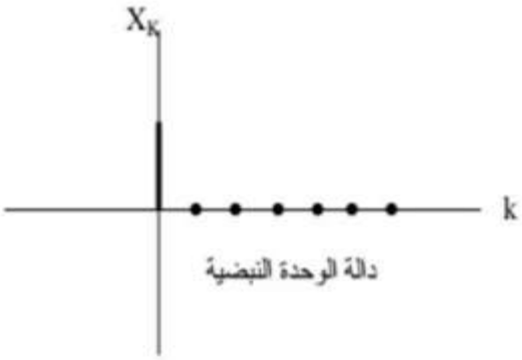
Transform of Z of Some Elementary Functions

فيما يلي امثلة لبعض الدوال المتقطعة البسيطة وتحويل **Z** لها [1,2]

1) دالة الوحدة النبضية

وتعرف هذه الدالة بالصورة :

$$x_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,\ldots \end{cases}$$



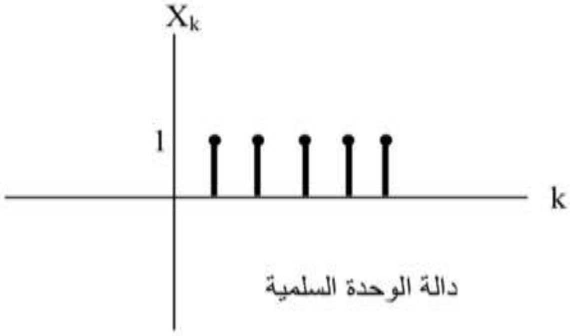
$$\because X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k} \Rightarrow X(z) = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + \cdots$$

$$\because z^{-0} = 1 \qquad \Rightarrow \quad X(z) = 1$$

2) دالة الوحدة السلمية

وتعرف هذه الدالة بالصورة :

$$x_k = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$



$$\therefore \mathrm{X(z)} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{z^{-k}} \quad \text{or} \quad \mathrm{X(z)} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} (\mathrm{z^{-1}})^{\mathrm{k}}$$

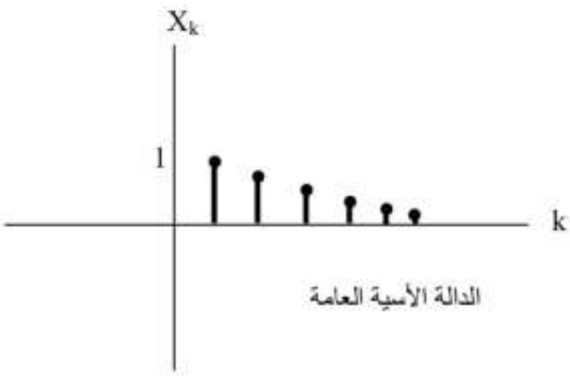
$$\because \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \qquad , \quad |a| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{X(z)} = \frac{1}{1-\mathrm{z^{-1}}} \qquad , \quad \frac{1}{|\mathrm{z}|} < 1 \;\Rightarrow\; |\mathrm{z}| > 1$$

3) الدالة الأسية العامة

وتعرف هذه الدالة بالصورة :

$$\mathrm{x}(k) = \begin{cases} a^k & \mathrm{k} \geq 0 \\ 0 & \mathrm{k} < 0 \end{cases}$$



$x(k) = a^k u(k)$ حيث ان $u(k)$ دالة الوحدة السلمية

$$\mathrm{X(z)} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} \mathrm{a^k z^{-k}} \quad \text{or} \quad \mathrm{X(z)} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\infty} (\mathrm{az^{-1}})^{\mathrm{k}}$$

$$\therefore X(z) = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} \quad , \quad \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \;\; \Rightarrow |a| < |z|$$

اما الدالة الاسية $x(t) = e^{-at}, t > 0$ فتكون المتتابعة بالشكل الاتي:

$$x(k) = \begin{cases} e^{-akT} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT} z)^{-k} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$\therefore X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad , \quad z > e^{-aT}$$

4) الدالة الثابتة

الدالة الثابتة $x(t) = c$ وتعرف بصورة متتابعة بالشكل الاتي:

$$x(k) = \begin{cases} c & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} cz^{-k} = c\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{c}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{cz}{z - 1}$$

$$\therefore X(z) = \frac{cz}{z - 1} \quad , \quad z > 1$$

5) الدوال المثلثية

المتتابعة $x(k) = \cos \omega k$ يكون تحويل **Z** لها

$$X(z) = \frac{z(z - \cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

اما المتتابعة $x(k) = sin\,\omega k$ فيكون تحويل **Z** لها

$$X(z) = \frac{z\,sin\,\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

derivation of Z Transform (1-4) اشتقاق تحويل Z

تحويل **Z** اشتق من تحويل لابلاس لسلسلة من النبضات الأحادية، تحويل لابلاس للنبضة الأحادية هو 1 وللنبضات المزاحة معرف بدلالة الدالة الأسية لسلسلة من النبضات المعرفة عند $\mathbf{t = \eta}$ التي يكون ارتفاعها $\mathbf{X(\eta)}$ تمتاز بعرض قصير "ضيق" $\mathbf{\Delta\eta}$ مساحتها $\mathbf{X(\eta)\Delta\eta}$ وهذا الحد لا يؤثر عند ضربه بالنبضات المزاحة لأن مقداره مساوياً للواحد.

$$\mathbf{X(\eta)\Delta\eta \;\; \delta(t-\eta)}$$

وسلسلة النبضات يمكن أن تكتب:

$$X^*(t) = X(0)\cdot\Delta\eta\cdot\delta(t) + X(T)\cdot\Delta\eta\cdot\delta(t-T) + \cdots + X(i\,T)\cdot\Delta\eta\cdot\delta(t-iT) + \cdots$$

علما بأن T هو الزمن المزاح عند النبضة التي عرضها $\Delta\eta$ وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة $X^*(t)$ نحصل على

$$X^*(s) = X(0)\Delta\eta + X(T)\Delta\eta\, e^{-st} + \cdots + X(i\,T)\Delta\eta e^{-si\,T} = \Delta\eta\sum_{i=0}^{\infty} X(iT)e^{-siT}$$

حيث ان $\Delta\eta$ هو معامل ضربي فسوف نفرض قيمته في X لأعطاء

$$X^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\, e^{-s\,i\,T}$$

وبأبدال $z = e^{sT}$ نحصل على

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\; z^{-i}$$

(1−5) تحويل Z للحالات المختلفة

Different Cases of z Transform

في هذا البند سيتم دراسة تحويل **Z** في حالة المتتاليات المنتهية وشبه المنتهية وغير المنتهية [1] كلاً على حد كما وسندرس مناطق التقارب للحالات الثلاثة

(1−5−1) المتتاليات المنتهية

إذا كانت المتتالية على الصورة $\{x_k\}_{k=a}^{b} = \{x_a\ , x_{a+1}\ , \dots , x_{b-1}\ , x_b\}$

فإن تحويل **Z** لها يعرف بواسطة

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\ z^{-k} \qquad \Longrightarrow \qquad X(b) = \sum_{k=a}^{b} x_k\ z^{-k}$$

مثال:

$$\{x_k\}_{-2}^{2} = \{1\ , 2\ , 3\ , 2\ , 1\}$$

لايجاد تحويل **Z** للمتتالية المنتهية يكون

$$X(z) = \sum_{k=-2}^{k=2} a_k\ z^{-k}$$

$$X(z) = z^2 + 2\ z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

منطقة التقارب في حالة المتتاليات المنتهية

إذا كانت المجموعة المعطاة لـ z لإيجاد $X(Z)$ تمتلك قيم منتهية $\{x_k\}_{k=a}^{b}$ كما في الحالة الأولى فإننا نتفادى عند إيجاد منطقة التقارب قيم $z^{-k} \Longrightarrow \forall\ k \geq= 1$ (التي تجعل $\frac{1}{z^k}$ غير معرفة) أي منطقة التقارب تكون لكل قيم z ماعدا $z = 0$ عندما $b > 0$ كما مبين بالشكل (a) وما عدا $z = \infty$ عندما $a < 0$.

مثال: اذا كانت $\{x_k\} = \{8\,,3\,,-2\,,0\,,4\,,-6\}$

فأن تحويل **Z** هو

$$X(z) = 8z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 6z^3$$

ومنطقة التقارب تكون لكل قيم z ما عدا $(z = 0 \;\; , z = \infty)$

(2−5−1) المتتاليات شبه المنتهية

في حالة المتتاليات على الصورة $\{x_k\}_{k=a}^{\infty} = \{x_a\,, x_{a+1}\,, \dots\}$

فأن تحويل **Z** لها يعرف بواسطة

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k\, z^{-k} \qquad \longrightarrow \qquad X(z) = \sum_{k=a}^{\infty} x_k\, z^{-k}$$

مثال: اذا كان $x_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 2^k & k \geq 0 \end{cases}$

يكون تحويل **Z**

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\ z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}$$

وهي متسلسلة هندسية.

اما في حالة المتتاليات التي على الصورة $\{x_k\}_{k=-\infty}^{b} = \{\dots, x_{b-2}\,, x_{b-1}\,, x_b\}$

فان تحويل **Z** لها يعرف بواسطة

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, z^{-k} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{b} x_k\, z^{-k} = \sum_{k=-b}^{\infty} (x_k)^{-1}\, z^k$$

مثال: اذا كانت $x_k = \begin{cases} e^k & k \le 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}$ فأن تحويل **z**– يكون

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} e^k\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}\, z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{e}\right)^k = 1 + \frac{z}{e} + \left(\frac{z}{e}\right)^2 + \left(\frac{z}{e}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{e}\right)} = \frac{e}{e-z}$$

متسلسلة هندسية.

منطقة التقارب في حالة المتتاليات شبة المنتهية :

اذا كانت المتتاليات على الصورة $\{x_k\}_{k=a}^{\infty}$ وان التحويل **Z** لها $\sum_{k=a}^{\infty} x_k\, z^{-k}$

فأن منطقة التقارب X(z) لكل قيم z التي تحقق $|z| > R$ ما عدا القيم التي تجعل z غير معرفة اي عند $a < 0$

مثال: اذا كان $x_k = \begin{cases} \left(\frac{-1}{2}\right)^k & k \ge 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$ فأن

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k\ z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2z}\right)^k$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1+\frac{1}{2z}} = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

وهذه المتسلسة هندسية تكون صحيحة اذا كانت $\left|-\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1$

$$\left|\frac{1}{2}\right| < z \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} < z \qquad \Rightarrow \qquad R_{-} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ X(Z) تتقارب لكل $\frac{1}{2} < |z|$

اذا كانت المتتالية على الصورة $\{x_k\}_{k=-\infty}^{b}$ وان تحويل **Z** لها

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{b} x_k \ z^{-k}$$

فان $X(z)$ تتقارب لكل قيم z التي تحقق $|z| < R_+$ ما عدا القيم التي تجعل $\frac{1}{z^k} = \infty$

(اي ان $b > 0$)

مثال: اذا كانت $x_k = \begin{cases} 2^k & k < 0 \\ 0 & k \geq 0 \end{cases}$

فأن

$$X(z) = \cdots + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}z = \frac{\frac{z}{2}}{1 + \frac{z}{2}}$$

وهذه متسلسلة هندسية تكون صحيحة اذا كانت $\left|\frac{1}{4} \ z^2\right| < 1$

$$|z|^2 < 4 \quad \Rightarrow \quad |z| < 2 \quad \Rightarrow \quad R_+ = 2$$

$\therefore$ $X(z)$ تتقارب لكل $|z| < 2$

(1−5−3) المتتاليات غير المنتهية

اذا كانت المتتالية على الصورة $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \dots\}$

فان تحويل **Z** لها يعرف بواسطة :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, z^{-k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{a} x_k \, z^{-k} + \sum_{k=a+1}^{\infty} x_k \, z^{-k}$$

حيث ان $a \in \Re$

مثال (8) اذا كانت
$$x_k = \begin{cases} 2^k & k \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^k & k < 0 \end{cases}$$

فأن

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 3^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (32)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k$$

$$X(z) = [3z + (3z)^2 + (3z)^3 + \cdots] + \left[1 + \left(\frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{3z}{1-3z} + \frac{z}{z-2}$$

منطقة التقارب في حالة المتتاليات غير المنتهية:

اذا كانت المتتالية على الصورة $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ مع التحويل

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$$

فأن $X(z)$ تتقارب لكل قيم التي تحقق $R_- < |z| < R_+$

مثال : اذا كانت

$$x_k = \begin{cases} 2^k & k < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geq 0 \end{cases}$$

$$R_- = \frac{1}{2} \qquad And \qquad R_+ = 2$$

منطقة التقارب تكون $\frac{1}{2} < |z| < 2$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ z^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,z}\right)^{k} = \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}$$

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |z| < 2$$

$$\left|\frac{z}{2\,z}\right| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

∴ X(z) تتقارب لكل $\frac{1}{2} < |z| < 2$

(1−6) خواص تحويل Z　　Properties of Z Transform

يمكن توضيح بعض من خواص تحويل **Z** [1,2] كالاتي :

1- الخاصية الخطية

$$Z[a\{x_k\} + b\{y_k\}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a\,x_k + b\,y_k) z^{-k}$$

$$= a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, z^{-k} + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k\, z^{-k} \quad = a\,X(z) + b\,Y(z)$$

$$Z[a\{x_k\} + b\{y_k\}] = a\,X(z) + b\,Y(z)$$

مثال :

اذا كان

$$x_k = \cos k\,\omega_0$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\,k\omega_0} + \frac{1}{2} e^{-i\,k\omega_0}$$

نستخدم التحويل

$$a^k \;, \; k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} \qquad a < |z|$$

نجد ان

$$\left(e^{i\,\omega_0}\right)^k \;, \; k \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{1 - e^{i\,\omega_0}\, z^{-1}} \qquad 1 < |z|$$

$$\left(e^{-i\,\omega_0}\right)^k \;, \; k \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{1 - e^{-i\,\omega_0}\, z^{-1}} \qquad 1 < |z|$$

وكذلك

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{i\,\omega_0}\, z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-i\,\omega_0}\, z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$= \frac{1 - \cos\omega_0\, z^{-1}}{1 - 2\cos\omega_0\, z^{-1} + z^{-2}}$$

كذلك بالنسبة الى $x_k = \sin k\,\omega_0$

$$\sin k\omega_0 = \frac{1}{2} e^{i\,\omega_0} - \frac{1}{2} e^{-ik\,\omega_0}$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{i\,\omega_0}\; z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-i\,\omega_0}\; z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-i\,\omega_0}\; z^{-1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - e^{i\,\omega_0}\; z^{-1}\right)}{(1 - e^{i\,\omega_0}\; z^{-1})(1 - e^{-i\,\omega_0}\; z^{-1})}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-i\omega_0}\; z^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\omega_0}\; z^{-1}\right)}{1 - e^{i\,\omega_0}\; z^{-1} - e^{-i\,\omega_0}\; z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0}\; z^{-1} - e^{-i\omega_0}\; z^{-1}\right)}{1 - z^{-1}(e^{i\,\omega_0} - e^{-i\,\omega_0}) + z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{\sin\omega_0\; z^{-1}}{1 - 2\;\cos\omega_0\; z^{-1} + z^{-2}}$$

2- خاصية الازاحة

لتكن $\{x_k\} \rightarrow X(z)$ فلأيجاد تحويل **Z** للمتتالية $\{x_{k\pm k_0}\}$ فأن

$$Z[\{x_{k\pm k_0}\}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k\pm k_0} \quad z^{-k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \ z^{-m\pm k_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \ z^{-m} = z^{\pm k_0} \quad x(z)$$

$$\therefore Z[\{x_{k\pm k_0}\}] = z^{\pm k_0} \ x(z)$$

3- خاصية الضرب بـ k

لتكن $\{x_k\} \rightarrow X(z)$ فأنه يمكن ايجاد تحويل **Z** للمتتالية $\{kx_k\}$ كألاتي

$$Z\{k\, x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, x_k \ z^{-k}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, x_k \ z^{-k-1}$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \ (k \ z^{-k-1})$$

$$= z \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left[-\frac{d}{dz} z^{-k}\right]$$

$$= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \ z^{-k} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

$$\therefore Z\,\{kx_k\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

4- خاصية القسمة على $\mathbf{k+a}$

يمكن ايجاد تحويل **Z** للمتتالية $\left\{\frac{x_k}{k+a}\right\}$ كالاتي:

$$Z\left\{\frac{x_k}{k+a}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{k+a} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, z^{a} \left[-\int_0^z \hat{z}^{-k-a-1}\ d\hat{z}\right]$$

$$= -z^{a} \int_0^z \hat{z}^{-a-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, \hat{z}^{-k}\ d\hat{z}$$

$$\therefore\ z\left\{\frac{x_k}{k+a}\right\} = -z^{a} \int_0^z \hat{z}^{-a-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\, \hat{z}^{-k}\ d\hat{z}$$

مثال: اذا كان $v_k = 1 \quad , \quad k > 1$

وكان $\{x_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\} \quad , \quad k \geq 1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot z^{-1} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \quad , \quad 1 < |z|$$

فأن تحويل **Z** لـ $\{x_k\}$ يكون

$$X(z) = -z^{0} \int_0^z \hat{z}^{-1}\, v(\hat{z})\ d\hat{z}$$

$$X(z) = -\int_0^z \frac{\hat{z}^{-2}}{1 - \hat{z}^{-1}}\ d\hat{z} \ \Longrightarrow\ X(z) = \ln(1 - z^{-1}) \quad , 1 < |z|$$

الفصل الثاني

معكوس تحويل Z

(2−1) المقدمة Introduction

يُعد معكوس تحويل **Z** أحد الأدوات الأساسية في تحليل الأنظمة الرقمية، حيث يهدف إلى استرجاع المتسلسلة الزمنية الأصلية من تحويلها في المجال المركب. فبينما يُستخدم تحويل **Z** لتحويل المتتاليات إلى تمثيل جبري يسهل التعامل معه رياضيًا، فإن المعكوس يُستخدم لإعادة هذه التمثيلات إلى صيغتها الزمنية الأصلية، مما يُمكن من دراسة السلوك الديناميكي للنظام في المجال الزمني.

تكمن أهمية معكوس تحويل **Z** في التطبيقات العملية الواسعة التي تتطلب تحليل إشارات أو نظم زمنية متقطعة، مثل الأنظمة الرقمية في التحكم ومعالجة الإشارات. ولا يمكن الحصول على وصف كامل لأي نظام رقمي دون القدرة على العودة إلى المجال الزمني باستخدام هذا المعكوس.

يُوجد عدد من الطرق التي طُورت لحساب المعكوس، تختلف في مدى تعقيدها ودقتها وسهولة استخدامها، ومن أبرزها: طريقة التكامل في المستوى العقدي، طريقة متسلسلة القوى، وطريقة الكسور الجزئية. اختيار الطريقة المناسبة يعتمد على طبيعة دالة تحويل **Z** المعطاة، ومدى تعقيد أقطابها والمجال المطلوب تحليل السلوك فيه.

(2−2) طريقة التكامل Integration Method

تعتمد طريقة التكامل [3] على صيغة تكامل كوشي التي تنص على انه اذا كانت C محيطاً مغلقاً يحيط بالاصل في اتجاه عكس عقارب الساعة فأن:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1}\,dz = \begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases} \qquad (2.1)$$

تحويل **Z** للمتتابعة يعطى بالصيغة :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (2.2)$$

بضرب كلا الجانبين في المعادلة (2.2) بـ $\frac{1}{2\pi j} z^{k-1}$ وحساب التكامل على محيط C الذي يحيط بنقطة الاصل في اتجاه عكس عقارب الساعة والذي يقع في منطقة تقارب $X(z)$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{k-1}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1}\,dz \qquad (2.3)$$

وبترتيب التكامل في الجهة اليمنى من المعادلة (2.3) (اذا كانت المتسلسلة متقاربة) نحصل على:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{k-1}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}\,dz \qquad (2.4)$$

تطبيق صيغة تكامل كوشي (2.1) على التكامل في الجهة اليمنى من المعادلة (2.4)

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}\,dz = f(x) = \begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$$

فأن المعادلة (2.4) تصبح :

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{k-1}\,dz = x(k)$$

وبذلك يكون معكوس تحويل **Z** يعطى بالتكامل :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz \qquad (2.5)$$

في الغالب يتم حساب تحويل **Z** العكسي بأستخدام نظرية البواقي .

$$x(n) = \sum [residue\ of\ X(z) z^{n-1}\ at\ the\ poles\ inside\ C] \qquad (2.6)$$

مثال: أيجاد معكوس تحويل **Z** لـ

$$X(z) = \frac{z}{z+3}, |z| > 3$$

من المعادلة (2.5)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{z+3} z^{n-1}\, dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z+3}\, dz$$

حيث ان مسار التكامل C هو دائرة نصف قطرها اكبر من 3 . لكل $n \geq 0$ فأن مسار التكامل يحيط بقطب واحد فقط عند $z = -3$

$$x(n) = Res\left[\frac{z^n}{z+3}, -3\right] = (-3)^n$$

عندما يكون $n < 0$ بألاضافة الى القطب عند $z = -3$ يوجد قطب متعدد الترتيب عند $z = 0$ الذي يعتمد ترتيبه على قيمة n

لكل $n = -1$

$$x(-1) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z}{z(z+3)}\, dz$$

$$= Res\left[\frac{1}{z(z+3)}, 0\right] + Res\left[\frac{1}{z(z+3)}, -3\right] = \frac{1}{3} + \frac{-1}{3} = 0$$

ولكل $n = -2$

$$x(-2) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z}{z^2(z+3)}\, dz$$

$$= Res\left[\frac{1}{z^2(z+3)}, 0\right] + Res\left[\frac{1}{z^2(z+3)}, -3\right] = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+3)} |z = 0$$

وبألاستمرار يجب ان تكون $x(n) = 0$ لكل $n < 0$ لذلك

$$x(n) = \begin{cases} (-3)^n \,, n \geq 0 \\ 0 \,, \quad\quad n < 0 \end{cases}$$

مثال: أيجاد تحويل **Z** العكسي للدالة

$$x(z) = z^2 + 6 + 7z^{-3} \,, 0 < |z| < \infty$$

من المعادلة (2.5) سيكون

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C (z^2 + 6 + 7z^{-3}) z^{n-1}\, dz$$

حيث C هو الدائرة الوحدة المأخوذة بعكس اتجاه عقارب الساعة، فتكون:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \left[\oint_C z^{n+1}\, dz + 6 \oint_C z^{n-1}\, dz + \oint_C z^{n-4}\, dz\right]$$

من صيغة تكامل كوشي نحصل على

$$x(-2) = \frac{1}{2\pi j} [2\pi j * 1 + 0 + 0] = 1$$

$$x(0) = \frac{1}{2\pi j} [0 + 6 * 2\pi j + 0] = 6$$

$$x(3) = \frac{1}{2\pi j} [0 + 0 + 7.2\pi j] = 7$$

ولكل $n \neq -2,0,3$ تكون $x(n) = 0$ وبالتالي تكون

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=-2\\ 6, & n=0\\ 7, & n=3\\ 0, & o.w\end{cases}$$

يمكن القول ان طريقة التكامل مفيدة بشكل خاص اذا كانت هناك قيم محدودة لـ $x(n)$ مطلوب ايجادها.

(2−3) طريقة متسلسلة القوى Power Series Method

فكرة هذه الطريقة [3] تعتمد على كتابة $X(z)$ كمتسلسلة القوى بالصيغة:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \tag{2.7}$$

ثم بالمقارنة يمكن القول ان $x(n)=c_n$ لكل n.

مثال: ايجاد تحويل **Z** العكسي للدالة

$$X(z)=z^2+6+7z^{-3}\,, \quad 0<|z|<\infty$$

بما ان

$X(z)$ هي دالة متكون من مجموع حدود فيها z مرفوعة لقوى صحيحة منتهية و$x(n)$ هي متسلسلة حدود ذات طول محدود. لذلك فأن $x(n)$ هي المعامل الذي يضرب z^{-1} في $X(z)$. لذا فأن

$$x(3)=7 \;, \quad x(0)=6 \;, \quad x(-2)=1$$

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=-2\\ 6, & n=0\\ 7, & n=3\\ 0, & o.w\end{cases}$$

ملاحظة: عند مقارنة المثالين السابقين نلاحظ ان طريقة متسلسلة القوى اسهل من التكامل في مثل هذه الحالات.

مثال: ايجاد تحويل **Z** العكسي للدالة

$$X(z) = \frac{z}{z+3} \;, |z| > 3$$

نظراً لان منطقة التقارب تقع خارج الدائرة والمتتابعة هي متتابعة من الجانب الايمن. علاوة على ذلك فهي متتابعة سببية لان $\lim_{z\to\infty} X(z) = 1 = constant$

فمن خلال القسمة الطويلة يمكن الحصول على متسلسلة من القوة في z^{-1}

$$X(z) = 1 - 3z^{-1} + 9z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n z^{-n}$$

$$x(n) = (-3)^n u(n)$$

(2–4) طريقة الكسور الجزئية Partial -Fraction Method

اذا كانت $X(z)$ دالة كسرية فأن طريقة الكسور الجزئية [3] هي وسيلة مفيدة للعثور على معكوسها، الفكرة هي كتابة $X(z)$

$$X(z) = \propto_1 X_1(z) + \propto_2 X_2(z) + \cdots + \propto_k X_k(z) \qquad (2.8)$$

حيث كل $X_i(z)$ له تحويل **Z** عكسي $x_i(n)$ و $\propto_i \in \mathbb{C}$ لكل $i = 1,2,\dots,k$.

فاذا كانت $X(z)$ دالة كسرية بالنسبة لـ z فأن يمكن التعبير عنها كالتالي

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_M z^M}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N} \qquad (2.9)$$

حيث $N, M \in \mathbb{N}$

فاذا كان $N \neq 0 \,, M < N$ فأن $X(z)$ تسمى دالة كسرية فعلية وخلاف ذلك فأن $X(z)$ دالة كسرية غير فعلية، ويمكن كتابتها على شكل مجموع متعددة حدود ودالة كسرية فعلية اي:

$$X(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_k z^k + \frac{A(z)}{B(z)} \tag{2.10}$$

يمكن إيجاد معكوس متعددة الحدود بسهولة، ولكن لإيجاد معكوس الدالة كسرية الفعلية، يجب كتابتها كمجموع من دوال أبسط. ولتحقيق ذلك، نقوم بتحليل مقام الكسر إلى عوامل تمثل الأقطاب $p_0 + p_1, \ldots, p_m$ من $X(z)$. يوجد لدينا حالتان بالنسبة للأقطاب :

الحالة الاولى: اقطاب بسيطة اذا كانت جميع اقطاب $X(z)$ بسيطة

$$X(Z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{z - p_i} \tag{2.11}$$

عندما

$$A_i = (z - p_i)X(z)|z = p_i$$

فأن

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-p_i}\right] = \begin{cases} (p_i)^n u(n) & ,if \ \ |z| > |p_i| \\ -(p_i)^n u(-n-1) & ,if \ |z| < |p_i| \end{cases} \tag{2.12}$$

إذا كانت $x(n)$ إشارة سببية (causal) ، وكان لبعض أقطاب $X(z)$ الخاص بها قيم مركبة، فإن وجود قطب p يعني أن مرافقه المركب p^* هو أيضًا قطب. في هذه الحالة، تظهر الأقطاب في أزواج من المرافقين المركبين.

$$x(n) = [A(p)^n + A^*(p^*)^n]u(n) \tag{2.13}$$

في صيغة القطب فأن المعادلة (2.13) تصبح

$$x(n) = 2|A||p|^n \cos(\theta n + \varphi)\, u(n) \tag{2.14}$$

حيث φ , θ هما زاوية القطب p وزاوية معامل الكسر الجزئي على التوالي.

الحالة الثانية: اقطاب متعددة عند وجود قطب مكرر من الدرجة r في $X(z)$، سيكون هناك r معاملات في التوسيع إلى كسور جزئية مرتبطة بهذا القطب المكرر. ويكون شكل التوسيع إلى كسور جزئية كالتالي:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{r} \frac{A_{1k}}{(z-p_1)^{r+1-k}} + \sum_{k=r+1}^{m} \frac{A_k}{z-p_k} \qquad (2.15)$$

$$A_{1k} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-p_1)^r X(z) | z = p_1, \qquad k = 1,2,\dots,r$$

مثال 6 لايجاد تحويل **Z** العكسي

$$X(z) = \frac{z^2+3z}{z^2-3z+2}$$

اذا كانت

$a)\ |z| > 1$

$b)\ |z| < 2$

$c)\ 1 < |z| < 2$

اولاً: يكتب $X(z)/z$ ككسر جزئي

$$X(z) = 5\frac{z}{z-2} - 4\frac{z}{z-1}$$

بالنسبة لـ (a) : نظراً لان منطقة التقارب لـ $X(z)$ هي $|z| > 1$ فأن المتتابعة $x(n)$ هو متتابعة سببية لذا نحصل على

$$x(n) = (5(2)^n - 4)u(n)$$

بالنسبة لـ (b) : منطقة التقارب لـ $X(z)$ هي $|z| < 2$ لذا فأن المتتابعة $x(n)$ هو متتابعة غير سببية

$$x(n) = (-5(2)^n + 4)u(-n-1)$$

بالنسبة لـ (c) : منطقة التقارب الاخيرة لـ $X(z)$ هي حلقة لذا فأن المتتابعة $x(n)$ ثنائية الجوانب احد المصطلحات سببي والاخر غير سببي منطقة التقارب تتداخل مع $|z| > 1$ و $|z| < 2$ حيث توفر التسلسل السببي والقطب $p_1 = 1$ و $p_2 = 2$

$$x(n) = -4u(n) - 5(2)^n u(-n-1)$$

مثال: لايجاد تحويل **Z** العكسي

$$X(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2z + z}, \qquad |z| > \sqrt{2}$$

نكتب $Y(Z) = X(z)/z$ ككسر جزئي

$$x(n) = f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1+3j}{4}\right)(1+j)^n - \left(\frac{1-3j}{4}\right)(1-j)^n \ , n \geq 1 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad o.w \end{cases}$$

$n \geq 1$ يمكن كتابة $x(n)$ بصيغة القطب كالتالي :

$$x(n) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + tan^{-1}3\right)$$

$$x(n) = \sqrt{5}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{4}n + tan^{-1}3\right)$$

(2-5) العلاقة بين تحويل Z وتحويل فورير

The Relation Between Z-transform and the Fourier Transform

ليكن $x(n)$ متتابعة، فأن تحويل فورير المنفصل لـ $x(n)$ يكتب بالصيغة

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-n\omega j} \tag{2.16}$$

عندما ω حقيقي. وتحويل **Z** لـ $x(n)$ هو

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{2.16}$$

حيث المتغيرz يكتب بالصيغة القطبية $z = re^{j\omega}$ عندما $r = |z|$ و $\omega = \arg(z)$

عند تعويض الصيغة القطبية في *المعادلة* (2.16) نحصل على :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}\left(e^{j\omega}\right)^{-n} \tag{2.17}$$

وهذا هو تحويل فورير المنفصل لـ $[x(n)r^{-n}]$. فاذا كان $r = 1$ فأن $z = e^{j\omega}$ يصبح تحويل **Z** لـ $x(n)$ اي

$$X(z)|z = e^{j\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) \tag{2.18}$$

لذا يعد تحويل **Z** تعميماً لتحويل فورير المنفصل[3] .

(2−6) العلاقة بين تحويل Z وتحويل لابلاس

The Relation Between transform and Laplace Transform

افترض ان $f(t)$ هي دالة مستمرة، اذا كانت $f_s(t)$ دالة عينة منفصلة التي يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(n-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(n-t) \qquad (2.19)$$

تحويل لابلاس للدالة ا $f_s(t)$ يكون:

$$X(s) = \mathcal{L}[f_s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(t-n)\right] e^{-st} dt \qquad (2.20)$$

حيث $s = \sigma + j\omega$ و σ و ω هما متغيرات حقيقية، من خلال تبادل ترتيب المجموع والتكامل في المعادلة (2.20) نحصل على:

$$X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) e^{-st} dt\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-ns}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)(e^{s})^{-n} = X(z)|z = e^{s} \qquad (2.21)$$

لذا فأن العلاقة بين تحويل لابلاس وتحويل **Z** [3] هي :

$X(z) = X(s)|s = \ln z$ او $X(s) = X(z)|z = e^{s}$

المصادر

[1] **تحويل-Z**، أ. حواء الهادي الطويل ، المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجمد الثاني العدد الحادي عشر، (2018)

[2] **Lecture notes on Z-Transform**. El Attar, Refaat. Vol.1.Lulu. com, (2006).

[3] **Study On Inverse Z-transform,** Hawa Elhadi Eltaweel and Manal Altaher Elzidani Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, vol 9, No 24, (2024)