جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية - قسم الرياضيات

طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية

بحث مُقدم الى قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة ميسان كجزء من متطلبات استكمال درجة البكالوريوس في الرياضيات

تقدمت به الطالبة

مريم طالب عوفي

بأشراف

م. د. علي سامي السوداني

1446هـ

2025م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿قَالُوا سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا ۖ إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ﴾

صدق الله العليّ العظيم

البقرة: الآيــة 32[1]

الاهـــــداء

الى من أشرق الكون نورا لأجلها وتزينت الجنان من زينتها وفاحت الزهور عبيراً من حُسن عطرها، الى من بذلت بالعطاء يدها وابتهجت قلوبنا فرحا بوجودها الى سر نجاحاتنا وسعادتنا، الى ريحانة رسول الله وزوجة ولي الله الى من يرضى لرضاها الله الى البتول الطاهرة الصديقة الشهيدة، الى امنا الحنونة وسيدة نساء العالمين من الاولين والاخرين الى فاطمة الزهراء ارواحنا وارواح العالمين لها الفداء وعليها أفضل صلوات الله وسلامه...

الى من سعى وشقى لأنعم بالراحة والهناء الذي لم يبخل بشيء من اجل دفعي في طريق النجاح الذي علمني ان ارتقي سلم الحياة بحكمة وصبر الى (والدي العزيز).

الى الينبوع الذي لا يمل العطاء الى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها الى (والدتي العزيزة).

أهدي هذا الجهد المتواضع

الباحثـــة

شكـــر وتقـــدير

الحمد الله الواحد الاحد المنعم المفضل والصلاة والسلام على عبده المجتبى ورسوله المصطفى وعلى ومصابيح الدجى.

اهل بيته أئمة الهدى

وبعد

أسجل فائق شكري وتقديري واحترامي الى كل من قدم يد العون والمساعدة وبالأخص "الأستاذ علي سامي السوداني" اذ كان لنفاذ بصيرته وسداد آرائه الأثر البالغ في تذليل العقبات وإنجاز البحث.

المستخلص

تُقدم الرياضيات اسلوبين لمعالجة المسائل الحسابية في مجمل موضوعات الرياضيات التحليلية وهما الحلول التحليلية والعددية. تعتبر الأساليب العددية في الرياضيات من الطرق الرياضية البديلة عن الحلول الدقيقة والتحليلية للموضوعات والمفاهيم النماذج الديناميكية التي يتعذر الوصول الى حلول تحليلية لها. اقترح الباحثين في النظم الديناميكية والمعادلات التفاضلية عدداً من الطرق المهمة، والتي تختلف اساليبها ونتائجها بين الرقمية والرمزية. تعتبر طريقة بيكارد احدى الطرق الهجينة من الأساليب التحليلية العددية المهمة في إيجاد حلول تقريبية تتابعية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية ونظمها. في هذا البحث قدمنا طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية وغير الخطية. تضمن البحث ثلاثة فصول، حيث قدمنا بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية حول أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية وأنواعها في الفصل الأول، وكذلك دراسة طريقة بيكارد لحل معادلة تفاضلية اعتيادية واحدة. بينما تناول الفصل الثاني دراسة طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات الاعتيادية الخطية، وقدمنا في الفصل الثالث حلول أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية باستخدام طريقة بيكارد. توصل البحث الى إمكانية تطبيق طريقة بيكارد في أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية والوصول الى حلول رمزية عند أي نقطة من نقاط مجال النظم المدروسة.

المحتويات

الموضوعات	رقم الصفحة
الآية الكريمة	أ
الاهداء	ب
الشكر والتقدير	ج
المستخلص	د
المقدمة	2—1
الفصل الأول: المفاهيم الأساسية	14—3
(1-1) مقدمة	4—3
(2-1) انظمة المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة	4—4
(3-1) طريقة بيكارد لحل (معادلة تفاضلية اعتيادية واحدة)	14—4
الفصل الثاني: طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية	26—15
(1-2) مقدمة	15—15
(2-2) حل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة بيكارد	26—15
الفصل الثالث: طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية	33—27
(1-3) مقدمة	27—27
(2-3) حل أنظمة المعادلات التفاضلية اللاخطية بطريقة بيكارد	33—27
المصادر	
Abstract	a

المُـــقدمـــة

نشـأ موضوع المعادلات التفاضلية مرافقاً لموضوع حساب التفاضل والتكامل وتطورا سوياً. وقد كان للعرب فضلاً كبيراً في التمهيد لكثير من موضوعات التفاضل والتكامل، حيث استعمل ثابت ابن قرة نظرية افناء (اضمحلال) الفرق (Theory of Exhaustion) في حساب حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره وهي تقابل عملية التكامل في حساب الحجوم الدورانية [2].

وقد ألف أبو الفتح عبد الرحمن المنصور الخازني كتاب "ميزان الحكمة " وهو واحد من الكتب الكثيرة التي وصلت الى الاوربيين وتُرجمت الى لغاتهم ابان عصور النهضة ومهدت في تطور العلوم الحديثة. لقد جاء في كتاب ميزان الحكمة العلاقة الصحيحة بين السرعة التي يسقط بها الجسم نحو سطح الأرض والبعد الذي يقطعه والزمن الذي يستغرقه وهي العلاقات التي تنص عليها القوانين والمعادلات[3] .

وجاء أيضا في كتاب ميزان الحكمة وجود قوة جاذبة على جميع جزيئات الاجسام، وكذلك وجود قوة تجذب هذه الاجسام باتجاه مركز الأرض وان اختلاف قوة الجذب يتبع المسافة بين الجسم الساقط ومركز الأرض. ويتبين في هذا الكتاب ان قاعدة ارخميدس لا تنطبق على السوائل فقط. بل وعلى الغازات أيضا وان الجسم في الهواء ينقص عن وزنه الحقيقي وان مقدار ما ينقص من الوزن يتبع كثافة الهواء[3].

ومن المواضيع الأخرى التي مهدت لاكتشاف التفاضل وبالتالي المعادلات التفاضلية هو الرقاص (بندول الساعة) المنسوب الى غاليل. لكن ابن يونس المصري كان قد اخترع الرقاص واستعمله في الساعات الدقاق وفي حساب الفترات الزمنية اثناء الرصد[4].

يتضح مما تقدم ان الموضوعات التي قدمها الرياضياتيين العرب الى جانب رياضياتيين أجانب، مهدت الى اكتشاف موضوع المعادلات التفاضلية. فالدقة والتعمق في دراسة هذه المواضيع العلمية اوجدت المعادلات التفاضلية ومن اجل حلولها تجردت وأصبحت موضوعا قائما بذاته. فمثلا دراسة حركة بندول الساعة تؤدي الى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. وكذلك بالنسبة لقوة الجذب والسرعة والمسافة كلها تؤدي الى معادلات تفاضلية مختلفة.

ولولا العرب لابتدأ الاوربيون من النقطة التي انتهى بها اليونان (وربما ابعد من ذلك لان العرب حفظت هذا التراث اليوناني وزادت عليه).

تتضمن المعادلات التفاضلية وسائل رياضية مهمة تطبق في مختلف حقول المعرفة. تدخل المعادلات التفاضلية في دراسة قوانين الحركة والتجاذب ومواضيع الميكانيك الكمي والحركة الموجية والنشاط الاشعاعي والدوائر الكهربائية والتفاعلات الكيمياوية، وأصبحت المعادلات التفاضلية وطرق حلها تساعد الباحث العلمي على فهم مظاهر التقدم والرقي في مختلف العلوم الحديثة المتطورة.

هنالك عده طرق لحل المعادلات التفاضلية منها طرق تحليلية مثل طريقة فصل المتغيرات ومعادلة برنولي وطريقة المعاملات الثابتة وغيرها.

ومنها طرق عددية مثل طريقة رانج-كوتا وطريقة اويلر وطريقة تايلر وطريقة بيكارد وغيرها. سنتطرق في هذا البحث لطريقة بيكارد وكيفية تطبيقها في حل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية وغير الخطية[3].

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية

نُظم المعادلات التفاضلية الاعتيادية

1-1. مقدمة

تُعرف أي علاقة مساواة بين عدد من المتغيرات بانها معادلة. وتُصنف المعادلات حسب عدد متغيراتها الى أحادية المتغيرات وثنائية وهكذا. كذلك تُصنف حسب احتوائها على أجزاء تفاضلية بالنسبة الى متغير مستقل واحد او أكثر الى معادلات تفاضلية اعتيادية وجزئية، على التوالي. عندما تحتوي مجموعة من المعادلات التفاضلية على أكثر من معادلة مرتبطة ببعضها وتصف سلوك دوال متعددة المتغيرات تعتمد على نفس المتغير المستقل فهو ما يدعى بنظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية[3].

الشكل العام لنظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة لأولى والدرجة الأولى يعطى بالصيغة الاتية:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \mathrm{t}) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \mathrm{t}) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \mathrm{t}) \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي متغيرات تابعة وتعتمد على المتغير المستقل t[4] .

حيث إيجاد الحل الخاص $x(t)$ من الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt}$ من الرتبة الأولى يستلزم وجود شرط ابتدائي واحد$x(t_0)$، فان نظام من المعادلات التفاضلية التي عددها n يستلزم وجود n شرط ابتدائي، ويعطى بمجموعة القيم التالية:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \qquad i = 1,2,3, \dots, n \qquad (2)$$

كما ان حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى يحتوي على ثابت اختياري واحد، فان حل نظام من المعادلات التفاضلية (2) من الرتبة الأولى يحتوي n من الثوابت الاختيارية (3).

يقال ان نظام المعادلات التفاضلية خطّياً إذا كانت جميع المتغيرات التابعة ومشتقاتها خطّية، أي من الدرجة الأولى وغير مضروبة ببعضها وليست دوالاً متسامية من الصيغة $sin. cos. e$ وغيرها.

تكتب أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بالصيغة (3).

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{1n}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned} \qquad (3)$$

حيث t متغير مستقل، بينما $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغيرات تابعة، والمعاملات a_{ij} دوال بالمتغير المستقل t او ثوابت لكل$i, j = 1.2.3. \ldots . n$ ، فمثلاً

$$\frac{dy}{dx} = z,\ \frac{dz}{dx} = 2y + 3z$$

تمثل نظام خطي، اما

$$\frac{dy}{dx} = \sin z\,,\ \frac{dz}{dx} = (1-y)y' + 2z$$

تمثل نظام غير خطي.

1-2. نظام المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة[2]

يقال ان نظام المعادلات التفاضلية الخطية (3) ذو معاملات متغيرة a_{ij}، إذا كان على الأّل واحدة من المعاملات a_{ij} دالة بالمتغير المستقل t، فمثلاً نظم المعادلات التفاضلية التالية

1. $\frac{dy}{dx} = 2xz + \cos x, \qquad \frac{dz}{dx} = 3xy - \sin x$

2. $\frac{dy}{dx} = x^2 y + (x+1)z + x^3, \qquad \frac{dz}{dx} = xe^x y + x^3 z - e^x$

تمثل أنظمة خطية ذات معاملات متغيرة.

1-3. طريقة بيكارد لحل معادلة تفاضلية اعتيادية واحدة

ليكن لدينا مسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

وبتكامل (4) على الفترة $[x_0, x]$، نحصل على

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(s,y)ds \qquad (5)$$

ويمكن إعادة كتابة الحل (5) الى المعادلة التكاملية

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s,y)ds$$

او يُكتب بالصيغة التكاملية التالية:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(s,y)ds \qquad (6)$$

ان حل مسالة القيمة الابتدائية (4) يكون مكافئاً لإيجاد $y(x)$ التي تحقق المعادلة (6).

قد نواجه صعوبة في حساب تكامل الطرف الأيمن من المعادلة التكاملية (6) لعدم توفر صيغ تكاملية مباشرة للدالة $f(t,y)$، لذلك سوف نلجأ الى إيجاد تقريب متتالي لحل المعادلة التكاملية (6) كما سيأتي.

كتقريب اولي نضع $y = y_0$ في الدالة المكاملة (6)، فنحصل على

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_0)ds$$

حيث ان $y_1(x)$ هي قيمة $y(x)$ المناظرة وتسمى بالتقريب الأول. للحصول على تقريب أكثر دقة نعوض عن y_1 في الطرف الأيمن من (6) لنحصل على التقريب الثاني

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(s,y_1)ds$$

ونستمر بنفس الأسلوب وصولاً الى $y_n(x)$ والتي تمثل التقريب النوني للحل $y(x)$، حيث نحصل على:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_{n_1})ds, \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad (7)$$

وبذلك نحصل على متتابعة من الحلول التقريبية $y_n(x),\ldots,y_2(x),y_1(x),y_0(x)$.[4]

الأمثلة التالية توضح كيفية إيجاد حل لمعادلات تفاضلية اعتيادية بطريقة بيكارد.

مثال (1.1): لتكن مسالة القيمة الابتدائية التالي

$$\frac{dy}{dx} = 2y - 2x^2 - 3, \qquad y(0) = 2 \qquad (8)$$

لاستخدام طريقة بيكارد في حل (8)، فان

$$y' = 2y - 2x^2 - 3, \qquad y_0 = 2, \qquad x_0 = 0$$

بالتالي، فإن الصيغة التقريبية للحل النوني للمعادلة (8) تعطى بالآتي:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2y_{n-1} - 2 - 3)ds, \qquad n = 1,2,3, \ldots \qquad (9)$$

لإيجاد التقريب الأول عندما $n = 1$، فان

$$y_1 = y_{0+} \int_{x_0}^{x} (2y_0 - 2s^2 - 3)ds = 2 + \int_0^x (2y_0 - 2s^2 - 3)ds$$

$$y_1 = 2 + \left[4s - \frac{2s^3}{3} - 3s\right]_0^x = 2 + 4x - \frac{2}{3}x^3 - 3x = 2 + x - \frac{2x^3}{3}$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$، حيث يتم حساب $y_2(x)$ بدلالة $y_1(x)$، فنحصل على:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2y_1 - 2s^2 - 3)ds = 2 + \int_0^x (\,2(\,2 + s - \frac{2}{3}s^3) - 2s^2 - 3)ds$$

$$y_2 = 2 + \int_0^x \left(\,1 + 2s - \frac{4}{3}s^3 - 2s^2\right) ds = 2 + \left[s + s^2 - \frac{2s^3}{3} - \frac{4s^4}{12}\right]_0^x$$

$$y_2 = 2 + x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{3}$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$، يُحسب بدلالة التقريب الثاني y_2، حيث

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\,2y_2 + 2s^2 - 3)ds$$

$$= 2 + \int_0^x (2(2 + s + s^2 - \frac{2s^3}{3} - \frac{s^4}{3} - 2s^2 - 3))ds$$

$$= 2 + \int_0^x (\,4 + 2s + 2s^2 - \frac{4}{3}s^3 - \frac{2}{3}s^4 - 2s^2 - 3)ds$$

$$= 2 + \int_0^x (1 + 2s - \frac{4}{3}s^3 - \frac{2}{3}s^4)ds = 2 + \left[s + s^2 - \frac{4s^4}{12} - \frac{2s^5}{15}\right]_0^x$$

$$\therefore y_3 = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 \qquad (10)$$

المعادلة (10) تمثل التقريب الثالث لحل المعادلة (8)، والذي يكون أكثر دقة واقل خطأ من التقريبين الأول y_1 والثاني y_2.

يمكن الاستمرار بحساب تقريبات أكثر دقة عندما تكون n كبيرة بما يكفي.

مثال (1.2): لحل مسالة القيمة الابتدائية التالية بطريقة بيكارد،

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \qquad y(0) = 0 \tag{11}$$

فان متطلبات الحل في صيغة بيكارد العامة (6)، هي

$$f(x,y) = x + y^2, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 0$$

فان صيغة الحل النوني y_n، لمسالة القيمة الابتدائية (11)، هي

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s + {y_{n-1}}^2) ds, \qquad n = 1,2,3 \ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s + {y_0}^2) ds = 0 + \int_0^x (s) ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x$$

$$\therefore y_1 = \frac{x^2}{2}$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s + {y_1}^2) ds = 0 + \int_0^x \left(s + \left(\frac{s^2}{2}\right)^2\right) ds = \int_0^x (s + \frac{s^4}{4}) ds$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^5}{20}\right]_0^x$$

$$\therefore y_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s + {y_2}^2) ds = 0 + \int_0^x \left(s + \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^5}{20}\right)^2\right) ds$$

$$= \int_0^x (s + \frac{s^4}{4} + \frac{s^{10}}{400} + \frac{s^7}{20}) ds = \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^5}{20} + \frac{s^{11}}{4400} + \frac{s^8}{160}\right]_0^x$$

$$\therefore y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^{11}}{4400} + \frac{x^8}{160} \qquad (12)$$

المعادلة (12) تمثل التقريب الثالث لحل المعادلة التفاضلية (11) بالشرط الابتدائي $y(0) = 0$ عند أي قيمة x من نقاط مجال المعادلة التفاضلية (11).

مثال (1.3): طريقة بيكارد لحل مسالة القيمة الابتدائية (13) التالية:

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{y}{x}, \qquad y(1) = 2 \qquad (13)$$

تُحسب كالآتي:

$$f(x, y) = 2 - \frac{y}{x}, \qquad x_0 = 1, \qquad y_0 = 2$$

حيث صيغة التقريب النوني للمعادلة التفاضلية (13) تعطى بالصيغة (14).

$$y_n = 2 + \int_{x_0}^{x} \left(2 - \frac{1}{s} y_{n-1}\right) ds\,, \qquad n = 1,2,3, \ldots \qquad (14)$$

لحساب التقريبات المتتالية، التقريب الأول عندما $n = 1$ ، تُحسب بدلالة القيمة الابتدائية y_0، حيث

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left(2 - \frac{1}{s} y_0\right) ds = 2 + \int_{1}^{x} (2 - \frac{2}{s})) ds \; = [2s - 2lns\,]_0^x$$

$$= 2 + 2x - 2\ln 2 - 2$$

$$\therefore y_1 = 2x - 2ln2$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$، يمكن ايجاده بدلالة y_1، فنحصل على

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2 - \frac{1}{s} y_0) ds = 2 + \int_{1}^{x} (2 - \frac{1}{s}(\,2s - 2ln2)) ds$$

$$= 2 + 2\int_{1}^{x} (lns \frac{1}{s}) ds = [2 + (lns)^2]_1^x$$

$$\therefore y_2 = 2 + ln^2 x$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$، يمكن حسابها بدلالة y_2، حيث ان

$$y_3 = 2 + \int_{x_0}^{x} \left(2 - \frac{1}{s} y_2\right) ds = 2 + \int_{1}^{x} \left(2 - \frac{1}{s}(2 + 2ln^2 s)\right) ds$$

$$= 2 + 2x - 2lnx - \frac{1}{3} ln^3 x - 2$$

$$\therefore y_3 = 2x - 2lnx - \frac{1}{3} ln^3 x$$

ويمكن إيجاد تقريبات أخرى للحل تزداد فيها دقة الحل.

مثال (4.1): ان تطبيق طريقة بيكارد لحل مسالة القيمة الابتدائية التالية

$$y' + y = e^x, \qquad y(0) = 0$$

حيث:

$$f(x, y) = e^x - y, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 0$$

والصيغة النونية للحل تعطى بالعلاقة التالية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_{n-1}) ds, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

التقريب الأول عند $n = 1$، يعطي

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_0) ds = 0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_0) ds = \int_{0}^{x} (e^s) ds$$

$$\therefore y_1 = e^x - 1$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_1) ds = 0 + \int_{0}^{x} (e^s - e^s - 1) ds = \left[e^s - e^s + s\right]_0^x$$

$$\therefore y_2 = x$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_2)ds = 0 + \int_0^x (e^s - s)ds = \left[e^s - \frac{s^2}{2}\right]_0^x$$

$$\therefore y_3 = e^x - \frac{1}{2}x^2$$

التقريب الرابع عندما $n = 4$

$$y_4 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_3)ds = 0 + \int_0^x \left(e^s - \left(e^s - \frac{1}{2}s^2\right)\right)ds$$

$$= \left[e^s - e^s + \frac{s^3}{6} + s\right]_0^x = \left[\frac{s^3}{6} + s\right]_0^x$$

$$\therefore y_4 = \frac{x^3}{6} + x$$

التقريب الخامس عندما $n = 5$

$$y_5 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (e^s - y_4)ds = 0 + \int_0^x (e^s - (\frac{1}{6}s^3 + s))ds$$

$$= \int_0^x (e^s - \frac{1}{6}s^3 - s)ds = \left[e^s - \frac{s^4}{24} - \frac{s^2}{2}\right]_0^x$$

$$\therefore y_5 = e^x - \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - 1$$

عند النقطة $x = 0$، فان قيمة الحل $y_5 = 0$ ، وهي قيمة دقيقة إذا ما قورنت مع الحل الدقيق للمعادلة وهو $y = 0$، وهذا ما يعطي أهمية لطريقة بيكارد في إيجاد حلول نسبة الخطأ تكون صغيرة او تقترب الى الصفر.

مثال (5.1): طريقة بيكارد لحل مسالة القيمة الابتدائية التالية

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + y, \qquad y(0) = 1$$

حيث

$$f(x, y) = \sin x + y, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1$$

والتي تقريبها النوني يعطى بالصيغة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin s + y_{n-1})ds\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin s + y_0)ds = 1 + \int_0^x (\sin s + 1)ds = 1 + [-\cos s + s]_0^x$$

$$= 1 + [-\cos x + x + \cos 0 - 0]$$

$$\therefore y_1 = 2 + x - \cos x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin s + y_1)ds = 1 + \int_0^1 (\sin s + 2 + s - \cos s)ds$$

$$= 1 + \left[-\cos s + 2s + \frac{s^2}{2} - \sin s\right]_0^x$$

$$= 1 + \left[-\cos x + 2x + \frac{x^2}{2} - \sin x + \cos 0\right]$$

$$\therefore y_2 = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} - \cos x - \sin x$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin s + y_2)ds$$

$$= 1 + \int_0^x (\sin s + 2 + 2s - \frac{s^2}{2} - \cos s - \sin s)ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(2 + 2s + \frac{s^2}{2} - \cos s\right)ds$$

$$= 1 + \left[2s + s^2 + \frac{s^3}{6} - \sin s\right]_0^x$$

$$\therefore y_3 = 1 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \sin x$$

مثال (6.1): في مسالة القيمة الابتدائية (15) سنجد الخطأ المطلق عند $x = 2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x - \frac{1}{2}y, \qquad y(0) = 4 \qquad (15)$$

صيغة التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية تعطى بالعلاقة

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 - 4s - \frac{1}{2}y_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 - 4s - \frac{1}{2}y_0)ds = 4 + \int_{x_0}^{x} (s^2 - 4s - \frac{1}{2}(4))ds$$

$$= 4 + \int_{0}^{x} (s^2 - 4s - 2)ds = 4 + \left[\frac{1}{3}s^3 + 2s^2 - 2s\right]_0^x$$

$$\therefore y_1 = 4 - 2x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 + 4s - \frac{1}{2}y_1)ds = 4 + \int_{0}^{x} (s^2 + 4s - \frac{s^3}{6} - s^2 + s - 2)ds =$$

$$4 + \left[2s^2 - \frac{s^4}{24} + \frac{s^2}{2} - 2s\right]_0^x$$

$$\therefore y_2 = \frac{-x^4}{24} + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 4$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 + 4s - \frac{1}{2}y_2)ds$$

$$= 4 + \int_{0}^{x} (s^2 + 4s - \frac{s^4}{48} - \frac{5}{4}s^2 + s - 2)ds$$

$$= 4 + \left[\frac{s^3}{3} + 2s^2 - \frac{s^5}{240} - \frac{5}{12}s^3 + \frac{s^2}{2} - 2s\right]_x^x$$

$$\therefore y_3 = 4 + \frac{x^3}{3} + 2x^2 + \frac{x^5}{240} - \frac{5}{12}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x$$

التقريب الرابع عندما $n = 4$

$$y_4 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 + 4s - \frac{1}{2}y_3)ds$$

$$= 4 + \int_{0}^{x} (s^2 + 4s - \frac{s^5}{480} + \frac{s^3}{24} - \frac{5}{4}s^2 + s - 2)ds$$

$$= 4 + \left[\frac{s^3}{3} + 2s^2 - \frac{s^6}{2880} + \frac{s^4}{96} - \frac{5}{2}x^2 - 2x + 4\right]_0^x$$

$$\therefore y_4 = -\frac{x^6}{2880} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^3}{12} + \frac{5x^2}{2} - 2x + 4 \qquad (16)$$

المعادلة (16) تمثل التقريب الرابع لمسألة القيمة الابتدائية (15).

لحساب الخطأ المطلق نوجد الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية (15)، حيث $y' + \frac{1}{2}y = x^2 + 4x$

وهي معادلة تفاضلية خطية، عامل التكامل لها هو $I(x) = e^{\frac{x}{2}}$ ، فيمكن حساب الحل كالآتي:

$$I(x)dy + I(x)p(x)y = I(x)f(x)$$

$$e^{\frac{x}{2}}dy + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}y\right) = e^{\frac{x}{2}}(x^2 + 4x)$$

$$\frac{d}{dx}(I(x)y) = I(x)f(x)$$

$$\frac{d}{dx} = \left(e^{\frac{x}{2}}y\right) = e^{\frac{x}{2}}(x^2 + 2)$$

التكامل بالتجزئة ينتج

$$y = 2x^2 + ce^{\frac{-x}{2}}$$

عند الشرط الابتدائي $y(0) = 4$ نحصل على $c = 4$، بذلك فان

$$y = 2 + 4e^{\frac{-x}{2}}$$

فان الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (15) يعطى بالمعادلة (17).

$$y_{(2)} = 2(2)^2 + 4e^{\frac{-x\,(2)}{2}} \qquad (17)$$

الحل الدقيقي عند النقطة $x = 2$ هو $y(2) = 9.472$، بينما الحلول التقريبية موضوحة بالجدول الآتي:

التقريب	الحل الحقيقي	الحل بطريقة بيكارد	الخطأ المطلق
1-	9.472	10.66666667	1.19466667
2-	9.472	9.333333333	0.1386666667
3-	9.472	9.466666667	0.005333333
4-	9.472	9.478	0.006

الفصل الثاني

الفصل الثاني

طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية

2-1. مقدمة

تكمن أهمية طريقة بيكارد في إمكانية تطبيقها على أي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى اعتيادية سواء كانت خطية ام غير خطية، متجانسة او غير متجانسة. ان تطبيق طريقة بيكارد في إيجاد حلول تتابعية تقريبية رمزية لأنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية يفتح المجال على تطبيقها في حساب حلول تقريبية لمعادلات تفاضلية خطية من رتب عليا. سنقدم في هذا الفصل طريقة بيكارد في إيجاد حلول تقريبية لأنظمة المعادلات التفاضلية الخطية مزودة بالأمثلة التوضيحية.

2-2. حل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة بيكارد

يُعرّف نظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطّية الآتي

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y,z) \\ \frac{dz}{dx} &= g(x,y,z) \end{aligned} \tag{18}$$

بالشروط الابتدائية $y(0) = y_0$ و $z(0) = z_0$، حيث f و g دوال خطية في y و z.

ان طريقة بيكارد لحساب الحلول التتابعية لنظام المعادلات التفاضلية الخطية (18)، يمكن وصفه بالخوارزمية التالية.

ان التقريب النوني لمركبات النظام (18) وهي y_n، z_n يعطى بالصيغة التكرارية الاتية

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}, z_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,3,\dots \\ z_n &= z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}, z_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,3,\dots \end{aligned} \tag{19}$$

حيث يمكن حساب التقريب الأول بدلالة الشروط الابتدائية $z = z_0$ و$y = y_0$ في (19)، من خلال التقريب النوني، فنحصل على

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\ (s, y_0, z_0)ds$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_0, z_0)ds$$

كذلك التقريب الثاني يمكن حسابه بتعويض التقريب الأول في الصيغة العامة (19)، نحصل على

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\ (s.y_1.z_1)ds$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} g\ (s.y_1.z_1)ds$$

ان الاستمرار بحساب التقريبات المتتابعة ينتج مجموعة من الحلول التقريبية والتي تمثل متتابعة تقترب الى الحل الدقيق عندما تكون n كبيرة بما يكفي. أي ان

$$y_0.\ y_1(x).y_2(x) \ldots . y_n(x) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} y_n(x) \to y(x)$$

$$z_0.z_1(x).z_2(x) \ldots . z_n(x) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} z_n(x) \to z(x)$$

مثال (2.1): لحل نظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = x^3(y+z), \qquad y(0) = 1, z(0) = \frac{1}{2}$$

بطريقة بيكارد، حيث

$$y' = z, \qquad z' = x^3(y\ + z\ ), \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = \frac{1}{2}$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_{n-1}\, ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\ x^3(y_{n-1} + z_{n-1}))ds, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_0\, ds = 1 + \int_0^x \frac{1}{2} ds = 1 + \left[\frac{1}{2}\ x\right]_0^x = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (s^3\,(y_0 + z_0)ds = \frac{1}{2} + \int_0^x (\,\frac{3}{2}s^3)ds = \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{8}\,s^4\,\right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_1 ds = 1 + \int_0^x (\,\frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4)ds = 1 + \left[\frac{1}{2}\,s + \frac{3}{40}\,s^5\right]_0^x$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^5$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,s^3(y_1 + z_1)ds = \frac{1}{2} + \int_0^x (\,s^3(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4))ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x (\left(s^3 + \frac{1}{2}s^4 + \frac{1}{2}s^3 + \frac{3}{8}s^7\right)ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x (\,\frac{3}{2}s^3 + \frac{1}{2}\,s^4 + \frac{3}{8}s^7)ds$$

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{8}\,s^4 + \frac{1}{10}\,s^5 + \frac{3}{64}\,s^8\right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{64}x^8$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_2\,ds = 1 + \int_0^x (\quad \frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{10}s^5 + \frac{3}{64}s^8)ds$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2}\,s + \frac{3}{40}\,s^5 + \frac{1}{60}\;s^6 + \frac{3}{576}\,s^9\right]_0^x$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^5 + \frac{1}{60}x^6 + \frac{1}{129}x^9$$

$$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,s^3(y_2 + z_2)ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x (\,s^3\,(1 + \frac{1}{2}s + \frac{3}{40}s^5 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{10}s^5 + \frac{3}{64}s^8)ds$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x s^3\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}s\; + \frac{3}{8}s^4 + \frac{7}{40}s^5 + \frac{3}{64}\,s^8\right)ds$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{64}x^8 + \frac{7}{360}x^9 + \frac{1}{256}x^{12}$$

مثال (2.2): استخدم طريقة بيكارد لحل نظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = x^2 z + x^4 y, \qquad y(0) = 5\ , \qquad z(0) = 1$$

حيث ان

$$f(x,y,z) = z \qquad ,g(x,y,z) = x^2 z + x^4 y \qquad ,x_0 = 0\ , y_0 = 5 \quad ,z_0 = 1$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_{n-1} ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 z_{n-1} + s^4 y_{n-1}) ds$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_0\, ds = 5 + \int_0^x 1\, ds = 5 + [s]_0^x = 5 + x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 z_0 + s^4 y_0) ds = 1 + \int_0^x (s^2 + 5\ s^4) ds = 1 + \left[\frac{1}{3} s^3 + s^5\right]_0^x$$

$$= 1 + \frac{1}{3} x^3 + x^5$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_1\, ds = 5 + \int_0^x (1 + \frac{1}{3} s^3 + s^5) ds = 5 + \left[s + \frac{1}{12} s^4 + \frac{1}{6} s^6\right]_0^x =$$

$$5 + x + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{6} x^4$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (s^2 z_1 + s^4 y_1) ds = 1 + \int_0^x (s^2 (1 + \frac{1}{3} s^3 + s^5) + s^4 (5 + s)) ds = 1 +$$

$$\int_0^x (s^2 + \frac{1}{3} s^5 + s^7 + 5s^4 + s^5) ds = 1 + \int_0^x (s^2 + 5s^4 + \frac{4}{3} s^5 + s^7) ds = 1 + \left[\frac{1}{3} s^3 +\right.$$

$$\left. s^5 + \frac{4}{18} s^6 + \frac{1}{8} s^8\right]_0^x = 1 + \frac{1}{3} x^3 + x^5 + \frac{4}{18} x^6 + \frac{1}{8} x^8$$

مثال (3.2): استخدم طريقة بيكارد لحل نظام المعادلات

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + xy, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$$

لحل هذه المسالة سوف نحل مسالة القيمة الابتدائية، سنحول المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية الى نظام معادلات تفاضلية خطية من خلال الفروض التالية:

ليكن $\frac{dy}{dx} = z$ وبالتالي $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ وتكون الشروط الابتدائية عند $x_0 = 0$

$\frac{dy}{dx} = z \quad , \frac{dz}{dx} = 1 + xy$

ان متطلبات التقريب النونية لصيغة بيكارد هي

$$f(x,y,z) = z, \qquad g(x,y,z) = 1 + xy, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 0$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_{n-1}\, ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (1 + s y_{n-1}) ds, \; n = 1,2,3,\ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_0\, ds = 1 + \int_0^x 0\, ds = 1$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (1 + s y_0) ds = 0 + \int_0^x (1 + s)\, ds = \left[s + \frac{s^2}{2}\right]_0^x = x + \frac{x^2}{2}$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_1 ds = 1 + \int_0^x \left(s + \frac{1}{2} s^2\right) ds = 1 + \left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right]_0^x$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (1 + s y_1)\, ds = 0 + \int_0^x (1 + s)\, ds = \left[s + \frac{1}{2}s^2\right]_0^x = x + \frac{1}{2}x^2$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_2 ds = 1 + \int_0^x \left(s + \frac{1}{2}s^2\right) ds = 1 + \left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right]_0^x$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (1 + s y_2) ds = 0 + \int_0^x \left(1 + s\left(1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right)\right) ds$$

$$= \int_0^x \left(1 + s + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{6}s^3\right) ds = \left[s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4 + \frac{1}{30}s^5\right]_0^x$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{30}x^5$$

مثال (4.2): استخدم طريقة بيكارد لحل نظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = xz + x^2, \qquad \frac{dz}{dx} = xy + e^x, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = 2$$

$$y' = xz + x^2, \qquad z' = xy + e^x \qquad , x_0 = 0 \ , \ y_0 = 1 \ , \ z_0 = 2$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (sz_{n-1} + s^2)ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (sy + e^s)ds \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (sz_0 + s^2)ds = 1 + \int_0^x (2s + s^2)ds = 1 + \left[s^2 + \frac{1}{3}s^3\right]_0^x$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (sy_0 + e^s)ds = 2 + \int_0^x (s + e^s)ds = \ 2 + \left[\frac{1}{2}s^2 + e^s\right]_0^x$$

$$= 2 + \left[\frac{1}{2}x^2 + e^x - \frac{1}{2}(0)^2 - e^0\right]_0^x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + e^x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_{0+} \int_{x_0}^{x} (sz_1 + s^2)ds = 1 + \int_0^x \left(s\left(1 + \frac{1}{2}s^2 + e^s\right) + s^2\right) ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(s + \frac{1}{2}s^3 + se^s + s^2\right) ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(s + \ s^2 + \frac{1}{2}s^3\right) ds + \int_0^x (se^s)ds$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{8}s^4\right]_0^x + [se^s]_0^x - \int_0^x e^s ds$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4\right] + [xe^x] - \int_0^x e^s ds$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + xe^x - [e^x - 1]$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (sy_1 + e^s)ds = 2 + \int_0^x \left(s\left(1 + s^2 + \frac{1}{3}s^3\right) + e^s\right)ds$$

$$= 2 + \int_0^x \left(s + s^3 + \frac{1}{3}s^4 + e^s\right)ds$$

$$= 2 + \left[\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{15}s^5 + e^s\right]_0^x$$

$$= 2 + \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + e^x - \frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{15}(0)^5 - e^0\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + e^x$$

مثال (2.5): لحل نظام المعادلات التالي بطريقة بيكارد

$$\frac{dy}{dx} = xz + \cos x\,, \qquad \frac{dz}{dx} = xy - \sin x\,, \qquad y(0) = 0\ .z(0) = 1$$

حيث

$$f(x,y,z) = xz + cos\,x\,, g(x,y,z) = xy - sin\,x\,, \qquad x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1$$

فان التقريب النوني لمسالة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\ sz_{n-1} + \cos x\ )ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\ sy_{n-1} - \sin s)ds \qquad , n = 1, 2, 3, \ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\ sz_0 + \cos s)ds = 0 + \int_0^x (\ s + \cos s)\ ds = \left[\frac{1}{2}s^2 + \sin s\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \sin x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\ sy_0 - \sin s)\ ds = 1 + \int_0^x - \sin s\ ds = 1 + [\cos s]_0^x$$

$$= 1 + [\cos x - \cos 0] = \cos x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\, sz_1 + \cos s)ds = y_0 + \int_0^x (s\ \cos s + \cos s)ds$$

$$= \int_0^x \cos s\ ds\ \int_0^x s\cos s\ \ ds = [\sin s]_0^x + [s\sin s]_0^x - \int_0^x \sin s\ \ ds$$

$$= \sin x\ + x\sin x - [-\cos s]_0^x = \sin x + x\sin x + \cos x - 1$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\, sy_1 - \sin s\ )\ ds = 1 + \int_0^x (\, s\ \ \left(\frac{1}{2}s^2 + \sin s\right) - \sin s\ ))ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2}S^3 + s\ \sin s - \sin s\right) ds$$

$$= 1 + \int_0^x (\frac{1}{2}s^3 - \sin s)\ ds + \int_0^x (s\sin s)ds$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{8}s^4 + \cos s\right]_0^x + [-s\cos s]_0^x - \int_0^x -\cos s\ ds$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{8}x^4 + \cos x - \cos 0\right] + [-x\cos x\ ] - [-\sin s]_0^x$$

$$= \frac{1}{8}x^4 + \cos x - x\cos x + \sin x$$

مثال(6.2) : لحساب الخطأ المطلق عند $x = 1$ بطريقة بيكارد لنظام المعادلات (20).

$$\frac{dy}{dx} = 2z, \qquad \frac{dz}{dx} = -6y + 7z, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 1 \qquad (20)$$

حيث

$$f(x,y,z) = 2z, \qquad z' = -6y + 7z, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 1$$

فان التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية (20) هو

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\, 2z_{n-1})ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\, -6y_{n-1} + 7z_{n-1})ds\,,\ n = 1,2,3,\ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\, 2z_0)ds = 1 + \int_0^x \big(\, 2(1)\big)ds = 1 + [2s]_0^x = 1 + 2x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (-6y_0 + 7z_0)ds = 1 + \int_0^x \big(-6(1) + 7(1)\big)ds = 1 + \int_0^x 1\, ds$$
$$= 1 + x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2z_1)ds = 1 + \int_0^x \big(2(1+s)\big)ds = 1 + \int_0^x (2 + 2s)ds$$
$$= 1 + 2x + x^2$$
$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (-6y_1 + 7z_1)ds = 1 + \int_0^x \big(-6(1+2s) + 7(1+s)\big)ds$$
$$= 1 + \int_0^x (1 - 5s)ds = 1 + \left[s - \frac{5}{2}s^2\right]_0^x = 1 + x - \frac{5}{2}x^2$$

التقريب الثالث عندما $n = 3$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2z_2)ds = 1 + \int_0^x \left(2\left(1 + s - \frac{5}{2}s^2\right)\right)ds$$
$$= 1 + \int_0^x (2 + 2s - 5s^2)ds = 1 + \left[2s + s^2 - \frac{5}{3}s^3\right]_0^x$$
$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{5}{3}x^3$$
$$z_3 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (-6y_2 + 7z_2)ds$$
$$= 1 + \int_0^x \left(-6(1 + 2s + s^2) + 7\left(1 + s - \frac{5}{2}s^2\right)\right)ds$$
$$= 1 + \int_0^x \left(-6 - 12s - 6s^2 + 7 + 7s - \frac{35}{2}s^2\right)ds$$
$$= 1 + \int_0^x \left(1 - 5s - \frac{47}{2}s^2\right)ds = 1 + \left[s - \frac{5}{2}s^2 - \frac{47}{2}s^3\right]_0^x$$
$$= 1 + x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{47}{6}x^3$$

التقريب الرابع عندما $n = 4$

$$y_4 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2z_3)ds = 1 + \int_0^x \left(2\left(1 + s - \frac{5}{2}s^2 - \frac{47}{6}s^3\right)\right)ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(2 + 2s - 5s^2 - \frac{47}{3}s^3\right)ds$$

$$= 1 + \left[2s + s^2 - \frac{5}{3}s^3 - \frac{47}{12}s^4\right]_0^x = 1 + 2x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{47}{12}x^4$$

$$z_4 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (-6y_3 + 7z_3)ds$$

$$= 1 + \int_0^x (-6 - 12 - 6s^2 + 10s^3 + 7 + 7 - \frac{35}{2}s^2 - \frac{329}{6}s^3)ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 - 5s - \frac{47}{2}s^2 - \frac{309}{6}s^3\right)ds$$

$$= 1 + \left[s - \frac{5}{2}s^2 - \frac{47}{6}s^3 - \frac{309}{24}s^4\right]_0^x$$

$$= 1 + x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{47}{6}x^3 - \frac{309}{24}x^4$$

$$\cdot\begin{bmatrix} 1 + 2x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{47}{12}x^4 \\ 1 + x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{47}{6}x^3 - \frac{309}{24}x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_4 \\ z_4 \end{bmatrix}$$ فان التقريب الرابع لحل النظام (20) هو

لحساب الخطأ المطلق نوجد الحل التحليلي لنظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = 2z, \qquad \frac{dz}{dx} = -6y + 7z \Longleftrightarrow x' = Ax \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \text{ג}I) = 0 \Longleftrightarrow det\begin{pmatrix} 0 - \text{ג} & 2 \\ -6 & 7 - \text{ג} \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (-\text{ג})(7 - \text{ג}) - 2(-6) = 0$$

$$\text{ג}^2 - 7\text{ג} + 12 = 0 \Longleftrightarrow (\text{ג} - 3)(\text{ג} - 4) = 0 \Longleftrightarrow \text{ג}_1 = 3\,.\,\text{ג}_2 = 4$$

عندما ג=3، فان $(A - \text{ג}I)k = 0$، حيث

$$(A - 3I)k = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0-3 & 2 \\ -6 & 7-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow -3k_1 + 2k_2 =$$

$$0 \Longleftrightarrow -6k_1 + 4k_2 = 0 \Longleftrightarrow k_1 = 1\,.\,k_2 = 3$$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

عندما $\lambda_2 = 4 \rightarrow (A - 4I)k = 0$

$$\begin{pmatrix} 0-4 & 2 \\ -6 & 7-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow -4k_1 + 2k_2$$

$$= 0 \Longleftrightarrow -6k_1 + 3k_2 = 0 \Longleftrightarrow k_1 = 1\,.\,k_2 = 2 \Longleftrightarrow k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x}$$

$$y = 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

$$z = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{4x}$$

عند الشرط الابتدائي $y(0) = 1,\ z(0) = 1$

$$2c_1 e^{3(0)} + c_2 e^{4(0)} = 1 \rightarrow 2c_1 + c_2 = 1$$

$$3c_1 e^{3(0)} + 2c_2 e^{4(0)} = 1 \rightarrow 3c_1 + 2c_2 = 1$$

$$c_1 = 1\ .c_2 = -1$$

$$y = 2e^{3x} - e^{4x}, \qquad z = 3e^{3x} - 2e^{4x}$$

فان الحل الدقيق للنظام (20) هو $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{3x} - e^{4x} \\ 3e^{3x} - 2e^{4x} \end{bmatrix}$.

بأخذ قيمة $x = 1$ فان الحل الدقيق هو $\begin{bmatrix} y(1) \\ z(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.43 \\ -48.94 \end{bmatrix}$

التقريب	الحل الحقيقي	الحل بطريقة بيكارد	الخطأ المطلق
1-	-14.43	3	17.43
	-48.94	2	46.94
2-	-14.43	4	10.43
	-48.94	-0.5	48.44
3-	-14.43	2.333	12.0972
	-48.94	-8.333	40.607
4-	-14.43	-1.583	12.847
	-48.94	-21.21	27.73

في هذا المثال نلاحظ تقارب الحل التقريبي (العددي) الى الحل العددي تقارب بطيء، أي الحل العددي $y_n \cdot z_n$ سيقترب من الحل الدقيق (المضبوط) عند قيم n كبيرة أي كلما كانت قيم n كبيرة كلما اقترب الحل العددي $y_n \cdot z_n$ بطريقة بيكارد الى الحل الدقيق، لكن مع كل تقريب جديد تصغر نسبة الخطأ في المتغيرات وهذا ما يرجح طريقة بيكارد. يعود سبب التقارب البطيء في طريقة بيكارد الى صيغة النظام المدروس أولاً، وكذلك الى عدد المعادلات في النظام والذي يمثل عدد المتغيرات في النظام، وبالتالي ان أي نسبة خطا في أي متغير يعني ان النسبة تتطور في باقي المعادلات وتوثر على باقي المتغيرات وهذا ما يتطلب حساب تقريبات متتابعة كثيرة وهذه أحد سلبيات طريقة بيكارد في أنظمة المعادلات التفاضلية.

الفصل الثالث

الفصل الثالث

طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية

3-1. مقدمة

تُعرف طريقة بيكارد ايضاً بطريقة التقريب المتتابع لبيكارد (Picard Iteration Method)، تعتمد على مبرهنة الوجود والوحدانية لحلول المعادلات التفاضلية، والتي يمكن اثباتها باستخدام نفس المبرهنة، والتي تشترط ان تكون دالة المعادلة التفاضلية $f(.)$ مستمرة. تُستخدم طريقة بيكارد لنمذجة سلوك بعض الأنظمة الفيزيائية التي تتضمن سلوك تفاضلي، مثل الأنظمة الديناميكية، كذلك تُستخدم في حل نماذج النمو، الانتشار، أو التفاعل البيولوجي التي يُعبر عنها بمعادلات تفاضلية. تكمن أهمية طريقة بيكارد في كونها لا تميز بشكل صريح بين كون نظام المعادلات التفاضلية المدروس خطيًا أو غير خطي، ما يختلف هو كون الدالة $f(.)$ في النظام غير الخطي تكون معادلة غير خطية، وهنا تكمن مشكلة تضخم الدالة مع التقريبات المتتابعة والذي يجعل التقارب بطيء احياناً.

سنقدم في هذا الفصل طريقة بيكارد وتطبيقها في إيجاد حلول تقريبية تتابعية لأنظمة المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية.

3-2. حل أنظمة المعادلات التفاضلية اللاخطية بطريقة بيكارد

سنعتمد ذات الخوارزمية التي استخدمناها في حل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية في البند 2.1، مع تقديم عدد من الأمثل التوضيحية.

يعطي نظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية بالصيغة [3]

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}, z_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,3,\dots \\ z_n &= z_0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}, z_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,3,\dots \end{aligned} \tag{21}$$

بالشروط الابتدائية $y(0) = y_0$ و $z(0) = z_0$، حيث f و g دوال غير خطية في المتغيرات y او z.

مثال (1.3): ان تطبيق صيغة بيكارد (20) لحل نظام المعادلات الآتي

$$\frac{dy}{dx} = \sin z, \qquad \frac{dz}{dx} = yz + z, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = 0$$

حيث

$$f(x,y,z) = \sin z\,, \qquad g(x,y,z) = yz + z, \qquad x_0 = 0\,, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 1$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin z_{n-1})ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} \left((y_{n-1})(z_{n-1}) + z_{n-1} \right) ds \qquad ,n = 1.2.3,\ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin z_{n-1})ds = 1 + \int_0^x (\sin 0)ds = 1$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (y_0 z_0 + z_0)ds = 1 + \int_0^x \big((1)(1) + (1) \big) ds$$

$$= 1 + \int_0^x 2\,ds = 1 + [2s]_0^x = 1 + 2x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\sin z_1)\,ds = 1 + \int_0^x \sin(1 + 2s)\,ds$$

$$= 1 + \int_0^x (\sin 1 \cos 2s + \sin 2s \cos 1)ds = 1 + \int_0^x (\sin 2s)ds$$

$$= 1 + \left[\frac{-1}{2} \cos 2s \right]_0^x = 1 + \left[\frac{-1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 0 \right]_0^x$$

$$= 1 + \left[\frac{-1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \right] = 1 + \frac{1}{2}[1 - \cos 2x]$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (y_1 z_1 + z_1)ds = 1 + \int_0^x \big((1)(1 + 2s) + (1 + 2s) \big) ds$$

$$= 1 + \int_0^x (2 + 4s)\,ds = 1 + [\,2s + 2s^2]_0^x = 1 + 2x + 2x^2$$

لذلك فان التقريب الثاني هو $\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}[1 - \cos 2x] \\ 1 + 2x + 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$، ويمثل الحل التقريبي عند أي x.

مثال (2.3): استخدم طريقة بيكارد لحل نظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 + z, \qquad \frac{dz}{dx} = \cos y\,, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = 1$$

حيث ان

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\,2{y_{n-1}}^2 + z_{n-1})ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,\cos y_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (2\,{y_0}^2 + z_0)ds = 0 + \int_0^x (\,2(0)^2 + 1)ds = \int_0^x 1\,ds = [s]_0^x = x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,\cos y_0)ds = 1 + \int_0^x \cos 0\,ds\; = 1 + \int_0^x 1\,ds = [s]_0^x = x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\,2{y_1}^2 + z_1)ds = 0 + \int_0^x (\,2s^2 + 1 + s)ds$$

$$= \int_0^x (\;1 + s + \;2s^2)ds = \left[s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3\right]_0^x = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,\cos y_1)ds = 1 + \int_0^x (\cos y_1)\,ds = 1 + [\sin s]_0^x = 1 + \sin s$$

$$= 1 + \sin s$$

مثال (3.3) :استخدم طريقة بيكارد لحل أنظمة المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = ze^y\mathrm{z}, \qquad \frac{dz}{dx} = y + z^2, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = \frac{1}{2}$$

حيث

$$y' = ze^y + z$$

$$z' = y + z^2 \qquad ,x_0 = 0\ ,y_0 = 0\ \ ,z_0 = \tfrac{1}{2}$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\,z_{n-1}e^{y_{n-1}} +)ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (y_{n-1} + {z_{n-1}}^2)ds, \qquad n = 1,2,3, \dots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (z_{n-1}e^{y_{n-1}} + z_{n-1})ds = 0 + \int_0^x (\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2})ds$$
$$= \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) ds = \int_0^x 1\, ds = [s]_0^x = x$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (y_0 + {z_0}^2)ds = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{2}\right)^2 ds = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{4} ds = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4}s\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (z_1 e^{y_1} + z_1)ds = 0 + \int_0^x \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s\right)e^s + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s\right)\right) ds$$
$$= \int_0^x (\frac{1}{2}e^s + \frac{1}{2}se^s + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s)ds$$
$$= \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}e^s\right) ds + \frac{1}{4}\int_0^x (se^s)ds$$
$$= \left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{2}e^s\right]_0^x + \frac{1}{4}\left[[se^s]_0^x - \int_o^x e^s ds\right]$$
$$= \left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{2}e^s\right] +_0^x \frac{1}{4}[[se^s]_0^x - [e^s]_0^x]$$
$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^0\right] + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^0$$
$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (y_1 + {z_1}^2)ds = \frac{1}{2} + \int_0^x (s + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}s\right)^2)ds$$
$$= \frac{1}{2} + \int_0^x (s + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^2)\, ds$$
$$= \frac{1}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}s + \frac{1}{16}s^2\right) ds = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4}s + \frac{5}{8}s^2 + \frac{1}{48}s^3\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3$$

مثال(4.3): استخدم طريقة بيكارد لحل نظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = -4z + 2yz, \qquad \frac{dz}{dx} = 4y^2 - z^2, \qquad y(1) = 2, \qquad z(1) = 1$$

حيث

$$f(x, y, z) = -4z + 2yz, \;\; g(x, y, z) = 4y^2 - z^2, \qquad x_0 = 1, \qquad y_0 = 2,$$
$$z_0 = 1$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_{0+} \int_{x_0}^{x} (-4z_{n-1} + 2y_{n-1}z_{n-1})ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} \left(4{y_{n-1}}^2 - {z_{n-1}}^2\right)ds, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (-4z_0 + 2y_{n-1}z_{n-1})ds = 2 + \int_1^x \big(-4(1) + 2(2)(1)\big)ds$$
$$= 2 + \int_1^x 0\, ds = 2$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \left(4{y_0}^2 - {z_0}^2\right)ds = 1 + \int_1^x (4(2)^2 - (1)^2)ds = 1 + \int_1^x 15\, ds$$
$$= 1 + [15s]_1^x z_1 = 1 + 15x - 15 = -14 + 15x$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (-4z_1 + 2y_1z_1)ds$$
$$= 1 + \int_1^x (-4(-14 + 15s) + 2(2)(-14 + 15s))ds = 2$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,4{y_1}^2 - {z_0}^2)ds = 1 + \int_1^x (4\,(2)^2 - (\,-14 + 15s)^2)ds$$

$$= 1 + \int_1^x \big(\,16 - (126 - 120s + \,225^2)\big)ds$$

$$= 1 + \int_1^x (-110 + 120s + \,225s^2)ds$$

$$= 1 + \left[-110s + \frac{120}{2}s^2 - \frac{225}{3}s^3\right]_1^x$$

$$= 1 + [-110x + 60x^2 - 75x^3] - [-110 + 60 - 75]$$

$$= 126 - 110x + 60x^2 - 75x^3$$

مثال (5.3): استخدم طريقة بيكارد لحل نظام المعادلات

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{2}z^2, \qquad \frac{dz}{dx} = yz, \qquad y(0) = 1, \qquad z(0) = 1$$

حيث ان

$$y' = x - \frac{1}{2}z^2, \qquad z' = yz, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad z_0 = 1$$

التقريب النوني لمسالة القيمة الابتدائية

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left(s - \frac{1}{2}{z_{n-1}}^2\right)ds$$

$$z_n = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,y_{n-1}z_{n-1})ds\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

التقريب الأول عندما $n = 1$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (\,s - \frac{1}{2}z_0)\,ds = 1 + \int_0^x \left(\,s - \frac{1}{2}(1)\right)ds = 1 + \left[\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s\right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (\,y_0z_0)ds \;= 1 + \int_0^x \big(\,(1)(1)\big)ds = 1 + [s]_0^x = 1 + x$$

التقريب الثاني عندما $n = 2$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} (s - \frac{1}{2}z_1{}^2)ds = 1 + \int_0^x \left(s - \frac{1}{2}(1+s)^2\right)ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(s - \frac{1}{2} - s - \frac{1}{2}s^2\right)ds = 1 + \int_0^x \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s^2\right)ds$$

$$= 1 + \left[-\frac{1}{2}s - \frac{1}{6}s^3\right]_0^x$$

$$\therefore y_2 = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}x^3$$

$$z_2 = z_0 + \int_{x_0}^{x} (y_1 z_1)ds = 1 + \int_0^x \left(\left(1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)(1+s)\right)ds$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^3\right)ds = 1 + \left[s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{8}s^4\right]_0^x$$

$$\therefore z_2 = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4$$

قائمة المصادر

المصـــادر

[1] القران الكريم – سورة البقرة –الآيــة 32

[2] صبح، محمد - التحليل العددي- منشورات جامعة دمشق- كلية العلوم 2021 م

[3] العويضي، حسن مصطفى وعباس، عبد الوهاب، رجب وعلي، سناء، زارع -المعادلات التفاضلية الجزء الثاني -مكتبة الرشد -الرياض -المملكة العربية السعودية 2005 م

[4] فهمي، عبد الشافي، عبادة والعويضي، حسن مصطفى وأبو الفتوح، عفاف، صالح – المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها –دار الفكر العربي – 2010 م.

Abstract

Mathematics offers two approaches to solving problems in all areas of analytical mathematics: analytical and numerical solutions. Numerical methods in mathematics are considered a mathematical alternative to exact and analytical solutions for topics, concepts, and dynamic models for which analytical solutions are difficult to achieve. Researchers in dynamic systems and differential equations have proposed several important methods, whose methods and results vary between numerical and symbolic. Picard's method is considered one of the important symbolic methods for finding successive approximate solutions to ordinary differential equations and their systems. In this research, we present Picard's method for solving systems of linear and nonlinear ordinary differential equations. The research includes three chapters. The first chapter introduces some basic concepts about systems of ordinary differential equations and their types, as well as a study of Picard's method for solving a single ordinary differential equation. While the second chapter studies Picard's method for solving systems of linear ordinary equations, the third chapter presents solutions to systems of nonlinear ordinary differential equations using Picard's method. The research concludes that Picard's method can be applied to systems of ordinary differential equations and can yield symbolic solutions at any point in the domain of the studied systems.

Republic of Iraq

Ministry of Higher Education

and Scientific Research

Misan University

College of Education- Department of Mathematics

Picard's Method for Solving Systems of Ordinary Differential Equations

Research
submitted to the Department of Mathematics, College of Education, University of Misan, as part in partial fulfillment of the requirements for completion of the Bachelor's degree in Mathematics

By Student's

Maryam Talib Awfi

Supervised by

Dr. Ali Sami Al-Sudani

1446 AH **2025 AD**