جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان – كلية التربية – قسم الرياضيات

الدراسات المسائية

Sequences and series

بحث مقدم الى كلية التربية في جامعة ميسان قسم الرياضيات كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس

من قبل الطالب

محمد زيدون قاسم

بأشراف

أ.م.د.محمد جبار حواس

٢٠٢٣ـ ٢٠٢٤ م

بسم الله الرحمن الرحيم

(ولقد اتينا داوود وسليمان علما وقالا الحمد

لله الذي فضلنا على كثير من عباده المؤمنين)

صدق الله العلي العظيم

سورة النمل الآية (١٥)

الأهداء ،،،

وصلت رحلتي الجامعية الى نهايتها بعد تعب ومشقة وها انا اختم بحث تخرجي بكل همة ونشاط وامتن لكل من كان له فضل في مسيرتي وساعدني ولو باليسير الأبوين ، والأهل والأصدقاء ، والأساتذة المبجلين اهديكم بحث تخرجي ......

كلمة شكر وتقدير ،،،

بعد شكري الله عز وجل ان اعانني على انجاز هذا البحث المتواضع اتقدم بجزيل الشكر و الامتنان الى الأستاذ الفاضل (محمد جبار حواس) على تفضله بقبول الاشراف على بحثي هذا وعلى ما اسداه لي من نصائح وارشادات كانت بمثابة النبراس المنير في كل خطواتي ولا يفوتني لهذه المناسبة ان اوجه شكري واحترامي الى كل من ساعدني من قريب او بعيد في انجاز هذا الجهد المتواضع ...

خلاصة البحث ،،،

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

تناولت في بحثي هذا موضوعي المتتابعات والمتسلسلات وتناولت في الفصل الاول اولا تعريف المتتابعات الحسابية وفوائدها الاساسية وبعض الامثلة والملاحظات وتم ذكر قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية وكذلك تعريف التقارب للمتتابعات وبعض الرسوم التوضيحية والملاحظات ثم تطرقنا لحل بعض الامثلة . ثانيا تم تعريف المتسلسلة وهي مجموع للمتتابعة الحسابية وايضا درسنا تقارب المتسلسلات وتم ذكر بعض الامثلة والملاحظات عن الموضوع وتم ذكر خواص المتسلسلات بالتفصيل. فيما يخص الفصل الثاني تم ذكر بعض انواع المتسلسلات وهما متسلسلة تايلور وماكلورين ...

المحتويات

الفصل الأول

1-المتتابعات و المتسلسلات:

1.1- المتتابعة الحسابية:

تعتبر المتتابعة الحسابية الى جانب استخداماتها الواسعة في مختلف العلوم من اهم الادوات لدراسة الفوائد والقيم الزمنية للنقود واستهلاكات الاصول الثابتة. وخاصة المواضيع المتعلقة بالاستثمارات قصيرة الاجل التي لا تتجاوز السنة الواحدة.

د.ماجدة مصطفى البكور،الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

1.2- تعريف المتتابعة الحسابية:

نقول عن متتابعة اعداد انها متتابعة حسابية اذا نتج كل حد من حدودها باضافة عدد ثابت موجب او سالب للحد الذي يسبقه.ويطلق على هذا العدد الثابت بالاساس اساس المتتابعة

د.ماجدة مصطفى البكور،الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

امثلة:

ان الاعداد 28 23 18 13 8 3 هي متتابعة حسابية. نجد ان كل حد فيها ينتج عند اضافة العدد 5 الى الحد الذي يسبقه. ونجد ان الحد الاول لهذه المتتابعة الحسابية هو 3 وان حدها الاخير هو 28 واساسها هو العدد 5 .

ملاحظة/ نقول عن متتابعة a_n انها متزايده اومتناقصة اذا كان :

i. $a_n \geq a_n - 1$ ، $a_n \leq a_n - 1$ من اجل كل $n \in N$

د.ماجدة مصطفى البكور،الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

ii. ان المتتابعة ....,6,4,2,0,-2 هي متتابعة حسابية حدها الاول (6) واساسها (-2) وهي المتناقصة لان اساسها سالب وتحقق الشرط ، وهي محدودة من اليسار وغير منتهية من اليمين

ملاحظة/ نقول عن متتابعة انها محدودة من الاعلى (من اليسار)

اذا وجد ثابت M بحيث

iii. ان المتتابعة ...,3,7,11,15 هي متتابعة حسابية محدودة من اليمين وغير محدودة من اليسار، واساسها (4) وهي متزايدة لان اساسها موجب وتحقق الشرط

ملاحظة/ نقول عن متتابعة انها محدودة من الادنى (من اليمين) اذا وجد ثابت M بحيث $M \in R$

ويحقق:

$$a_n \geq M \,, \forall\, n \in N$$

iv. ان المتتابعة $\ldots, -7, -4, -1, 1, 4, 7, \ldots$ هي متتابعة حسابية غير محدودة من اليمين وغير محدودة من اليسار وهي متزايدة واساسها (3)

ملاحظة/ نقول عن متتابعة انها محدودة اذا وفقط اذا كانت محدودة في آن واحد من الاعلى ومن الادنى

1.3 قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية Law boundary General

من تعريف المتتالية الحسابية نجد أن الحد الثاني ينتج عن إضافة عدد ثابت)أساس(إلى الحد ألول، والحد الثالث ينتج عن إضافة ألساس إلى الحد الثاني وهكذا .... فإذا فرضنا أنه لدينا متتالية حسابية مؤلفة من(n) حد كما يلي: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$حيث رمزنا ب a_1 للحد الاول و a_2للحد الثاني ... و a_n للحد الاخير.

ذا رمزنا

واذا رمزنا بـa لقيمة الحد الاول ورمزنا للأساس بالرمز d نجد أن:

الحد الاول يساوي $a_1 = \text{a}$ والحد الثاني يساوي $a_2 = a + d$

والحد الثالث يساوي $a_3 = a_2 + d = a + d + d = a + 2d$

والحد الرابع يساوي $a_4 = a_3 + d = a + 2d + d = a + 3d$

و هكذا نجد بسهولة أن

إذا الحد ذو الترتيب (n) هو:

$$a_n = a + (n-1)d \dots . (1.1); n > 1 \, , a, d \in R$$

وهو قانون الحد العام أو الحد النوني للمتتابعة الحسابية. من الواضح أن العلاقة السابقة تحتوي على أربعة عناصر هي:an, a, d, n فإذا تمت معرفة ثالثة منها يمكن حساب العنصر الرابع .

مثال (1.1) : متتالية حسابية حدها الاول (20) و أساسها (-5) أوجد قيمة الحد العاشر و قيمة الحد الخامس و الستين .

الحل :

إيجاد قيمة الحد العاشر :ان $n = 10 , d = -5 , a = 20$ و بتطبيق قانون الحد العام نجد :

$$a_n = \mathrm{a} + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{d} = 20 + (10 - 1)(-5) = 20 - 45 = -25$$

المطلب الثاني إيجاد الحد الخامس و الستين :

إن $n = 65 , d = -5 , a = 20$ وبتطبيق قانون الحد العام نجد

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow a_{65} = 20 + (65 - 1)(-5) = 20 - 320 = -300$$

مثال (1.2): أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية التالية: 7,9,11,13, … ,81

الحل :

نجد أن حدها الاول $a = 7$ و أساسها $d = 2$ والحد الاخير $a_n = 81$

$$n = \frac{a_n - \mathrm{a} + \mathrm{d}}{\mathrm{d}} = \frac{81 - 7 + 2}{2} = \frac{76}{2} = 38$$

د. ماجدة مصطفى البكور، الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

مثال (1.3) : اوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الرابع ضعف الثاني وحدها السادس هو 42 ؟

الحل/ $a_4 = a + (4-1)d = a + 3d\ ,\ a_2 = a + (2-1)d = a + d$

ولكن من نص المسألة لدينا $a_4 = 2a_2$

بالتعويض نجد :

$$\mathrm{a + 3d = 2(a + d) \rightarrow a + 3d = 2a + 2d \rightarrow a - b = 0 \rightarrow a = b}$$

اي ان قيمة اساس المتتابعة (d) يساوي قيمة حدها الاول (a) . هذا ومن علاقة الحد السادس نجد :

$$a_6 = a + (6-1)d \rightarrow 42 = a + 5d$$

$$42 = a + 5a \rightarrow 6a = 42 \rightarrow a = 7 \rightarrow d = 7$$

*المتتابعة الحسابية هي ... ,7,14,21,28,35,42

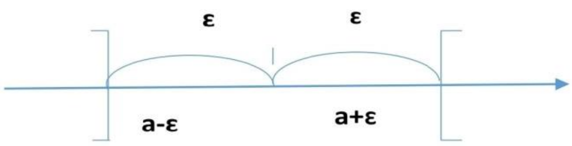
1.4التقارب Convergence

لدينا المجال]a,b [، إذا كان a,b ϵR و a <b وكان a<x<b , x∈R ان طول المجال هو b-a

ونصف قطره هو $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

ومركزه هو $\frac{b-a}{2}$

د. ماجدة مصطفى البكور، الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة ٢٠١٩،



نقول ان المتتابعة ، $\{a_n\}_{n\geq 0}$ متقاربة من عدد $a\in R$ اذا كان مجموع حدودها بأستثناء عدد منتهي منها متقارب من a بحيث a هو مركز المجال الذي نصف قطره ε ومعطى بالعلاقة] ε -a ,
$\varepsilon > 0$ [a+ ε

$$\frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{a+\varepsilon-(a-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon} = \varepsilon$$

وعندما نكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

ندعو العددa نهاية المتتابعة

بمعنى اخر : نقول ان المتتابعة {an} انها متقاربة من العدد a اذا وفقط اذا تحقق الشرط.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N{:}\, n \geq n_0{:}\, |a_n - a| < \varepsilon$$

د.ماجدة مصطفى البكور،الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

مثال (1.4): اثبت بالاعتماد على تعريف تقارب المتتابعات ان المتتابعة {an} التي يعطى حدها العام بالعلاقة $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة من العدد (0) عندما n⟶∞ اي

ان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

الحل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N; n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ اذن $n \geq n_0$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

د. ماجدة مصطفى البكور، الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

مثال(1.5) : ليكن لدينا المتتابعة {an} الذي يعطى حدها العام بالعلاقة

$$a_n = \sqrt[n]{x}\ , x > 1$$

اثبت بالاعتماد على تعريف تقارب المتتابعات ان $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

الحل:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N; n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$|\sqrt[n]{x} - 1| < \varepsilon \to \left|x^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon \to x^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \to x^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + 1 \to \log_x x^{\frac{1}{n}} < \log_x(\varepsilon + 1) \to \frac{1}{n} < \log_x(\varepsilon + 1) \to n > \frac{1}{\log_x(\varepsilon + 1)}$$

$$\therefore n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon$$

د. ماجدة مصطفى البكور، الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة، ٢٠١٩

مثال(1.6): برهن ان نهاية المتتابعة $\{\frac{-2n+1}{n+1}\}$ متقاربة من العدد (2-) عندما n⟶∞؟

الحل :

ليكن $0 < \varepsilon$ عددا حقيقيا معطى ولنطبق شرط التقارب

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N : n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$|x_n - a| = \left|\frac{-2n+1}{n+1} - (-2)\right| = \left|\frac{-2n+1+2n+2}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$$

نفرض m عدد طبيعي يحقق المتراجحة $\varepsilon > \frac{3}{n+1} \leftarrow$

$$3 < \varepsilon\,(m+1) \to m > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

نجد بسهولة من اجل اي عدد طبيعي $n > m > \frac{3}{\varepsilon} - 1$

يعتبر حلا لهذه المسألة فمن اجل $\varepsilon = \frac{1}{100}$ نجد $n > m > \frac{3}{\frac{1}{100}} - 1 = 299$

اذن جميع الحدود التي تلي 299 تقع ضمن المجال المفتوح الذي مركزه (-2) ونصف قطره

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -2 \leftarrow \varepsilon = \frac{1}{100}$$

1.5- المتسلسلات (series) :

اذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة عددية غير منتهية فأننا ندعو المجموع اللانهائي :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

متسلسلة عددية حقيقية غير منتهية حدودها $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

ندعو a_n بالحد العام لهذه المتسلسلة.

وندعو المتتابعة $\{s_n\}$ حيث ان :

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

بمتتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

قد نرمز لحد المتتابعة الاول ب a_0 عندئذ تكون المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

وتكون $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2010_2011 م

1.6- تعريف Definition

نقول عن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ انها متقاربة ومجموعها s اذا وفقط اذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{s_n\}$ متقاربة من s عندئذ نكتب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

واذا كانت $\{s_n\}$ متباعدة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2010_2011 م

امثلة :

1- المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ متباعدة لان متتابعة مجاميعها الجزئية :

$s_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ متباعدة (تسعى نحو اللانهاية)

2- المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ متقاربة لان متتابعة مجاميعها الجزئية :

$$s_n = \frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(2)(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$s_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$$

$$s_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$$

متقاربة ونهايتها هي $\frac{3}{4}$ اذا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2011_2010 م

3- المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ متباعدة لان متتابعة مجاميعها الجزئية :

$$s_1=+1\,,\ s_2=0\,,\ s_3=+1,\dots,s_{2n}=0\,,\ s_{2n+1}=1$$

هي متتابعة متباعدة وليس لها نهاية .

مثال (1.7):

ادرس تقارب المتسلسلة العددية الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}a\,.\,q^n$ نلاحظ ان حدها العام هي المتتابعة $\{a\,.\,q^n\}$ وحدها الاول هو $a\ \neq 0$ واساسها q من R

الحل :

لإيجاد متتابعة مجاميعها الجزئية $\{s_n\}$

$$s_n = a + a \, . \, q + a \, . \, q^2 + \cdots + a \, . \, q^{n-1}$$

ومنه فأن :

$$q \, . \, s_n = a \, . \, q + a \, . \, q^2 + \cdots + a \, . \, q^{n-1} + a \, . \, q^n$$

وبطرح المساويتين الأخيرتين طرفا لطرف نجد :

$$(1-q) \, . \, s_n = a - a \, . \, q^n = a \, (1-q^n)$$

ومنه فأن $s_n = \frac{(1-q^n)}{1-q}$ حيث $(q \neq 1)$ عندئذ :

أ- اذا كانت $|q| < 1$ فأن $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وبالتالي فأن $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{1-q}$

والمتسلسلة الهندسية متقاربة ومجموعها $s = \frac{a}{1-q}$

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2011_2010 م

ب- اذا كانت $|q| > 1$ فان $|q^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ وبالتالي فان $\{s_n\}$ متباعدة وبالتالي المتسلسلة الهندسية متباعدة

ت- اذا كانت $q = 1$ فان $s_n = a + a + a + \cdots + a = n \,.\, a \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

والمتسلسلة متباعدة

ث- $q = -1$ فان $s_1 = a \,, s_2 = 0 \,, s_3 = a \ldots, s_{2n} = 0 \,, s_{2n+1} = a$

والمتتابعة $\{s_n\}$ متباعدة وبالتالي المتسلسلة متباعدة

1.7- خواص المتسلسلات المتقاربة :

أ- مبرهنة : اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فان حدها العام a_n يسعى الى الصفر عندما تسعى n نحو اللانهاية ، اي ان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ملاحظة /

ان شرط المبرهنة لازم وغير كاف فقد يسعى الحد العام للمتسلسلة نحو الصفر دون ان تكون هذه المتسلسلة متقاربة ، كالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ والتي تدعى بالمتسلسلة المتجانسة ، حدها العام يسعى نحو الصفر في حين انها متباعدة (كما سنرى لاحقا) ، ولكن يمكننا ان نحصل على النتيجة الهامة التالية .

نتيجة :

اذا لم يسعى الحد العام لمتسلسلة ما نحو الصفر فهي متباعدة

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2010_2011 م

مثال :

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$ متباعدة لان $a_n=\frac{2n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}2\neq 0$

ب- ان حذف عدد منته من الحدود الاولى لمتسلسلة عددية لا يؤثر في نوعها من حيث تقاربها او تباعدها ، كما ان اضافة عدد منته من الحدود الجبرية الى مقدمة المتسلسلة لا يؤثر ايضا في تقاربها او تباعدها

ت- مبرهنة :

اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة ومجموعها s ، وكانت α عدد من R فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\,.\,a_n$ متقاربة ومجموعها α . s (يمكننا عندئذ كتابة $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\,.\,a_n=\alpha.\sum_{n=1}^{\infty}a_n$) وبالتالي اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\,.\,a_n$ متباعدة بشرط $\alpha\neq 0$

ث- اذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربتين بحيث $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b$ فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ متقاربة و مجموعها $a+b$، و كذلك المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_n)$ متقاربة و مجموعها $a-b$ ، اي ان في حال التقارب يمكننا ان نكتب $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ و بالتالي اذا كانت احداهما متباعدة و الاخرى متقاربة فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ متباعدة حتما ، اما اذا كانت كل من المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة فأن $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ قد تكون متباعدة وقد تكون متقاربة

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2011_2010

مثال :

المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$ متقاربتان و بالتالي فأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left((\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n\right)$ متقاربة و مجموعها .

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n=\frac{1/2}{1-1/2}+\frac{1/3}{1-1/3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

- المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة و المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة و بالتالي فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n})$ متباعدة .
- المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n})$ متباعدة اما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ فهي متقاربة

ج- اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة فان تقاربها ومجموعها لا يتأثران اذا قمنا بأي تجميع لحدود هذه المتسلسلة بواسطة الأقواس شريطة ان نحافظ على ترتيب الحدود نفسه ، الا ان حذف الأقواس في متسلسلة لا يعتبر قانونيا في الحالة العامة :

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

فأننا نحصل على المتسلسلة المتباعدة :

د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2011_2010

الفصل الثانى

2- متسلسلتا تايلور و ماكلورين :

اذا كان للدالة f مشتقات متصلة من الرتبة n في الفترة التي تحتوي على a . فأنه يمكن كتابة مفكوك $f(x)$ على الصورة التالية :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

الصورة اعلاه تعرف بمفكوك تايلور للدالة f حول $x = a$ و R_n يسمى الباقي (Remainder)

وفيما يلي سنقدم نظرية تايلور حيث يكون الباقي R_n على الصورة التفاضلية .

2-1-نظرية تايلور(Taylor's Theorem)

اذا كانت الدوال $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ كلها متصلة في الفترة التي تحتوي على x, a فأنه يوجد عدد c بين x, a حيث ان :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

والباقي يعطى على الصورة التالية :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

مثال(2.1):

اوجد متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = e^{-x}$ حول $x = 1$ ؟

<u>الحل:</u>

$f(x) = e^{-x}$ $\qquad$ $f(1) = e^{-1}$

$f'(x) = -e^{-x}$ $\qquad$ $f'(1) = -e^{-1}$

$f''(x) = e^{-x}$ $\qquad$ $f''(1) = e^{-1}$

$$e^{-x} = e^{-1} - (e^{-1})(x-1) + e^{-1}\frac{(x-1)^2}{2!} - e^{-1}\frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots$$

الرياضيات الهندسية ،انتوني كروفت ، روبرت دافيسون ، مارتن هارجريفز ، جيمس فلينت

$$= e^{-1}\left\{1-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{(x-1)^3}{3!}+\cdots\right\}$$

$$e^{-x}=e^{-1}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n!}$$

الرياضيات الهندسية ،انتوني كروفت ، روبرت دافيسون ، مارتن هارجريفز ، جيمس فلينت

2-2متسلسلة ماكلورين (Maclaurin Series):

تعتبر متسلسلة ماكلورين حالة خاصة من متسلسلة تايلور عند $a=0$ نحصل على الصورة التالية:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

التفاضل والتكامل، د. رمضان محمد جهيمة، د. احمد عبد العالي هب الريح

مثال(2.2):

اوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=e^x$

الحل:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\therefore\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

الرياضيات الهندسية ،انتوني كروفت ، روبرت دافيسون ، مارتن هارجريفز ، جيمس فلينت

المصادر

١. د. ماجدة مصطفى البكور، الرياضيات (٢)،جامعة الشام كلية الهندسة ،٢٠١٩

٢. د. يوسف الوادي ، د. جمال مللي ، خولة حيدر ، الرياضيات (2) ، جامعة دمشق (كلية العلوم) ، 2010_2011

٣. التفاضل والتكامل، د. رمضان محمد جهيمة، د. احمد عبد العالي هب الريح

٤. الرياضيات الهندسية ،انتوني كروفت ، روبرت دافيسون ، مارتن هارجريفز ، جيمس فلينت