جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان

كلية التربية

قسم الرياضيات

عنوان البحث

(الطريقة الهنغارية وتطبيقاتها في البرمجة الخطية)

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية /جامعة ميسان

وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريس في الرياضيات

تقدم بها

(محمد جاسم حمودي)

(محمد صادق زيارة)

بأشراف

م.د سامي حطاب جاسم

٢٠٢٥ م

١٤٤٦ هـ

بسم الله الرحمن الرحيم

{ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ}

صدق الله العلي العظيم

سورة الزمر : الآية (٧)

الشكر والتقدير

الحمد لله الذي وفقني لإتمام هذا البحث، وأسبغ عليَّ نعمه ظاهرةً وباطنة.

أتقدم بجزيل الشكر والعرفان إلى أساتذتي في قسم الرياضيات كلية التربية – جامعة ميسان، الذين لم يدخروا جهدًا في توجيهي وتصحيحي، فكانوا لي نعم الدليل في هذه الرحلة العلمية.

كما لا يفوتني أن أتقدم بخالص الشكر إلى مشرف البحث الدكتور سامي حطاب الذي كان لي خير مرشد، وقدم لي ملاحظاته القيمة التي ساهمت في إثراء هذا العمل.

وأخيرًا، كل الامتنان لعائلتي العزيزة على دعمهم المستمر، وتضحياتهم التي لا تُحصى، والتي لولاها لما تمكنت من الوصول إلى هذه المرحلة.

جزيل الشكر والتقدير لكل من ساهم في إنجاز هذا العمل

الإهداء

الى معلم البشرية وهادي الأمة النبي محمد صلى الله عليه واله

الى باب مدينة العلم القران الناطق وأسد الله الغالب الإمام علي عليه السلام

الى أمل المستضعفين ونور المستقبل الإمام مهدي عجل الله فرجه الشريف

الى مصابيح الدجى والعروة الوثقى آئمة الهدى عليهم السلام

إلى الذي زين أسمي بأجمل الألقاب، من دعمني بلا حدود وأعطاني بلا مقابل إلى من علمني أن الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة، الى من غرس في روحي مكارم الأخلاق داعمي الأول في مسيرتي

ملاذي بعد الله...

إلى فخري واعتزازي (والدي)

إلى من جعل الله الجنة تحت أقدامها واحتضنني قلبها قبل يدها وسهلت لي الشدائد بدعائها إلى القلب الحنون والشمعة التي كانت لي في الليالي المظلمات

سر قوتي ونجاحي ومصباح دربي الى وهج حياتي (والدتي)

واخيراً الشكر موصل لنفسي على الصبر والتي كانت اهلاً للمصاعب ها انا اختم كل ما مررت به الحمد لله من قبل ومن بعد راجياً من الله تعالى ان ينفعني بما علمني وان يعلمني ما أجهل ويجعله حجة لي لا علي...

الفهرست

العنوان	المحتويات	الصفحة
	المقدمة	١
الفصل الاول (بحوث العمليات)	١،١بحوث العمليات	٣
	٢،١ أهمية بحوث العمليات	٥
	٣،١ مجالات استخدام بحوث العمليات	٦
الفصل الثاني (البرمجة الخطية)	١،٢ البرمجة الخطية	٩
	٢،٢ بداية البرمجة الخطية	٩
	٣،٢ تتطور البرمجة الخطية	٩
	٤،٢ أهمية البرمجة الخطية	١٠
	٥،٢ الدالة الخطية	١٠
	٦،٢ مسألة البرمجة الخطية	١٢
	٧،٢ مسائل يمكن حلها بأستخدام البرمجة الخطية	١٣
	٨،٢ صياغة مسائل البرمجة الخطية	١٤
	١،٨،٢ متغيرات القرار	١٥
	٢،٨،٢ دالة الهدف	١٥
	٣،٨،٢ القيود	١٦
	٤،٨،٢ الصيغة النهائية	١٧
الفصل الثالث (نموذج التخصيص)	١،٣ نموذج التخصيص	١٩
	١،١،٣ صياغة النموذج الخطي لها	١٩
	٢،٣ طرق حل مشاكل التخصيص	٢١
	١،٢،٣ طريقة التوافيق	٢١
	٢،٢،٣ الطريقة الهنغارية	٢٢
	المصادر	٢٦

المقدمة

تُعد بحوث العمليات من المجالات الحيوية التي ساهمت بشكل كبير في تطوير آليات اتخاذ القرار في مختلف القطاعات الإنتاجية والخدمية. فقد ظهرت هذه الأداة العلمية نتيجة للحاجة إلى استخدام أساليب تحليلية ورياضية تساعد في حل المشكلات المعقدة وتحقيق الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة. وتمثل بحوث العمليات تطبيقاً للطرق الرياضية والمنطقية في تحليل النظم، وتقديم حلول دقيقة تساعد متخذي القرار على اختيار البدائل المثلى.

يتناول هذا البحث في فصله الأول نظرة شاملة حول بحوث العمليات، من حيث تعريفها، وتسميتها، ومجالات استخدامها، بالإضافة إلى إبراز أهميتها في الواقع العملي. أما الفصل الثاني، فقد خصص لدراسة البرمجة الخطية، والتي تُعد من أهم نماذج بحوث العمليات، حيث تضمن هذا الفصل تعريف البرمجة الخطية، ونشأتها، وتطورها، وأهميتها، إلى جانب عرض للمواقف التي تُستخدم فيها، وصياغة المسائل المتعلقة بها، مع التطرق إلى مكوناتها الأساسية مثل المتغيرات القرار، ودالة الهدف، والقيود.

اما الفصل الثالث فقد تركز على نموذج التخصيص، أحد النماذج المهمة في البرمجة الخطبة، حيث تم الحديث عن شروط استخدام هذا النموذج، وكيفية صياغته خطيًا،

إضافة إلى عرض أبرز الطرائق المستخدمة في حله، مثل طريقة التوافيق والطريقة الهنغارية، مع توضيح آلية تطبيق كل منها .

الفصل الأول

١،١ بحوث العمليات

لا يوجد تعريف واحد شافي لبحوث العمليات ، حيث اختلفت تعاريفها بين روادها فهناك من يعرفها بأنها " طريقه علمية لامداد الادارة التنفيذية باساس كمي للقرارات الخاصه بالعمليات تحت رقابتهم" وهو التعريف الذي اعطاه كل من G.KIMBALL ,P.MORSE لبحوث العمليات

او انها " استخدام الطرق العلمية والاساليب والادوات لحل المشاكل التي تحتوي على عمليات النظم الامداد المديرين بالحلول المثلى للمشاكل " وهو التعريف الذي قدمه كل من G.CHORCHMAN, R.ACKOFF

او هي "نظريه القرارات التطبيقية واستخدام الطرق العلمية والرياضية في حل المشاكل التي تواجه المنفذين " وهو التعريف الذي اعطاه M.STARR, M.MILLERاو انها "استخدام المنهج العلمي لحل مشاكل للمديرين التنفذيين " كما يعرفها H.WANGER وهي تعاريف تكاد تشترك في بعض المصطلحات الاساسية ، ولعل اهم المصطلحات التي شملتها هذه التعاريف ، الطريقة العلمية ، الاساليب والادوات - ويقصد بها الأساليب الرياضية والاحصائية - ، مشاكل المديرية ، القرارات ، الحلول المثلى ، وهي مصطلحات تنم عن فهم كل باحث لبحوث العمليات،

غير اننا نرى ان بحوث العمليات تطورت لتاخذ مفهوم اوسع ، لدرجه ان هناك من يخفي صفه العلمية عليها لتطورها المستمر واستخدامها لاساليب البحث العلمي فيقول " ان علم بحوث العمليات هو عبارة عن مجموعة من الطرق والوسائل التي تساعد في عمليه اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الافضل للموارد البشرية المتاحة "وهو التعريف الذي يدل به د.موفق محمد الكبيسي في كتابه المشار اليه في قائمه المراجع ، وهو تعريف مشابه للتعريف الذي يقومه د. محمد محمد كعبور في الكتاب المشار اليه ايضا في قائمة المراجع .

ومن جهتي فان التعريف الذي اكاد استقر عليه والذي تبلور لدي على امتداد فتره تدريسي لهذا المقياس هو ان " بحوث العمليات في مجموعه الطرق والأساليب العلمية المساعدة لاتخاذ قرارات التسييرالعلمي الامثلي في الادارة، وهي تعتمد على القياس الكمي بمساعده الاساليب الاحصائية والرياضية ، جوهر ما تتناوله هو البحث عن المثلية تسيير الموارد المادية والبشرية في مختلف الموؤسسات في ظل ظروف كمية محدده".

وقد سميت ببحوث العمليات لكون اول البحوث وتطبيقاتها في هذا المجال وكانت على العمليات الحربية . ورغم ان ميلاد طرق بحوث العمليات كان في سنه ١٩٣٦ في بريطانيا ، الا ان نشوءها الحقيقي كان خلال فتره الحرب العالمية الثانية عندما دعت الادارة العسكرية الانجليزية فريقا من العلماء من جامعه مانشيستر برئاسة الاستاذ PMSBLACKETT لدراسه المشاكل التقنية والاستيرا تيجية المتعلقة بالدفاعين الجوي والارضي لبريطانيا ،

ان كان هدف الفريق هو الاستخدام الامثل للموارد العربية المحدودة ، وقد ادى ذلك الى نتائج جيده على مستوى تحسين منظومة الرادار والدفاع المدني، وهو ما ادى بأدارة الحرب

الاميريكية الى أجراء دراسات مماثله بمبادرة من كل من B.James رئيس لجنه بحوث الدفاع B.ANNEVAR رئيس لجنة الاسلحة والمعدات الجديد وذلك لكونهما شاهدا استخدام هذا الاسلوب في بريطانيا اثناء اقامتهم بها خلال فتره الحرب العالمية الثانية .

بعد اكتوبر ١٩٤٢ شكلت القوات الجوية الثانية المرابطة في بريطانيا اول فريق لتحليل العمليات الحربية ، تلاها السلاح البحري الامريكي الذي شكل فريقين احدهما في مصنع المعدات البحرية وترأسه J.ELLISA والثاني في الاسطول العاشر وترأسه M.PHILIP وقد واصل القادة العسكريون الاهتمام بهذا الحلم من خلال وكاله بحوث العمليات والتي تحولت فيما بعد الى موسسه بحوث العمليات ونظرا للنجاح الذي لقيه هذا الاسلوب في ادارة العمليات العربية فقد تم نقله للأداره المدينة وبخاصة الى ادارة الاعمال و المشاريع الاقتصادية وقد قام في بريطانيا فريق من الباحثين بتاسيس نادي بحوث العمليات سنة ١٩٤٨ والذي حول الى جمعيه بحوث العمليات للمملكة المتحده والتي اصدرت اول مجله علميه ربع سنوية لها سنة ١٩٥٠ .

كما تم تأسيس جمعيه بحوث العمليات الأمريكية ومعهد الادارة العلمية سنه ١٩٥٠ في الولايات المتحده وقد اصدرت الجمعية اول مجله لها في مجله "بحوث العمليات" سنة ١٩٥٢ كما اصدر المعهد ايضا " مجله الاداره العلمية" سنة ١٩٥٣ وهذا ما ساعد على شق الطريق لتنميه هذا الاسلوب واستخداماته في مختلف مجالات التسيير ومجالات اتخاد القرارات وعلى المستوى الفردي وفي الجانب المدني ساهم الكثير من الرواد في بعث بحوث العمليات ، فقد ظهرت بعض اساليبها تحت عنوان الادارة العلمية بمساهمه العديد من رواد هذه الاداره حيث ساهم كل منهم في اظهار فكره من الافكار المستخدمة في التيسير الامثلي ،

وعلى سبيل المثال قام كل من

فريديريك طاويلور F.W.TAYLOR وهنري فايول H. FAYOL و جيلبيرت GILBERT والتون مايو A.MAYO باستخدام الطرق العلمية فى الانتاج وتطبيق مبدا التخصص و ظهور الدراسات العامة بالوقت والحركة ، و من الرواد ايضا GANTT(١٩٦٦-١٩١٩) ، حيث استخدم الرسومات البيانية لتوضيح الاعمال المختلفة للمشروع واظهار الوقت اللازم،

حيث تطورت افكاره بظهور اسلوب تقويم البرامج ومراجعه التقنيات المعروف باسلوب بيرت PERT ، كما قام المهندس الدانماركي ار لنج A.K.ERLAN سنه ١٩٠٧ والذي كان موظفا بشركة كوبنهاجن للهاتف ، بدراسة مشكله الازدحام على الخطوط الهاتفية لتتطور افكاره بإدخال الاساليب الرياضية في ابداع نظريه طوبير الانتظار و المنسوبة الى ماركون ، كما ظهرت المحاولة الاولى لصياغه نظرية المباريات في صوره رياضيه عن طريق اميل بوريل E. BOREL سنه ١٩٢١ والتي طورها فيما بعد نيومان J.V.NEWMAN سنه ١٩٢٨ والى ذلك ايظا قام العالم الامريكي جورج دونتزيخ G.PANTIZIG سنه ١٩٤٩ بتطوير طريقه لحل مشاكل التعظيم والتدنئة باسلوب جديد هو اسلوب البرمجة الخطية باستخدام طريقه سميت بطريقة السمبليكس او طريقة دوتتزيخ ميت استخدمت لاول مره من طرف شركات البترول الامريكية في تخطيط الانتاج.

وساهم الاقتصادي الروسي كونتروفيت. KANTROVICH بتقديم ابحاث عن مشاكل الاستخدام الامثل للموارد سنة ١٩٣٩ اما مسائل النقل فقد قام العالم الامريكي فوقل VOGEL بصياغة طريقة لحلها كما قام كل من K. KOOPERو A.CHARNES بتطوير طريقه التوزيع المعدل المستعملة في مسائل النقل وفي ما يتعلق بمسائل شبكات الاعمال فقد قام العالمان الامريكيان J. KELLY, WALKER سنه ١٩٥٧ باستخدام طريقة المسار الحرج المسماة CPM كما قام فريق من العلماء الأمريكيان بتطوير بعض النماذج الأخرى للنموذج المخزون لويلسون.

ويظهران ظهور بحوث العمليات جاء نتيجة الحاجة في الاقتصاد والحاجة من التسيير الامثلي لمختلف نواحي التيسير الاداري للموارد و على فترات زمنية طويلة نسبيا امتدت لتغطي تقريبا كامل فتره القرن العشرين.

٢،١ اهمية بحوث العمليات

١ - توفر بحوث العلميات امكانية القياس الكمي للظواهر المختلفة (عواملها ومتغيراتها وظروفها المختلفة)

٢ - تساعد على توليد عدد كبير من البدائل والمفاضلة بينها للوصول الى الحل الامثل بسرعة وكفاءه عاليه .

٣- تعتبر القاعدة العلمية لدراسة المشكلات واتخاذ القرارات كما تمكن من تحديد النتائج المتوقعة للقرارات وتقويمها في مرحلة مبكره وقبل تنفيذها.

٤- تتيح امكانية ربط اهداف الفرعية للوضائف والانشطة المختلفة بالاهداف العامة للنظام الكلي .

٥- توفر الوسائل والادوات اللازمة لتنسيق الانشطة المختلفة والتحكم فيها من خلال التنسيق بين الاهداف الفرعية وربطها بالإهداف العامة للنظام.

٣،١ مجالات استخدام بحوث العمليات

يمكن تلخيص اهم المجالات الادارية لاستخدام بحوث العمليات في المشاريع الصناعية والتجارية والزراعية والخدمية سواء كانت هذه ربحيه او غير ربحيه وعلى سبيل المثال لا الحصر بما يلي :

١- الانتاج

وتشمل:

- دراسات الجدوى
- تحديد المدخلات اللازمة للعمليات الانتاجية.
- تحديد نماذج المنتجات .
- اختيار موقع المشروع.
- التصميم الداخلي للمصنع.
- تخطيط العمليات الانتاجية.
- ضبط ورقابة الجوده.
- الصيانة.
- قياس ورفع الكفاءة والانتاجية. مجالات استخدام بحوث العمليات .

٢ - التسويق والمبيعات

- بحوث التسويق
- وضع الاسعار
- الدعاية والاعلان

- رسم السياسات التسويقية.

- تحديد الاسواق

- سياسات التوزيع

٣- التمويل

وما يتعلق به من تحديد مصادر الحصول على الاموال وتخطيط وتوجيه الاستثمارات

٤-الافراد

وما يرتبط بذلك من سياسات تحرير الاحتياجات والتعيين والتدريب و انظمه الحفر والتشجيع

٥ - المشتريات والمخازن

من حيث تحديد مصادر الشراء وكميات واسعار المواد المشتراة واوقات المحول عليها ووضع نظم سليمه للمخزون مما يودي الى زياده الربحية وخفض التكاليف.

٦ - الرقابة الادارية

حيث ان وضوح وتحديد الاهداف بشكل علمي ومدروس يسهل من مهمة الرقابة وبالتالي زياده الفعالية

كل هذا اضافه الى مجالات اخرى اكثر اتساعاً كالتخطيط القومي الشامل والمتمثل بخطط التنمية الاقتصادية والاجتماعية التي تضعها معظم الدول وكذلك بعض القرارات ذات الصبغة السياسية والعسكرية.

من هنا نرى انه يمكن الاستفاده من اساليب بحوث العمليات في كافة المفاهيم والمبادى الادارية ابتداء من التخطيط وانتهاء بالرقابة والتقييم وذلك بغض النظر عن حجم المؤسسه صانعة القرار.

الفصل الثاني

١،٢ البرمجة الخطية

يعد علم البرمجة من الادوات المهمة لحل مسائل الامثلية (optings abian Problems) حيث يعالج بحث أفضل ربح او اقل تكلفه في المسائل التي تحتوي على كميات محدودة من المصادر (كعدد العمال او كميه المواد او مساحه الارض .... الخ).

ويمكن تلخيص البرمجة الخطية بانها مسألة تحديد القيمة العظمى او الصغرى لدالة معنية تسمى دالة الهدف (obiective function) ضمن مجال معين يتم تحديده من خلال قيود (Constraints) على عدد منته من المتغيرات (Variables) بحيث تحقق داله الهدف وكذالك القيود خواصا معينه سوف يتم توضيحها لاحقاً .

ويعثر استخدام البرمجة الخطية بشكل واضح او واسع في حل المسائل العسكرية والاقتصادية والصناعية ، وذلك لأن معظم المسائل في الحقول المختلفة يمكن أن يعيد عنها كمسائل برمجة خطية او يتم تقريبها الى مسائل برمجة خطيه كما ان طرائق حل المسائل الخطية دقيقة ومساحته واخيراً فانه يسهل تحليل الحساسية في حاله المسائل البرمجة الخطية كما سوف توضح ذلك في ابواب لاحقه فيما يلي . يغطي تعريف دقيقاً للبرمجه الخطية

٢،٢ بداية البرمجة الخطية:-

كانت الاساسيات الاوليه للبرمجة١٩٤٠ ،٣٠ ١٩ الخطية تظهر عندما بدأ علماء الرياضيات في استخدام النماذج الرياضية كتحسين قرارات اقتصادية مثل توزيع المواد المحدودة ١٩٤٧ تعتبر هذه السنه نقطه محوريه في تطور البرمجه الخطيه

حيث قام العالم جورج دانتزيج بتطوير خوارزميه السمبلكس (Simplex Algorithmcen) وهي الخوارزميه التي تعتبر الأكثر شهره حتى اليوم لحل المشاكل البرامج الخطية مع تتطور الحواسيب الالكترونية اصبح في ١٩٥٠ الممكن حل مسائل البرمجه الخطية باستخدام الآلات بدلاً من الحاسبات اليدوية المعقدة .

٣،٢ تتطور البرمجة الخطية :-

بدا الاهتمام في البرمجه الخطية ١٩٧٠ - ١٩٦٠ يعتمد على العديد فى المجالات قبل اداره الإنتاج والاقتصاد والعقل حيث يمكن استخدامها لتحديد افضل توزيع الموارد

وفيما بعد : شهدت البرمجه الخطية تطوراً في ١٩٨٠ الاساليب الحسابية والبرمجه والحاسوبية مثل خزم التي تقدم حلول (PLEX Carohit) البرمجيات لمشاكل البرمجه الخطية والمعقدة .

٤،٢ أهمية البرمجة الخطية

تشكل البرمجة الخطية جزءاً مهماً من بحوث البرمجة الرياضية التي تشتمل على البرمجة الخطية والبرمجة اللاخطية، كما أن البرمجة الرياضية بدورها تشكل جزءاً من مواضيع أكثر عمومية منه وهي "بحوث العمليات"

إن أول محاولة في مجال البرمجة الخطية قام بها العالم جورج ستيغلر *George Stiegler* عام ١٩٤٥ ، فقد حاول آنذاك دراسة الحد الأدنى للنفقات اللازمة لإنسان ما، لتأمين الكميات الكافية لحياته والمكونة من (٩) مقومات غذائية أساسية (فيتامين، حديد، بروتين) يحصل عليها الإنسان من (٧٧) سبع وسبعين مادة غذائية كانت متوافرة في الأسواق حينئذ.

وكان الهدف من هذه الدراسة مقارنة غلاء المعيشة قبل الحرب العالمية الثانية وبعدها في أوروبا.

هذه الدراسة قادت هذا العالم إلى وضع أول نموذج رياضي سماه البرنامج الخطي) (*linear Program*) وقد حاول حل هذا النموذج بالطرق الرياضية التي كانت معروفة مثل طريقة لاغرانج *Lagrange Method*، وكتب حينئذ: "يبدو أنه لا توجد أية طريقة مباشرة لإيجاد الحد الأدنى لدالة خطية تخضع متغيراتها لشروط خطية"، لذلك اضطر إلى استخدام طريقة المحاولة والتجريب للتقرب من حل المسألة.

وبعد سنتين أي عام ١٩٤٧ ، أوجد العالم جورج دانتزيغ *G. Dantzing* طريقة عملية وبسيطة أسماها طريقة السمبلكس *Simplex Method* و لم تنشر إلا في عام ١٩٥١ ، إلا أن هذه الطريقة طرأت عليها تعديلات كثيرة وتطورات لتلائم جميع الحالات الممكنة للنماذج الخطية التي رافقت التطورات الاقتصادية والصناعية في العالم.

وأصبحت البرمجة الخطية اليوم أحد أهم الأساليب الكمية و أكثرها شيوعاً واستخداماً في تحليل المواقف الإدارية والتخطيط الإداري والهندسي للحصول على النتائج التي تجمع بين النشاطات الإنسانية المختلفة والموارد المتاحة، وتساهم في توفير المعلومات والحقائق للإدارة لتتمكن الأخيرة من اتخاذ القرارات علمية سليمة. وزادها الحاسوب أهمية عندما أعطاها السرعة في تنفيذ خطواتها وفي توفير الجهد البشري خاصة عندما يكون عدد المتغيرات كثيراً.

٥،٢ الدالة الخطية Linear Function

تكون الدالة f: $R^n \rightarrow R$ خطية إذا حققت الشرطين التاليين :

١ – $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \forall\ X,Y \in R^n$

٢ – $f(ax) = af(x)\ \forall\ X \in R^n, a \in R$

وبشكل عام فإن الدالة f(x_1,…,x_n) تكون خطية إذا وإذا فقط وجد c_1, c_2,…,c_N ∈R بحيث:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

إذا كانت الدالة f خطية، وكانت b∈ R فإن الشرط $f(x_1, \dots, x_n) = b$ يسمى معادلة خطية (linear equality) ، في حيث ان الشرط$f(x_1, \dots, x_n) \geq b$او$f(x_1, \dots, x_n) \leq b$ يسمى متراجحة خطية (linear inequality). نأخذ الآن مثالاً مبسطاً لمسألة برمجة رياضية عامة (mathematical programming problem) ونقوم بتحديد دالة الهدف وكذلك القيود من خلال هذا المثال

مثال (١)

لتعتبر المسألة التالية :

Maximize z = $2x_1 + 3x_2$

subject to $x_1 + x_2 \leq 6$

هذه المسألة تمثل مسألة برمجة رياضية وتسمى الدالة $z = 2x_1 + 3x_2$ دالة الهدف (objective function) وهي الدالة المطلوب إيجاد القيمة العظمى لها ، والمتراجحتان $2x_1 + 3x_2 \leq 4, x_1 + x_2 \leq 6$

قيدان (constraints) الشرط $x_1, x_2 \geq 0$ شرط الإشارة (sign restriction) في الفصول التالية سوف ندخل شرط الإشارة ضمن القيود.

في بعض الحالات لا يكون شرط الإشارة موجودًا، أي أنه من الممكن للمتغير x_1 أن يأخذ أي قيمة موجبة سالبة أو صفر، وفي هذه الحالة يكون هذا المتغير غير محدد الإشارة (unrestricted in sign). إذا كان x غير محدد الإشارة فإننا نستطيع كتابة x بالصورة التالية : x = x-x حيث $x', x'' \geq 0$.

ومن اهم المواقف التي تستخدم اسلوب البرمجة الخطية:

١ - تخطيط الإنتاج والاستغلال الأمثل للطاقة الإنتاجية.

٢ - تحديد المزيج التسويقي للمواد الخام للحصول على مركب محدد.

٣- النقل واختيار أفضل أسلوب لنقل المنتجات وتوزيعها.

وبعد هذه المقدمة نورد الان لتعريف البرمجة الخطية

٦،٢ مسألة البرمجة الخطية *Linear Programming Problem*

مسألة البرمجة الخطية هي محاولة إيجاد القيمة العظمى (أو الصغرى) لدالة خطية بحيث تكون جميع القيود معادلات خطية أو متراجحات خطية. بالإضافة لذلك فإن أي متغير لابد أن يكون غير سالب أو غير محدد الإشارة.

بناء على التعريف ، فإن المسألة في المثال (١) هي مسألة برمجة خطية. وبشكل عام فإنه من الممكن كتابة الصيغة العامة لمسألة البرمجة الخطية التي تتكون من n من المتغيرات و m من القيود بالشكل التالي :

$$Max\ z=c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\mathrm{a_{m1}x_1} + \mathrm{a_{m2}x_2} + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

حيث $\mathrm{a_{ij}}, b_i, c_j \in R$ لكل $i = 1, \ldots, m\ ; j = 1, \ldots, n$

ويمكن كتابة هذه المسألة بالصورة المختصرة :

$$\max\ z = C^T x$$

$$S.T\ AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

حيث $A, B \in R^m C, X \in R$ عبارة عن المصفوفة من النوع $n \times m$ في بعض الحالات قد تكون المسالة قيمة صغرى "*min*" بدلا من كونها مسالة قيمة عضمى "*max*" ، كما ان بعض القيود قد تكون بالصورة

$\mathrm{a_{i1}x_1} + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ او $\mathrm{a_{i1}x_1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i$.

٧،٢ مسائل يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية

هناك العديد من المسائل التطبيقية التي يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية.ومن المفيد أن نتعرف على عينة من هذه المسائل. في هذا الفصل نعطي بعض الأمثلة على مسائل يمكن صياغتها على شكل مسائل برمجة خطية كمسائل الإنتاج وتقليل التكلفة، وغيرها.

١-مسألة الإنتاج *A Product-Mix Problem*

يتخصص مصنع أثاث بإنتاج الكراسي والطاولات ويملك المصنع كمية محدودة من المصادر اللازمة لإنتاجها. يرغب المصنع في معرفة الكمية التي ينبغي إنتاجها من كل نوع لكي يحقق أكبر ربح ممكن (*maximum profits*).

٢ - مسألة تقليل التكلفة *A Cost-Minimization Problem*

تود إدارة الخدمات في إحدى المؤسسات تأمين وجبة غذائية تتكون من نوعين من الفواكه، موز وتفاح. كل نوع يحتوي على كمية محدودة من فيتامين *A* وكمية محدودة من فيتامين *C*.

٣- مسألة ميزانية الاعلانات.*An Adverbising-Budgeb*

تمتلك شركة مبلغاً معينا ترغب في توظيف في الاعلانات للسنة القادمة وهناك عدة وسائل إعلام يمكن للشركة أن تعلن . فيها كالجرائد والمذياع والتلفاز. وتهتم الشركة بعد الزبائن. ونوعية الزبائن الا ربات بيوت، طلاب جامعات، مدرسين موضفين)كل طريقة من طرائق الاعلانات ان تصل الى شريحه معينة من الناس.

٤-مسألة النقل *ATrans Porba bion Problem*

٥- مسألة التوظيف او التعين *AN Assignment Problem*

٦-التحكيم في المخزون *Storgage problems*

٧-المسائل الزراعة *Agricultural Problems*

٨-المسائل المالية *Financial problems*

٩-المسائل اللوجستية *Logistics Problems*

١٠-مسائل الجدولة *Scheduling Problems*

٨،٢صياغة مسائل البرمجة الخطية *Formulation of LP Problems*

نورد تحت هذا العنوان عددًا من المسائل التطبيقية التي كثيرا ما ترد في حياتنا اليومية أو في بعض التطبيقات الصناعية ونقوم بتحويل هذه المسائل إلى مسائل برمجة خطية يسهل حلها باستخدام بعض الطرائق التي سوف نتطرق إليها في أبواب قادمة.

لكي نقوم بصياغة المسائل التطبيقية على شكل مسائل برمجة خطية يلزم القيام بالخطوات الثلاث التالية :

١- تحديد متغيرات القرار (*decision variables*).

٢-تحديد دالة الهدف وكتابتها كدالة خطية في متغيرات القرار. وهذه الدالة هي التي نبحث عن أكبر قيمة أو أصغر قيمة لها.

٣-تحديد جميع القيود في المسألة وكتابتها كمعادلات أو متراجحات خطية في متغيرات القرار.

سوف نقوم بتوضيح هذه الخطوات الثلاث عن طريق صياغة عدد من مسائل البرمجة الخطية والتي نبدؤها بالمثال التالي :

مثال (٢)

تقوم مطبعة بطباعة نوعين من الكتب هما : كتب البرمجة الخطية، وكتب البرمجة غير الخطية. تكلفة الورق لكتاب البرمجة الخطية ٣ ريالات ولكتاب البرمجة غير الخطية ٤ ريالات. يستهلك كتاب البرمجة الخطية كميه من الحبر تكلفتها ٨ ريالات، ويستهلك كتاب البرمجة غير الخطية ١٠ ريالات من الحبر. ربح المطبعة من الكتاب الأول ٢٠ ريالاً ومن الكتاب الثاني ٢٥ ريالاً ، وتملك المطبعة كمية من الورق بقيمة ٢٠٠ ريال وكمية من الحبر بقيمة ٤٠٠ ريال. تهدف المطبعة لتحقيق أكبر كمية ربح ممكنة عن طريق تحديد عدد الكتب الأمثل من كل نوع. أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

الحل/

الطريقة المنطقية للتفكير في هذا السؤال تكمن في قراءة متأنية للمعطيات، لنراجع المعطيات المطروحة في هذا السؤال. هناك نوعان من الكتب تقوم المطبعة بطباعتهما ، كتب البرمجة الخطية ويربح المصنع من كل واحد منها ٢٠ ريالاً ؛ وكتب البرمجة غير الخطية يربح المصنع من كل واحد منها ٢٥ ريالاً هناك مصدران مهمان لطباعة الكتب : المصدر الأول الورق، والمصدر الثاني الحبر. وتملك المطبعة كمية محدودة من هذين المصدرين في حالة استخدام

معظم هذين المصدرين لطباعة كتب البرمجة الخطية، نجد أن هذا سوف يحد من قدرة المطبعة على طباعة كتب البرمجة غير الخطية. وبالمثل لو استخدمت معظم هذه المصادر الطباعة كتب البرمجة غير الخطية فإن هذا سوف يقلل الكمية المطبوعة من كتب البرمجة الخطية.

الخطوة الأولى لصياغة هذه المسألة هي التفكير في الهدف الذي يسعى إليه صانع القرار في المطبعة. فمن الواضح أن صانع القرار يهدف إلى الحصول على أعلى كمية ربح من بيعه للكتابين.

بعد أن أخذنا صورة إجمالية عن المسألة السابقة نستطيع الآن صياغتها على شكل مسألة برمجة خطية ؛ وذلك عن طريق تحديد متغيرات القرار، ثم دالة الهدف والقيود كدوال خطية في متغيرات القرار.

١،٨،٢ متغيرات القرار *Decsision variables*

عند صياغة أي مسألة برمجة خطية فإنه يلزم في البداية وصف متغيرات القرار وصفا دقيقا . من الواضح أن المطلوب في هذه المسألة تحقيق أكبر كمية ممكنة من الربح. ولتحقيق ذلك ينبغي تحديد عدد الكتب التي يجب إنتاجها من كل نوع ؛ لذلك نقوم بتعريف متغيرات القرار x_1, x_2 كما يلي :

عدد كتب البرمجة الخطية $=x_1$

عدد كتب البرمجة غير الخطية $= x_2$

ملاحظة :

عند وصفنا لمتغيرات القرار، لا معنى لقولنا إن x_1 هي كتب البرمجة الخطية ؛ وذلك لأن x_1 في هذا المثال تحدد عدد الكتب وليس الكتب بذاتها

٢،٨،٢ دالة الهدف *Objective Function*

نبحث الآن عن الهدف الذي تسعى إليه المطبعة، وهو تحقيق أكبر ربح ممكن. في هذا المثال نعرف دالة الهدف z بأنها الربح الإجمالي (*total profit*) الذي تحصل عليه المطبعة من الكتب المباعة.

ولأن المطبعة تربح في كل كتاب من كتب البرمجة الخطية مبلغ ٢٠ ريالاً ، وعدد كتب البرمجة الخطية هو x_1 فيكون ربح المطبعة من كتب البرمجة الخطية المطبوعة $20x_1$ ، بينما تربح المطبعة من كتب البرمجة غير الخطية $25x_2$.

إذا الربح الإجمالي لمبيعات الكتب سوف يكون عبارة عن مجموع أرباح كتب البرمجة الخطية وكتب البرمجة غير الخطية، وبناء على ذلك فإن دالة الهدف تأخذ الشكل التالي :

الربح الإجمالي للكتب المباعة $z = 20x_1 + 25x_2$

وبما أن المطلوب هو زيادة الربح الإجمالي، إذا المطلوب إيجاد أكبر قيمة ممكنة الدالة الهدف وبذلك تكون المسألة مسألة قيمة عظمى. أي أن المطلوب إيجاد : $\max z = 20x_1 + 25x_2$

٣،٨،٢ القيود *Constraints*

هناك نوعان من القيود تواجههما المطبعة ويمثلان حدا على الربح الإجمالي للمطبعة : القيد الأول ثمن الورق، والقيد الثاني كمية الحبر.

القيد الأول : ثمن الورق

تعلم من خلال المسألة أن ثمن الورق لا يمكن أن يزيد عن ٢٠٠ ريال.

وبما أن كتاب البرمجة الخطية يكلف ٣ ريالات من الورق ، إذا تكلفة الورق لكتب البرمجة الخطية تساوي $3x_1$. أما تكلفة الورق لكتب البرمجة غير خطية فإنها تساوي $4x_2$ ؛ لأن كتاب البرمجة غير الخطية يكلف ٤ ريالات من الورق.

إذا التكلفة الإجمالية للورق تساوي $3x_1 + 4x_2$ وحيث أن التكلفة الإجمالية لا يمكن أن تتعدى ثمن الورق الذي تمتلكه المطبعة ؛ لذا فإنه يمكن صياغة القيد الأول بالشكل التالي :

التكلفة الإجمالية للورق $3x_1 + 4x_2 \leq 200$

القيد الثاني: ثمن الحبر

نعلم أن ثمن الحبر الذي يمكن استخدامه للتصوير لا يمكن أن يزيد عن مبلغ ٤٠٠ ريال.

ولأن تكلفة الحبر للكتب من النوع الأول تساوي عددها مضروبا في قيمة التكلفة للكتاب الواحد ؛ إذا قيمة الحبر المستهلكة في الكتب من النوع الأول تساوي $8x_1$وبالنسبة للكتب من النوع الثاني فإن قيمة الحبر تساوي $10x_2$.

إذا الشرط الثاني يصبح :

التكلفة الإجمالية للحبر $8x_1 + 10x_2 \leq 400$

هناك قيد ثالث وهو أن عدد الكتب لابد أن يكون غير سالب ، أي أن :

$x_1, x_2 \geq 0$

٤،٨،٢ الصيغة النهائية *A Formal Statement of the Model*

الآن أصبحت جميع المعطيات واضحة لكتابة الصيغة النهائية لمسألة البرمجة الخطية، والتي نستطيع تلخيصها كالتا الربح

الربح الاجمالي $\max z = 20x_1 + 25x_2$

عدد كتب البرمجة الخطية = x_1

عدد كتب البرمجة غير الخطية = x_2

Subject to

التكلفة الإجمالية للورق $3x_1 + 4x_2 \leq 200$

" التكلفة الإجمالية للحبر $8x_1 + 10x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

او باختصار

$\max z = 20x_1 + 25x_2$

$s.t\ 3x_1 + 4x_2 \leq 200$

$8x_1 + 10x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

الفصل الثالث

١،٣ نموذج التخصيص

يمكن استخدام مشاكل التخصيص او التعيين في كثير من التطبيقات الادارية المتعلقة بإدارة الافراد و اداره الانتاج و اداره التسويق وغيرها ، حيث تعد احدى الأساليب المعتمدة في توزيع الموارد النادرة على اعمال محدده بحيث تكون كلفه التخصيص اقل ما يمكن لنفرض اننا نريد توزيع (n) كاملا او آله على (n) عملا بحيث يقوم كل عامل بانجاز عمل واحد فقط ، بهدف تحقيق اجمالي انتاج اكبر ما يمكن .

١،١،٣ صياغة النموذج الخطي لها

يجب اختيار من كل سطر ومن كل عمود في المصفوفة المربعة ادناه عنصر واحد محدد بحيث يكون مجموع تلك العناصر اكبر ما يمكن

(او اصغر ما يمكن في حاله التكاليف)

نرمز بـ(X_{ij}) للمتحول الذي ياخذ قيمة تساوي (١) عندما نعين العامل (i) على العمل (j) وياخذ قيمة تساوي الصفر عندما يكون عكس ذلك.

مصفوفة التخصيص

B_j / A_i	b_1=1	b_2=1	…	b_j=1	…	b_n=1
a_1=1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
a_2=1	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
a_i=1	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
a_m=1	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

وبما أن العامل الواحد لا يمكن أن يأخذ إلا عملاً واحداً ، يعني أن واحداً فقط من المتحولات X_{ij} في السطر (i) سيأخذ قيمة تساوي الواحد أما بقية المتحولات في ذلك السطر فستأخذ قيماً تساوي الصفر .

وكذلك بما أن العمل الواحد لا يمكن ان ينفذ الا من قبل عامل واحد فهذا يعني أن واحداً فقط من المتحولات x_{ij} في العمود (j) سيأخذ قيمة تساوي الواحد أما بقية المتحولات في ذلك العمود فستأخذ قيماً تساوي الصفر .

وبذلك يمكننا صياغة تابع دالة الهدف :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \rightarrow \max\ (min)$$

حيث c_{ij} :تمثل انتاجية (تكلفه) العامل (i)في العمود(j)

J=1,2,…,n ; i=1,2,…,n

اما :x_{ij} = *0* الصفر ;*1*= x_{ij} الواحد

ونكتب بما ان العامل الواحد لا يمكن ان ياخذ الا عملا واحدا فانه يجب ان يحقق الشروط الخطيه التاليه :

$$X_{11} + X_{12} + \cdots + X_{1j} + \cdots + X_{1n} = 1$$

$$X_{21} + X_{22} + \cdots + X_{2j} + \cdots + X_{2n} = 1$$

$$X_{m1} + X_{m2} + \cdots + X_{mj} + \cdots + X_{mn} = 1$$

وكذلك بالنسبه للعمل الواحد حيث لا ينفذ الا من قبل عامل واحد فان *X* يجب ان تحقق الشروط الخطية التاليه:

$$X_{11} + X_{21} + \cdots + X_{i1} + \cdots + X_{m1} = 1$$

$$X_{12} + X_{22} + \cdots + X_{i2} + \cdots + X_{m2} = 1$$

$$X_{1n} + X_{2n} + \cdots + X_{in} + \cdots + X_{mn} = 1$$

٢،٣ طرق حل المشاكل التخصيص

١،٢،٣ طريقة التوافيق

تعتمد هذه الطريقة على تحديد عدد المرات التي يمكن بها التوفيق بين البدائل المختلفة . فمثلاً إذا كان لدينا ثلاثة أشخاص وثلاث وظائف فإن عدد مرات المقارنة اللازمة لعملية الاختيار هي (*n* (*n*! عاملي (٦ = ١×٢×٣ = ٣!) أي هناك ستة احتمالات يجب المقارنة بينها ، بحيث تحصل على أقل تكلفة

وغالباً ما تصلح هذه الطريقة عندما يكون عدد عناصر المصفوفة صغيراً أي هناك سهولة في حساب عدد المرات أما إذا كان كبيراً (٨!) فهذا أمر صعب ، لذلك لا يستحسن استخدامها عندما تكون عناصر المصفوفة كبيرة .

مثال (١)

لنفرض أن تكاليف إنجاز ثلاث وظائف على ثلاث آلات ، والمطلوب استخدام طريقة التوافيق وإجراء عملية التعيين لتخفيض التكاليف

الات b_j / عمل a_i	b_1=1	b_2=1	b_3 =1
a_1=1	21	17	31
a_2=1	71	19	35
a_3=1	20	21	27

الحل : عدد التوافيق (المرات) مرات ($6 = 1 \times 2 \times 3$=3!) وهي :

$$(b_1a_1), (b_2a_2), (b_3a_3): (1)$$

$$(b_1a_1), (b_3a_2), (b_2a_3): (2)$$

$$(b_1a_2), (b_2a_1), (b_3a_3): (3)$$

$$(b_1a_2), (b_3a_1), (b_2a_3): (4)$$

$$(b_1a_3), (b_2a_1), (b_3a_2): (5)$$

$$(b_1a_3), (b_3a_1), (b_2a_2): (6)$$

وبعد هذه الخطوة نحسب تكاليف كل بديل اعتمادا على الارقام المعطاة في المصفوفة .

فمثلا تكلفة انتاج الوضيفة a_1 على الالة b_1 تساوي (21) اي ان$21 = \mathrm{a}_1\ b_1$.

نحسبهم على الترتيب :

62=21+19+22(1)

77=21+35+21(2)

61=17+17+27(3)

69=17+31+21(4)

72=20+17+35(5)

70=20+31+19(6)

وهنا نختار اقل التكاليف وهي ممثلة بالرقم (61) امام البديل الثالث وهذا يعني بانه ننجز الوضيفة a_2 على الالة b_1 و a_3 على الالة b_3

٢،٢،٣ الطريقة الهنغارية

تتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل النهائي :

١- نأخذ أقل رقم في كل صف من المصفوفة المربعة في حالة التكاليف ونطرحه من باقي القيم في ذلك الصف .

٢- نأخذ أقل رقم في كل عمود في المصفوفة الناتج عن المرحلة الأولى ونطرحه من كافة القيم في ذلك العمود .

٣- نغطي الاصفار في المصفوفة الأخيرة بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو العمودية

٤- نقوم بعملية التعيين أو التخصيص إذا كان عدد الخطوط المغطية للأصفار يساوي لعدد الصفوف أو عدد الأعمدة على أساس أخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد .

٥- في حال عدم تساوي عدد الخطوط المغطية للأصفار أي أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فهذا يعني عدم إمكانية التخصيص، وبالتالي نلجأ إلى أخذ أقل قيمة غير مغطاة، ونطرحها من

كافة القيم غير المغطاة وبالوقت نضيفها نفسه إلى نقاط تقاطع الخطوط التي قمنا بوضعها لتغطية الأصفار .

٦- اذا لم تصل لامكانية التخصيص نستمر في تطبيق المرحلتين الخامسة والثالثة أعلاه حتى ننهي الحل .

٧- إن لوضع المفضل لكيفية رسم الخطوط الأفقية أو العمودية لا يؤثر على النتائج النهائية ، وقد نحصل على أكثر من توزيع (حل) ولكن بالتكلفة بنفسه.

حالة التكاليف

مثال(٢)

لو كانت لدينا المعلومات التاليه عن تكاليف انجاز ثلاث وضائف على ثلاث الات:

مصفوفة التكاليف

الات / وضائف	I	II	III
A	21	17	31
B	17	19	35
C	20	21	27

والمطلوب:

استخدم طريقة التخصيص في إيجاد التخصيص الأمثل لهذه الوظائف على هذه الآلات باستخدام الطريقة المجرية او (الهنغارية).

الحل/ خطوات الحل :

١ - طرح الأسطر : كل سطر نأخذ فيه أقل قيمة ونطرحها من نفسها ونطرحها من باقي العناصر.

٢- طرح الأعمدة : كل عمود نأخذ فيه أقل قيمة ونطرحها من نفسها ونطرحها من باقي العناصر.

الات / وضائف	I	II	III
A	4	0	14
B	0	2	18
C	0	1	7

٣- التغطية(للاصفار) : علينا ان نغطي هذه الاصفار بخطوط افقية او عمودية

(لكن باقل عدد ممكن من الخطوط)

الات / وضائف		I	II	III
A		4	0	7
B		0	2	11
C		0	1	0

ونتوقف عن الحل عندما يصبح عدد هذه الخطوط المغطية للأصفار يساوي عدد الأسطر أو عدد الأعمدة ومن ثم نبدأ بالتخصيص.

ملاحظة

في حال عدم تساوي عدد الخطوط الأفقية والعمودية المغطية للأصفار نأخذ أقل قيمة غير مغطاة ونضيفها لنقاط التقاطع ونطرحها من القيم غير المغطاة ونكـــرر الخطوة الأخيرة (التغطية) إلى أن نصل إلى الخطوط المغطية للأصفار مساوية لعدد الأسطر أو لعدد الأعمدة ومن ثم نبدأ بالتخصيص.

٤-التخصيص :

التكاليف	الالات		الوضائف
17	II	→	A
17	I	→	B
27	III	→	C
61			

الخلاصة : طريقة التوافيق

- غير عملية أبدًا عندما يزيد عدد العناصر.
- مثلاً ٦ مهام = ٦! = ٧٢٠ حالة.
- ١٠ مهام = ١٠! = ٣،٦٢٨،٨٠٠ حالة.
- تستهلك وقتًا وجهدًا كبيرين.
- غير مناسبة للبرمجة أو الأنظمة الحقيقية.

اما الطريقة الهنغارية

تعطي الحل الأمثل.

- سريعة جدًا مقارنة بالتوافيق، حتى مع ١٠٠ مهمة.
- مناسبة للبرمجة والأنظمة الذكية (مثلاً في التصنيع، الجداول، الذكاء الصناعي)

مما تقدم يفضل استخدام الطريقة الهنكارية عند وجود اعداد مهام كبيرة

المصادر

١ -إبراهيم بن صالح العليان ، مقدمة في البرمجة الخطية ، الرياض ، مركز النشر العلمي والمطابع بجامعة الملك سعود ، (٢٠٠٧م-١٤٢٨هـ) .

٢ -صبحي المحمد وابراهيم النائب وحسن المشرقي وانعام باقية ، بحوث العمليات ، منشورات جامعة حلب - كلية الاقتصاد ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية (٢٠٠٨م-١٤٢٩هـ) .

٣ -محمد راتول ، بحوث العمليات ، الجزائر ، ديوان المطبوعات الجامعية ، ٢٠٠٦.

٤ -محمد الطراونة وسليمان عبيدات ، مقدمة في بحوث العمليات ، الأردن ، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة (٢٠٠٩م -١٤٢٩هـ) .

٥ -ريتشارد برونسون ، بحوث العمليات(سلسلة ملخصات شوم الطبعة العربية الثانية) ، ترجمة الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، بيروت لبنان ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ٢٠٠٤ .