• المقدمه : [1]

ما زالت المعادلات التفاضليه منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسة الحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة تحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم والاقتصادية والاجتماعية هو تطورت المعادلات التفاضليه وتزايدت وأهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها استحوذ موضوع المعادلات التفاضليه على اهتمام الرياضيين لكثرة ظهورها في المسائل الفيزيائية والهندسة حيث أنها تحتل مكانة مرموقه في كل فروع العلوم حيث اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين متغيرات مسألة فيزيائيه أو هندسية تظهر على صورة معادلات تفاضليه فهم هذه المسألة فلابد من حل هذه المعادلة التفاضليه أو على الأقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل.

المعادلات التفاضليه الاعتيادية هي معادلات تتضمن دوالاً ومشتقاتها إليك مثالا بسيطاً:-

مثال: المعادله التفاضليه الاولى (1)

يمكننا اخذ المعادله التفاضليه التاليه :-

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

الحل:- هذه معادله تفاضليه من الدرجه الاولى لحلها تستخدم طريقه الفصل بين المتغيرات نعيد ترتيب المعادله كالتالي:

$$\frac{1}{y}dy = 3dx$$

ثم نقوم بتكامل الطرفين

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 3dx$$

ومثال اخر على المعادلات التفاضلية

1. $(y'')^2 + 2y^2 - 5y$
2. $y' + xy$

وفي هذا البحث يحاول الباحث عرض كيفيه تكوين المعادله التفاضليه و طريقه حلها حيث يامل الباحث ان يسهم في تعزيز فهم المعادلات التفاضليه و طرق حلها مما يساعد في تطبيقاتها العمليه في مجالات متعدده.

الفصل الاول

(المفاهيم الاساسية للمعادلات التفاضلية)

1-1 المعادلات التفاضلية :- [2]

و تعرف المعادلات التفاضلية هي علاقه بين المتغير X و المتغير التابعY(x) وواحده او اكثر من المشتقات التفاضلية `y، `y`` و صورتها العامة F(x,y,y`,y``,...) وهذه تسمى المعادلة التفاضلية الاعتيادية ، اما اذا كان عدد المتغيرات المستقله اكثر من واحد و ليكن X,Y متغيرات مستقلات و Z(X,Y) متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة للمتغيرين X,Y سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة و المتغير التابع و مشتقاته الجزئية معادله تفاضليه جزئيه و هي على الصورة

G(x,y,z,zy,zxx,zxy,zyy) و يوضح ان العلاقة بين المتغير التابع و المستقل تدخل منها المشتقات او التفاضلات و تسمى المعادلة التفاضلية الاعتيادية اذا كان المتغير التابع داله في متغير مستقل واحد و بتالي لا تحتوي الاعلى مشتقات عاديه وليكن X المتغير المستقل وليكن Y المتغير التابع للامثلة التالية تمثل المعادلات التفاضلية الاعتيادية :-

1. $\frac{dy}{dx}+y$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\ \ \frac{dy}{dx}+y$
3. $x\frac{d^3y}{dx^3}+(2sinx)\frac{d^2y}{dx^2}\ \ \frac{dy}{dx}$
4. $(x-y)dx+(x+y)dy$
5. $\frac{dy}{dx}=5x+3$

1-2 انواع المعادلات التفاضلية:- [4]

للمعادلات التفاضليه عدة انواع يتناول الباحث بعض منها وهي:-

اولاً:- المعادلات التفاضليه الاعتياديه:

وهي علاقه بين المتغير التابع و المتغير المستقل تدخل فيها المشتقات اوالتفضيلات وتسمى المعادله التفاضليه الاعتياديه اذا كان المتغير التابع داله في المتغير المستقل واحد وبتالي لاتحتوي الاعلى مشتقات عاديه ومن الامثلة:[4]

1. $\frac{dy}{dx}=5x+3$
2. $e^4\frac{d^2y}{dx}+2(\frac{dy}{dx})$
3. $4\frac{d^3y}{dx^3}+(sinx)\frac{d^2y}{dx^2}+5xy$

ثانياً:- المعادلات التفاضلية الجزئية:- [4]

وهي معادلة تفاضلية منها المتغير التابع حالة لأكثر من متغير مستقل أي تظهر فيها المشتقات الجزئية و من الامثلة عليها: [4]

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\ \frac{d^2y}{dx^2}$
2. $\frac{du}{dx} + 3\frac{du}{dy}$
3. $2x\ \frac{d^2u}{dx^2} + 3y\frac{du}{dx} + (x-y)u$

ثالثاً:- المعادلات التفاضلية الخطية : [8]

هي معادلة تفاضلية تكون فيها المشتقات والمتغيرات مرتبه بشكل خطي اي ان كل مشتقة من المجهول مثل (x,y) تظهر بمعامل ثابت او داله في المتغير المستقل مثل (x) دون ان تضرب المشتقات في بعضها او تظهر فيها قوى. اعلى من الدرجة الاولى.

وبالتالي تكون على النحو الاتى:-

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = g(x)$$

مثلاً:- [8]

$y' - y^4 = e^{2x}$

رابعاً:- المعادلات التنظيمية الغير خطية : [8]

وهي معادلة تفاضلية رياضية تحتوي على واحد او اكثر في المتغيرات حيث تكون العلاقة بين هذه المتغيرات غير خطية حلولها قد تكون متعددة وتظهر بشكل واسع في الفيزياء و الهندسة والاقتصاد

مثلاً :- [8]

$$Y = x^3 + 3x^2 - 2$$

خامساً:- المعادلات التفاضليه المتجانسة:- [3]

انه من المفيد لدراسة المعادلات التفاضلية الخطية في احيان كثيرة ادخال المؤثر التفاضلي الخطي وبما ان الدوال p(x) و q(x) دوال مستمره على المجال المفتوح $\alpha < x > \beta$ و المتجانسه هي نظام الذي يكون فيه الحد الثابت يساوي صفراً كالاتي:

$$y'' + y' + y = 0$$

سادساً:- المعادلات التفاضليه الغير متجانسه :- [9]

نظام المعادلات غير المتجانسة هو النظام الذي يكون فيه الاقتران الذي يختلف عن اقتران من المعادلة الاصلية لا يساوي صفراً سواء كانت المعادلة من المرتبة الأولى أو الثانية وتختلف المعادلة التفاضليه المتجانسة عن غير المتجانسة في ان واحد أطراف المساواة سواء على يمين المساواة أو على يسارها يجب أن يساوي صفراً .

مثلاً:- [9]

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

1-3 درجه المعادلات التفاضلية الاعتيادية:- [5]

لتحدد درجة المعادلة التفاضلية الاعتيادية حسب (اس) المشتقه ذو الرتبة مثال على ذلك اذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثالثة اي ان اعلى تفاضل فيها هو التفاضل الثالث فدرجة المعادلة تحدد حسب (اس) هذا التفاضل فاذا كان مرفوع (للاس) 5 تكون المعادلة من الدرجة الخامسة.

1-4 رتبه المعادلات التفاضلية الاعتيادية :- [5]

هي(الاس) الاعلى للمشتقة التي تظهر في المعادلة بشرط ان تكون خالية من الجذور او القوى الكسرية وفي هذه الحالة نحاول التخلص منها لمعرفة رتبة المعادلة التفاضلية

مثال:- [5]

1. $\frac{dy}{dx} + (-7)y = 0$ من الرتبة الاولى الدرجة الاولى
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x - 3xy + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى
3. $y''' + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الاولى
4. $y'' + 2y(y') = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى
5. $x^2(\frac{dy}{dx})^4 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الدرجة الثانية والرتبة الثانية

1-5 تكوين المعادلة التفاضلية الاعتيادية :- [6]

اذا اعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n نجد ان هذا الحل يعتمد على n من الثوابت الاختباريه و يكون على الصورة /

(1) $F(X,Y,C_1,C_2,\ldots..,C_C)$

حيث$(C_1,C_2,\ldots,C_C)$ ثوابت اختياريه و للحصول على المعادله التفاضليه للحل المعطى نجري n من المشتقات للمعادله(1) يكون لدينا (n+1) من المعادلات عباره عن معادله (1)بالاضافة الى n معادله من العمليات التفاضليه التي عددها n وذلك يمكن حذف الثوابت الاختياريه و منها نحصل على المعادله المطلوبه

[6] مثلاً/احذف الثابتيين للحصول على المعادله التفاضليه التي حلها

$$xy = ae^{x} + be^{-x} + x^{2}$$

باشتقاق المعادله اعلاه بالنسبة لـ x نحصل على :

$$xy + y' = ae^{x} - be^{-x} + 2x \quad \ldots\ldots(1)$$

وباشتقاق (2) بالنسبة لـ (x) نحصل على :

$$xy'' + 2y' = (xy - x^{2})+2 \quad \ldots\ldots(2)$$

مستخدماً المعادله الاصليه اي ان المعادله :

$$xy'' +2y' - xy + x^{2} = 0$$

1-6 اهمية المعادلات التفاضليه الاعتياديه :- [7]

تعد المعادلات التفاضليه من المعادلات المستخدمة في بعض التطبيقات المختلفة في الحياة الواقعية فالدالة الموجودة فيها هي عبارة عن عملية يتم احتسابها بينما المشتقات تعمل على وصف معدل التغيير في أداء العملية وهذه بعض أهمية استخدامات المعادلات التفاضليه:

1- حساب التغيرات بدرجات الحرارة (معادلة الحرارة وانتشارها)

2- المعادلة التي تصف عملية تفريغ المكثفات

$R^{x}dQ/dt + Q/C=0$ (الدوائر الكهربائية)

3- تغيير الضغط الجوي مع الارتفاع

4- إيجاد الربح والخسارة لمستقبل الاستثمار(إدارة الأعمال)

وللمعادلات التفاضليه دورا مهما في حياتنا اليومية وفي تفسير بعض القوانين منها قوانين الظواهر الطبيعية والعمل على حل مشاكلها.

1-7 استخدام المعادلات التفاضليه الاعتياديه:- [7]

هنالك العديد من التطبيقات العملية لمعادلات التفاضل الاعتيادية على سبيل المثال في الهندسة الميكانيكية يمكن استخدامها لنمذجه حركة جسم الإنسان والإهتزازات في الهندسة الكهربائية ويمكن استعمالها لتحليل دوائر التيار المتردد في الفيزياء ويمكن استخدامها للدراسة الحركة الكلاسيكية والديناميكية الحرارية في الاقتصاد يمكن استخدامها لنمذجه النمو الاقتصادي والتغيرات في الأسعار هذه بعض الأمثله وهنالك الكثير من التطبيقات.

1-8 الحل العام:- [4]

الحل العام للمعادلة التفاضليه من الرتبة n (أعلى مشتقة في المعادلة التفاضليه) هو حل يحقق المعادلة التفاضليه و يحتوي على n من الثوابت (ولنحصل على هذه الثوابت نتيجة تكامل المعادلة التفاضليه n من المرات)

مثلاً:- جد الحل العام للمعادلة التفاضلية: [4]

$y'' = 6x$

$y'(0)= 2 \quad , y(1)=1$

1-9 الحل الخاص للمعادلات التفاضليه :- [4]

هو الحل الذي يحقق المعادله التفاضليه المعطاة و يحدد لقيم معينة من الشروط الابتدائية أو الحدودية ويختلف عن الحل العام الذي يشمل جميع الحلول التي تحتوي على ثوابت للتكامل ويعتمد على رتبة المعادلة التفاضليه

مثلاً:- [4] $dy/dx=2x$

مثلاً:- [4] جد الحل الخاص: $y''=6x$

الفصل الثاني

(طرق حل المعادلات التفاضليه ذات الرتب العليا)

2-1 تعريف المعادلات التفاضليه ذات الرتب العليا :- [6]

المعادلات التفاضليه من الرتبه n و يقال انها خطيه في المتغير y (المتغير التابع) اذا كان $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ من الدرجه الاولى و تكون على الصورة العامه :-

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y + a_{ny} = 0$$

إذن سوف نتطرق للمعادلات التفاضليه الخطية من الرتب العليا الثالثة و الرابعة وحتى الرتبة النونيه.

نبحث في الطرق المختلفة للحصول على الحل العام ونعمم بعض نظريات الرتبة الثانية الخطية للتعامل وحتى الرتبة النونيه.

إذا كان $y(n)$ يرمز للمشتقه النونيه للداله $y(x)$ فإن المعادلة التفاضليه من الرتبة النونيه يمكن وضعها في الشكل:

$$F(x , y , y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

حيث $y(x)$ هو الحل الذي نبحث عنه.

إن طرق حل معادلات الرتب العليا لا تختلف كثيرا عن طرق حل معادلات الرتبة الثانية بل يمكن اعتبارها تعميماً للنظريات في حالة الرتبة الثانية. حيث نجد أن الحصول على الحل العام لأي معادلة خطية غير متجانسة من رتبة أعلى من الرتبة الثالثة.

علينا أولا إيجاد حل المعادلة المتجانسة المقابلة لها باستخدام المعادلة المميزة ومعرفة شكل الجذور لتحديد شكل الحل ثم نبحث بعد ذلك عن الحل الخاص, ونظرا لأن عدد جذور المعادلة المميزة يساوي رتبة المعادلة التفاضلية يمكن لنا أن نتوقع شكل الحل في حالة المعادلات من الرتب الأعلى من الرتبة الثانية حيث يمكن ان يحتوي الحل على جزء خاص بالجذور الحقيقية المختلفة وجزء خاص بالجذور التحليلية وجزء خاص بالجذور المكررة .

مثلاً:- اوجد الحل العام للمعادله : [6]

$y^{(4)} + 3y''' - 16y'' + 12y' = 0$

sol:- $y = ce^{rn}$ لنفترض

$r^4 + 3r^3 - 16r^2 + 12r = 0$ ← نحول المعادله الى معادله مميزه

نلاحظ ان هنالك عامل مشترك وهو r

$\therefore r(3r^2 - 16r + 12) = 0$

الان سوف نحلل المعادله المميزه

$r=0$ العامل الاول

$r^3 + 3r^2 - 16r + 12 = 0$ العامل الثاني

نقسم

$r^3 + 3r^2 - 16r + 12] \div (r-1)$

$\frac{r^3 + 3r^2 - 16r + 12}{r-1}$ وباستخدام القسمة

$r^3 + 3r^2 - 16r + 12$ ← اذن

$= (r-1)(r^2 + 4r - 12)$

$r^2 + 4r - 12 = 0$ الان نحلل

نستخدم القانون $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حيث ان $a=1, b=4, c=-12$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$r = 0, 1, 2, -6$ الجذور النهائية $\therefore$

فبالتالي فأن الحل العام هو : $y(x) = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-6x}$

$\therefore r=-6, r=0, r=1, r=2$

2-2 طرق حل المعادلات غير المتجانسه باستخدام المؤثر التفاضلي و معاملات غير المعينه :- [2]

- **المؤثر التفاضلي :[2]**

و هو تعبير رياضي يستخدم لتمثيل المشتقات بطريقة مختصرة يشار إليه غالبا بالرمز D ويعرف

$D=d/dx\ ,\ D^n=d^n/dx^n$

إذا كان لدينا معادلة تفاضليه مثلا

$y'' + 3y' + 2y = e^x$

$(D^2 + 3D + 2)\ y = e^x$

وفي طريقة اختزال المعادلة من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولى إن كان لدينا المعادلة

$y'' + p(x)\ y' + q(x)\ y = r(x)$

$(D^2 + p(x)D + q(x)\ y = r(x)\ )$

مثال/ بطريقة تحليل المؤثر أوجد الحل العام للمعادلة [2]

$(x + 2)\ y'' - (2x + 5)\ y' + 2y = 2(x+ 2)^2\ e^{2x}\ ,\ x \neq 2$

نكتب المعادله على الصوره

Sol:-

$[(x + 2)\ D^2 - (2x + 5)\ D + 2\ ]\ y = 2\ (x+ 2)^2\ e^{2x}$ ……(1)

$D=d/dx$ حيث

و بتحليل الطرف الايسر للمعادله (1) تصبح على الصوره :

$(\ (x + 2)\ D - 1\ )\ (D - 2)\ y = 2(x+ 2)^2\ e^{2x}$ ……(2)

نفرض ان

$(D-2)\ y = z$ ….(3)

و بالتعويض من (3) في (2) نحصل على

$\therefore ((x + 2)\ D - 1\ )\ z = 2\ (x+ 2)^2 e^{2x}$

بالقسمه على (x+2) تصبح

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x+2} z = 2(x+2)e^{2x} \ldots\ldots\ldots (4)$$

باستخدام عامل التكامل $e^{-\int \frac{1}{x+2}dx} = \frac{1}{x+2}$

وعليه فان $\int \frac{1}{x+2}\, 2(x+2\,)e^{x}dx = e^{2x}$

$\therefore \frac{1}{x+2} z = e^{2x} + c_1$

$\therefore z = (x+2)e^{2x} + c_1(x+2) \quad \ldots\ldots.(5)$

بالتعويض من (5) في (3)

$\therefore (D-2\,)y = (x+2\,)e^{x} + c_1(x+2)$

وهي معادله تفاضليه خطيه من الرتبه الاولى و يكون عامل التكامل هو

$\mu = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$

$$= \int e^{-2x}\,[\,(x+2)e^{2x} + c_1(x+2)]dy$$

$$= \frac{1}{2}(x+2)^2 + c_1\left[\frac{e^{-2x}}{-2}(x+2) - \frac{e^{-2x}}{4}\right]$$

$\therefore$ الحل العام يكون

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 e^{2x} - \frac{1}{4}c_1(2x+5) + c_1 e^{2x}$$

مثال :- بطريقة التحليل المؤثر التفاضلي اوجد الحل العام : [2]

$y'' - 3y' + 2y = e^x$

sol:-

نحول المعادله الى صيغه الموثر التفاضلي

$(D^2 - 3D + 2) y = e^x$

$D^2 - 3D + 2 = 0$ نعتبر المعادله المتجانسه

$r^2 - 3r + 2 = 0 \longrightarrow (r-1)(r-2)=0$

$r=2 , r=1$ اذن

$y_n = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

نوجد الحل الخاص باستخدام المؤثر التفاضلي يجب ان تقسم المعادله الاصليه على المؤثر :

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} * e^x$$

بما ان الطرف الايمن e^x يجب ان نجد قيمة الجذور

$\frac{1}{D^2-3D+2} = \frac{1}{(D-1)(D-2)}$ اذن

بالتحليل نفك الكسور

$$\frac{1}{(D-1)(D-2)} = \frac{A}{D-1} + \frac{B}{D-2} = \frac{A(D-2) + B(D-1)}{(D-1)(D-2)} = 1$$

عندما D=1

$A(1-2) = 1 --\rightarrow A = -1$

عندما D=2

$B(2-1) = 1 ---\rightarrow B = 1$

$\frac{1}{(D-1)(D-2)} = \frac{-1}{D-1} + \frac{1}{D-2}$ اذن

$y_p = (\frac{-1}{D-1} + \frac{1}{D-2}\ )\ e^x$ بتطبيق المؤثر

$$y_p = \frac{-1}{(1-1)} * e^x + \frac{1}{(1-2)} * e^x \ = 0 - e^x$$

$\therefore y_p = \ -e^x$

❖ **طرق المعاملات غير المعينه :-** [3]

وهو أحد الأساليب الشهيرة لحل هذا النوع من المعادلات يتم استخدام هذه الطريقة مع المعادلات التفاضليه الخطية ذات المعاملات الثابتة

$$a\ \frac{d^2y}{dx^2} + b\ \frac{dy}{dx} + Cy = g(x)$$

حيث $a,b,c \neq 0$

ثوابت حقيقية اختيارية والحد المتجانس $g(x)$ وهو داله عامة في x قد تكون دالة أسيه e^{ax} أو كثيرة الحدود $(a_0x^n+\ldots+an)$ او داله $(\cos\beta x\ ,\ \sin\beta x)$

ونعلم من النظرية(7) إن الحل العام $y(x)$ للمعادلة التفاضليه الخطية غير المتجانسه ويتكون من مجموع حلين:

1-الحل العام المتجانس أو المتمم $y(x)$ للمعادلة الخطية المتجانسه

2- أي حل خاص $y_p(x)$ للمعادلة الخطية غير المتجانسه أي ان

$y(x)= y_n(x) + y_p(y)$

مثال[3] :- جد الحل الخاص للمعادله التفاضليه $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

Sol:-

1- لايجاد الحل الخاص للمعادله $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

2- يجرب حلاً خاصاً على الصورة $y_p=Ax^2$

حيث A ثابت ضربي يراد تعيينه بالتعويض من (1) و (2)

$2A - 6Ax - 4Ax^2 = 4x^2$ …………(3)

و حتى تتحقق هذه المتطابقه لجميع قيم X يجب ان تتساوى معاملات قوى X المختلفه على الطرفين للمعادله

$(2A=0\ ,\ -6A=0\ ,\ -4A=4\ )$

ولا يمكن ان يحقق الثابت الاختياري A هذه المتطابقات الثلاثة في ان واحد وعليه فان غير ممكن ايجاد حل خاص للمعادله (1) من الشكل (2) $y_p = Ax^2$

مثال :- جد الحل الخاص للمعادله الاتيه : [3]

$$y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

الحل/ يجب اولاً البحث عن الحل المتجانس للمعادله المتجانسه

$$y''' - 4y' = 0$$

وهي معادله من الترتبه الثالثه ذات معاملات ثابته

باستخدام المعادله المميزة $m^3 - 4m = m(m^2 - 4) = 0$

وجذورها هي $m_1 = 0\ ,\ m_2 = 2\ ,\ m_3 = -2$

و يكون الحل المتجانس $\longleftarrow$ $y_n = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$

وبأستعمال مبدأ التراكيب يمكن كتابة الحل الخاص للمعادلة :-

$$y''' - 4y' = x\ ,\ y''' - 4y' = 3\cos x\ ,\ y''' - 4y' = e^{-2x}$$

للمعادله الاولى نفترض $\longleftarrow$ $y_{p1} = A_1 x + A_0$

نضرب الثابت (x) بالمعادله $y_{p1} = x(A_1 x + A_0)$

نفرض المعادله الثانيه $\longleftarrow$ $y_{p2}(x) = B\cos x + C\sin x$

ولا نغير هذه الصيغه لان $\sin x\ ,\ \cos x$ ليست حلول للمعادله المتجانسه

اما بالنسبه للمعادله الاخيره فنلاحظ e^{-2x} هو حل للمعادله لذلك لنفرض $y_{p3} = D\,x\,e^{-2x}$

اذن $A_1 = -\frac{1}{8}\ ,\ A_0 = 0\ ,\ B = 0\ ,\ C = -\frac{3}{5}\ ,\ D = \frac{1}{8}$

اذن الحل الخاص هو :-

$$y_{p(x)} = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{5}\sin x + \frac{1}{8}\,x\,e^{-2x}$$

الفصل الثالث

(تطبيقات عن المعادلات التفاضليه ذات الرتب العليا في العلوم الطبيعيه في الفيزياء و الكيمياء و البايولوجيه و الهندسية و غيرها)

تدخل المعادلات التفاضليه في شتى منحنيات العلوم الهندسية والفيزيائيه ولقد اعطينا عدة تطبيقات ومنها

- **التطبيقات الفيزيائية :**

مثال [3]: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث عجلته تساوي ثلاثة امثال سرعته فإذا كان بعده عند لحظة البداية عن نقطة الأصل متر واحد وكان سرعته الابتدائية (1.5m/s) أوجد الزمن الذي يصبح عنده على بعد (10m) من نقطة الأصل؟

الحل :- ليكون بعد الجسم عن نقطة الأصل عند اللحظة t هو x وبالتالي تكون سرعته هي dx/dt وعجلته d^2x/dt^2

عند هذه اللحظة $d^2x/dt^2 = 3\, dx/dt$

وهذه معادلة تفاضليه من المرتبة الثانية فيها المتغير التابع x و المتغير المستقل t وهي خالية صراحة من المتغير التابع و المتغير المستقل

حيث أن : $x(t)$ هو البعد عن نقطة الأصل عند الزمن t

$$x(t) = C_1 + C_2\, e^{3t}$$

و لايجاد الحل العام سوف نستخدم الشروط الابتدائية

عندما $x(0)=1\ ,\ t=0$

اذن السرعه الابتدائيه عندما $t=0 \longrightarrow dx/dt\ (0) = 1.5\ m/s$

الشرط الاول :

عندما t=0 نعرف ان $x(0)=C_1 + C_2 e^o = C_1 + C_2 =1$

اذن $C_1 + C_2 = 1$

الشرط الثاني :

السرعة هي $dx/dt = 3C_2 e^{3t}$

عندما t=0 السرعه الابتدائيه هي $dx/dt (0)= 3 C_2 = 1.5$

اذن $C_2 = 0.5$

اذن من المعادله

$C_1 + C_2 =1$

$C_1+0.5=1$

اذن $C_1 =0.5$

اذن الحل العام للمعادله يكون $x(t) =0.5 + 0.5 e^{3t}$

لنحسب الزمن عندما يكون البعد 10 متر $\longrightarrow$ $x(t) = 10$

$x(t)= 0.5 + 0.5 e^{3t}$

$10 = 0.5 + 0.5 e^{3t}$

بأخذ النظير الجمعي للعدد (0.5) للطرفين

$^-0.5 + 10 = \cancel{0.5} + (\cancel{^-0.5}) + 0.5 e^{3t}$

$9.5 = 0.5 e^{3t}$

نقسم على (0.5)

$19 = e^{3t}$

ناخذ اللوغارتم الطبيعي للطرفين $\ln(19) = 3t$

اذن $t = \frac{\ln(19)}{3}$

الزمن على بعد ١٠ متر $t \approx \frac{2.944}{3} \approx 0.9813$

❖ التطبيقات الكيميائيه : [7]

تؤدي التفاعلات الدراسات الكيميائية إلى معادلات تفاضليه سوف نعتبر التفاعلات خلال ثبات درجة الحرارة والضغط ونحن ندرس نظام مغلق أي النظام الذي لا يضاف إليه ولا يسحب منه أي مادة أو منتج خلال عملية التفاعل إذا تغير جزيء من S_1 إلى جزيء واحد من p فإننا نكتب $S_1 \rightarrow P$ واذا جزيء واحد من S_1 و جزيء واحد من S_2 اتحدا لإعطاء جزيء واحد من p فإننا نكتب $S_1+S_2 \rightarrow P$ وهكذا .

وترتيب التفاعل هو وصف لحركة الجزيئات فإنها تعرف كم حدود التركيزات يجب ضربها مع بعض للحصول على تعبير لكل من معدل وسرعة التفاعل

للتفاعل من الرتبه الأولى تكون السرعة تتناسب مع تركيز واحد فمثلا في $S_1 \xrightarrow{k} p$

فاذا كان S_1 التركيز مول / لتر (moles / letar) ل S_1 , p هو التركيز مول / لتر p فان

$$dp/dt = KS_1$$

و بالمثل للتفاعل $S_1+S_2 \xrightarrow{k} p$ من الرتبه الثانيه يكون $dp/dt = KS_1S_2$

و في التفاعل الثلاثي يكون

$$S_1 + S_2 \xrightarrow{K_1} x \quad , \quad x + S_3 \xrightarrow{K_2} p$$

والذي سرعته تكون

$$dx/dt = K_1\, S_1\, S_2 - K_2\, X\, S_3 \;,\; dp/dt = K_2\, X\, S_3$$

والان نعتبر التفاعل $S_1 + S_2 \longrightarrow p$ اي ان جزيء واحد من S_1 و جزيء واحد من S_2 تغيرا الى جزيء واحد من p حيث ان التركيزات يعبر عنها دائماً مول/ لتر وان النظام مغلق فان تركيز $S_1 + p$, $S_2 + p$ يبقى ثابتاً اثناء التفاعل اي ان $S_1 + p \equiv q_1$, $S_2 + p \equiv q_2$

و بلتالي $dp/dt = K\, S_1\, S_2 = K\,(q_1 - p)\,(q_2 - p)$ اي ان معادلة السرعه يمكن اختزالها الى معادله تفاضليه في p

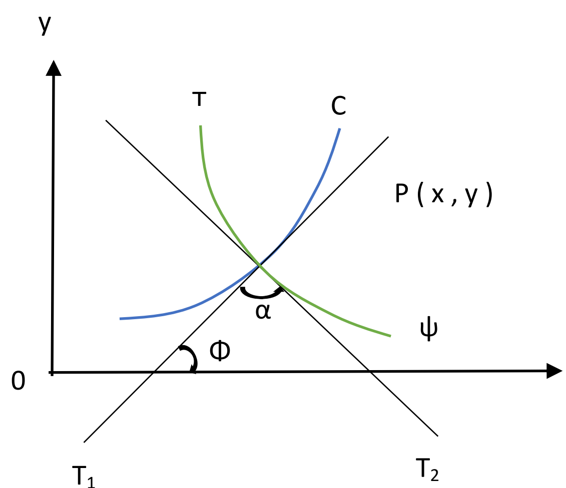
❖ **تطبيقات هندسيه : [3]**

إن كل علاقة من الشكل $F(x,y,\grave{y})=0$ فهي معادلة تفاضليه من المرتبة الأولى وواضح أنها عبارة عن علاقة مابين احداثيات نقطة ما مثل$\mu(x,y)$ وميل المماس للمنحني المار من تلك النقطة وكل منحنى يمر من النقطة μ و ميل مماسه يحقق المعادلة التفاضليه فهو منحني تكاملي .ومن ذلك نستنتج أن المعادلة التفاضلية هي علاقة بين إحداثيات نقطة من منحنى وميل المماس لهذا المنحني في تلك النقطة.

اذن كل مسألة هندسية تتعلق بأحداثيات النقطة و ميل المماس فيها هي معادلة تفاضليه من الرتبة الأولى.

(٣) مثال:- جد طائفة المنحنيات التي يكون طول جزء المماس لكل عضو فيها من نقطة التماس إلى محور y مساوية للجزء المقطوع من محور y بهذا المماس

الحل/



من الشكل نرى ان الجزء المقطوع بلمماس من محور y هو $y - x\grave{y}$ و طول المماس من نقطه (x , y) الى المحور y هو $[\,x^2 + (x\,\grave{y})^2]^{1/2}$

وعليه $[\,x^2 + (x\,\grave{y})^2]^{\frac{1}{2}} = y - x\,\grave{y}$

بلتربيع و الاختصار نجد ان :-

$$x^2 + (x\,\grave{y})^2 = y^2 - 2x\,y\,\grave{y} + x^2\,\grave{y}^2$$

$$= dy / dx = \grave{y} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

نلاحظ ان هذه المعادله انها متجانسه من الدرجه صفر حلها $y^2 + x^2 = Ax$ علماً ان

Φ = زاوية ميل مماس المنحني C

ψ = زاوية ميل مماس المنحني T

❖ **تطبيقات بايولوجيه :- [3]**

التطبيقات البايولوجيه للرياضات و بلتحديد للمعادلات التفاضليه و النمذجه الرياضيه لها دور كبير في فهم العمليات الحيويه و تستخدم لوصف كيفيه تغيير الانظمه البايولوجيه بمرور الوقت .

مثال[3] :- معدل تزايد بكتيريا يتناسب و العدد اللحظي للبكتيريا فاذا تضاعف العدد الاصلي للبكتيريا في ساعتين فبعدي زمن يصل العدد الى ثلاث امثال ؟

الحل :-

معدل التغيير في العدد N يتناسب مع العدد الخطي للبكتيريا $dN / dt = kN$

نفترض $N(t) = N_0 e^{kt}$ حيث N_0 هو العدد الاصلي للبكتيريا عندما $t=0$ و e هو الاساس الطبيعي للوغارتم اذن تضاعف العدد N_0 في ساعتين

$N(2) = 2 N_0$

$2 N_0 = N_0 e^{kt}$

$2 = e^{kt}$

$Ln(2) = 2k \longrightarrow k = \ln(2)/2$

وعند الوصول الى ثلاثة اضعاف العدد الاصلي نحتاج الزمن t الذي عنده

$N(t) = 3 N_0$

$2 N_0 = N_0 e^{kt}$

$3 = e^{kt}$

$Ln(3) = Kt$

$Ln(3) = \frac{\ln(3)}{2} t$

$$\therefore t = \frac{2\ln(3)}{\ln(2)}$$

بتقريب الزمن $Ln(2) \approx 0.693 \quad , \quad Ln(3) \approx 1.099$

$$\therefore t = \frac{2*1.099}{0.693} \approx 3.17$$

سيصل العدد الى ثلاثه اضعاف العدد الاصلي اي حوالي 3 ساعات و 10 دقيقه .

❖ المصادر :-

(1) اس فالرو ، المعادلات التفاضليه الجزئيه ، ترجمه د. مها الكبيسي ، جامعة عمر المختار ، ليبا٢٠٠٥م

(2)حسن مصطفى العويضي ، المعادلات التفاضليه الجزء الثاني ، مكتبة الرشد ، الرياض ، المملكه السعوديه ٢٠٠٥ م

(3)عايش الهنداوي ، اسماعيل بوقفه ، المعادله التفاضليه العاديه حلول و تطبيقات ، جامعة العلوم و التكنولوجيا ، جمهوريه اليمن ٢٠١٠ م

(4) فؤاد حمزه عبد ، جامعة بابل ، كلية العلوم ، قسم الكيمياء المرحله الثانيه ، محاظرات الرياضيات للعام الدراسي ٢٠١٥م

(5) زيد الامير ، المعادلات التفاضليه ، حلب مديرية الكتب و الطبوعات الجامعيه ، الطبعه الاولى ، ١٩٨٥م

(6) العويضي و عبد الوهاب ، عباس رجب و سناء علي زرع ، المعادلات التفاضليه الجزء الاول ، جامعة الازهر ، مكتبة الرشد ، الرياض ، ٢٠٠٥ م

(7) ابو الفتح ، عفاف ، فهمي عبد الشافي ، مصطفى محسن ، المعادله التفاضليه و اهميتها و تطبيقاتها ، دار الفكر العربي القاهره ، ٢٠١٠م

(8) د.مجدي امين كتبي ، د.مروان امين كتبي ، " المرشد لحل المعادلات التفاضلية مكتبة الملك فهد ، جده ، السعوديه

(9) صالح عبدالله سنوسي ، مبادئ التحليل الحقيقي / الجزء الثاني ، مطابع جامعة الملك سعود ١٩٩٧م