جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـــامعة ميسان/ كليـــة التربية
قسم الرياضيات/ الدراسة المسائية

# المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة وغير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

**بحث مقدم**

**الى مجلس كلية التربية /جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات**

**إعداد الطالبة**

أسيا رحيم زهراو

**بإشراف**

**د. محمد جبار**

**2024م.** **1445هـ.**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(يرفع الله الذين امنو منكم والذين آوتو العلم درجات والله بما تعملون

خبير)

صدق الله العظيم

سورة المجادلة: الآية (١١٠)

# الاهداء

إلى ملاكي المستتر وعالمي المفترض . . .الى سر الوجود لوجودي . . .

الى واحة الحب النظرة الى عبير الحنان والتفاني الى بسمه الوجود

وريحانه الأمل . . الى دواء الجرح الذي لا يندمل الا براحه يديه المباركة

الى شمعه الحياة التي تربطني بالحياة . . . الى ينبوع الحب المقدس

الى زرقة السماء وعذوبه الماء الى الصوت الفيروزي الذي

استيقظ على لحن إيقاعه -- الى من أطفى زهرة شبابه لأكون

حيثما أنا الان . . الى قدوتي وحنيتي الى والدي الغالي .

# شكر وتقدير

لتقف الكلمات الحائرة في التعبير عن مكنون النفس من عظم الامتنان من قدم العون في الأشراف والتوجيه ليحظى هذا العمل بقبس من ضياء فجزيل الشكر والإحسان للأستاذ د. محمد جبار لما قدمه من جهد للبحث والباحثين حتى وصل على ما هو عليه واشكر تعاونه الكبير أطيب أثر في شحذ همتي لإنجاز هذا العمل . . . .

كما أقدم شكري وامتناني لجميع في قدم لي يد العون والمساعدة في اكمال بحثي وخروجه في هذه الصورة البهية سواء كان من أهلي أو اصدقائي أو زملائي في الجامعة .

# المحتويات

## المقدمة:

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على رسول الله محمد (ص) الحمد لله في السراء والضراء وفي كل وقت وحين والحمد لله الذي يسر لنا البدء بكتابه هذا البحث والذي سوف نسلط الضوء فيه على ( المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة ) معتمداً في مجموعة من العناوين الرئيسية التي تتعلق في هذا الموضوع معتمداً على المنهج العلمي ومستعيناً بأهم المراجع والمصادر التي يتعلق بهذا الموضوع ونسأل الله رب العالمين التوفيق- تم تسليط الضوء في الفصل الأول على المحاولات التفاضلية و أضافها وانواعها ومجموعة في التعاريف في أهم المراجع والمصادر المعتمدة وكذلك أخذ مجموعه لا بأس بها في الأمثلة وكذلك تم التطرق إلى المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى.

أما الفصل الثاني مكان كل المواضيع تتعلق بالمعادلات التفاضلية المتجانسة والغير متجانسة وطرق حلها وكيفية كتابه المعادلة التفاضلية.

أما الفصل الثالث فكان من اهم الفصول لاته آخر يمين الاعتبار المحاولات التفاضلية الخلفية في الرتبة الثانية وطرق الكل الطريقة المتسلسلات.

نتمنى أن تكون وفقنا في اداء الواجب الموكلين فيه والله المستعان.

# الفصل الأول

# الفصل الأول

# مفاهيم المعادلة التفاضلية

## [1-1] تعاريف مهمة:

لِنستعرض مجموعة من التعاريف المهمة والتي تعتبر كمدخل للمعادلات التفاضلية المتجانسة.

### [1-1-1] تعريف[3]:

المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير التابع $x$ ومشتقاته والمتغير المستقل $t$ .

**مثال (١):** اكتب المعادلة التفاضلية التي تمثل منحنى الدالة $y = f(x)$ والتي يكون فيها جعل المماس للمنحني عند أي نقطه$(x, y)$ مساوياً لمجموع بعدي النقطة عن المحورين $x, y$

**الحل:**

ميل المماس عند اي نقطة هو $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

ومجموع بعدي النقطة عن المحاور هو $(x + y)$ وعلى ذلك يكون:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = x + y$$

**مثال (٢):** اكتب لمعادلة التفاضلية التي تمثل حركه جسم يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير عجله تتناسب عند أي لحظة مع سرعه الجسم وثابت التناسب هو λ

**الحل:**

نفرض ان الجسيم يتحرك على المحور هو x وآن هو $t$ تمثل الزمن، سرعه الجسم هي

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ وعجلته $\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$ والمعادلة التفاضلية للحركة هي:

$$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = \lambda \frac{dy}{dx}$$

## [2-1-1] تعريف[3] :

حل المعادلة (بصفة عامة) هو ايجاد المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل بحيث يكون ومشتقته تحقق المعادلة التفاضلية.

## [3-1-1] تعريف[1] :

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة اعلى مشتقة فيها وعلى ذلك تكون المعادلات (1), (3), (7) من الرتبة الاولى والمعادلات (2), (5), (6) من رتبة الثانية والمعادلة (4) من الرتبة الثالثة.

## [4-1-1] تعريف[1] :

درجة المعادلة التفاضلية هي درجة اس اعلى مشقة منها وعلى ذلك فان المعادلات (1), (3), (2) ,(4) ، (6) من الدرجة الأولى والمعادلة (5) من الدرجة الأولى والمعادلة (7) من الدرجة الثالثة.

## [5-1-1] تعريف[1] :

يقال ان المعدلة التفاضلية خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته كمقادير من درجة الاولى اي لا يوجد فيها

حدود بالصورة $y^2y^3$ , $yy'$ أو ... , $(y')^2, (y'')^2$

## [6-1-1] تعريف[1] :

يقال إن المعادلة التفاضلية متجانسة إذا كان لا يوجد بها حد أو أكثر يحتوي على المتغير المستقل فقط، اما اذ كان بها او أكثر يحتوي على متغير مستقل فقط فأن المعادلة تكون غير متجانسة (2) لذا فالمعادلة (1) و (3) نظر لوجود $x$ غير متجانسة لاحتواها على $x^2+1$ والمعادلة (5) غير متجانسة لاحتواها $\ln x$

والمعادلة (4) غير متجانسة لاحتواها على $cos$ اما المعادلات (2), (6), (7) فهي المعادلات المتجانسة.

**مثال [3]:**

( 1 ) حل المعادلة التفاضلية (1)هو $x = at + c$

وذلك لاي ثابت c لأن $\frac{dy}{dt}$ , $x$ تحقق المعادلة (1)

( 2 ) حل المعادلة التفاضلية (2)هو

$$x = C_1 e^{\sqrt{\beta}t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta}k}$$

حيث $C_2$و $C_1$ مقادير ثابتة وذلك لأي $\frac{d^2y}{dt^2}$ و $x$ تحقق المعادلة (2)

( 3 ) حل المعادلة التفاضلية (3)بالصورة $y = ce^x - (1 + x)$

وذلك لأي مقدار ثابت c.

تحقق من أن $y\frac{dy}{dx}$ ، تحقق المعادلة (3)

## [2-1] تصنيف المعادلات التفاضلية[3] :

لنأخذ في الاعتبار المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $\frac{dy}{dx} = x + y$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $xy' + y^2 = x^2 + 1$
4. $(y'')^2 + x^3 y.y'' + y\cos x = 1$
5. $y'' + 2(y')^4 + yy' = \ln x$
6. $(xy')' + e^x y = 0$
7. $y^3(y')^3 + xy^6 = y$

## [3-1] الحل العام المعادلة التفاضلية[3] :

**تعريف (1) [1]:**

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت مساوية لرتبة المعادلة.

ويلاحظ ان المعادلة (1) من الرتبة الاولى لذلك فان (2) هو حلها العام لاحتوائه على ثابت واحد ولفهم العلاقة بين الحل العام وبقيه الحلول نرسم معادلات الخطوط المستقيمة وذلك بإعطاء قيم مختلفة للثابت c.

تعود الان الى المحاولة التفاضلية الأتية $\frac{dy}{dt} = 2 \ldots\ldots\ldots (1)$

تلاحظ ان الدالة $x_1 = 2t$ ومشتقتها الاولى تحقق المعادل (1) حسب تعريف الحل.
كذلك فإن المعادلة $x_2 = 2t + 1$ ومشتقاتها تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك أيضا حل (مجرد حل) يحقق المعادلة (1) وكذلك $x_3 = 2t - 5$ مجرد حل وهكذا يوجد عدد لانهائي من الدوال كل منها مجرد حل وعموماً فأن: - $x = 2t + c \dots \dots (2)$ ...
(حيث c ثابت اختياري) هي ايضا حل ولكنه يختلف عن $x_1$ و $x_2$ و $x_3$ لأنه يمكن الحصول على $x_1$ و $x_2$ و $x_3$ بوضع $c = 1, c = 0, c = -5$ على الترتيب بينما لا يمكن الحصول على $x_1$ من $x_2$ و $x_3$ وهكذا لذلك فان $x$ تسمى بالحل العام للمعادلة (1) وذلك لأنه يمكن الحصول على جميع الحلول الأخرى.

**مثال [1]:** أوجد الحل الوحيد للمعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos \chi}{1+2y^2}$

حيث $y(0) = 1$

$$\left(\frac{1+2y^2}{y}\right) dy = \cos x \, dx$$

وبأجراء التكامل للطرفين

وبالتعويض بالشرط

$$0 + 1 = \sin(0) + c$$

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + 1$$

[4-1] معادلات على الصورة [1] $y' + p(x)y(x) = 9(x)$

**مثال:** أوجد الحل الوحيد للمعادلة

$$y' - 2xy = x$$

$$P(x) = -2x \ , \ 9(x) = x$$

على ذلك يكون

$$u(x) = exp \int^x p(t)\, dt = exp \int^x -2t dt = \exp(-x^2) = e^{-x^2}$$

$$y(x) = \frac{1}{M(x)}\left[c + \int^x te^{-t^2}\right]$$

$$= e^{x^2}\left[C - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right]$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة.

## [4-1] المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الاولى [2]:

نقول ان المحاولة التفاضلية الجزئية من المرتبة الاولى خطية إذا أمكن كتابتها على شكل

$$P(x,y)\frac{du}{dx}+Q(x,y)\frac{du}{dy}=R(x,y)\ \dots\dots\dots(1)$$

يمكن الفطر الى الطرف الاسير من هذه المعادلة على انه الجداء السلمي للمتجه (P,Q)

بتدرج التابع السلمي u, $\text{Grade}u=\left(\frac{du}{dx},\frac{du}{dy}\right)$ هذا يعني ان التتابع $u(\mathrm{x},\mathrm{y})$ (حل المعادلة) هو ذلك

التابع الذي يكون المماس لمنحني البياني في كل نقطه.

من نقطه موازيا للمتجه(P,Q) يمكن التعبير عن المنحني الذي يكون المماس لمنحني في كل نقطه منه موازيا للشعاع (P,Q) وسيعطينا بجملة المعادلتين

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,y)\\ \frac{du}{dy}&=Q(x,y)\end{aligned}\right\}\ \dots\dots(2)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$dt=\frac{dx}{p(x,y)}=\frac{dy}{ch(x,y)}\ \dots\dots\dots(3)$$

وبفرض ان التابع $u=u(x(t),y(t))$ هو حل للمعادلة (1)عندئذ

$$\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=P(x,y)\frac{du}{dx}+Q(x,y)\frac{du}{dy}=R(x,y)$$

اي أن $\quad dt=\frac{du}{R}$

وبأخذ الجملة $(3)$ بعين الاعتبار تحصيل على جملة المعادلات التفاضلية

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R}\dots\dots\dots(4)$$

وهكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة التالية.

**مثال [2]:** عين الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=2xy$$

الحل: نشكل جملة المعادلات لمساعدة

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}}=\frac{du}{2\mathrm{xy}}$$

وسهوله نعين التكاملين الأوليين $\frac{y}{x}=c_1$

$$xy-M=c_2$$

وبالتالي فان الكل العام للمعادلة هو

$$F\left(\frac{y}{x},xy-M\right)=0$$

حيث ان $F$ تابع اختياري قابل للاشتقاق و هنا نلاحظ أنه يمكن كتابه الكل العام بالشكل

$$u=xy+f(\frac{y}{x})$$

**مثال [2]:** عين الحل العام للمعادلة

$$\mathrm{y}\frac{du}{dx}-x\frac{du}{dy}=0$$

**الحل:** جملة المعادلات المساعدة هي $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{y}}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{x}}=\frac{du}{0}$

يمكن التأكد ان $u=c_1$ , $\mathrm{x}^2+y^2=c_2$ هما تكاملين آوليين لجملة المساعدة

$$F(U,\mathrm{x}^2+y^2)=0$$

حيث ان $F$ تابع اختياري قابل للاشتقاق أو بالشكل المكافئ

$$M=F(\mathrm{x}^2+y^2)$$

## [5-1] حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى:

### تعريف الدالة المتجانسة Homogeneous Function:

يقال للمعادلة $f(x,y)$التابعة للمتغيرين $x,y$ بأنها متجانسة من الدرجة $n$ إذا تحققت العلاقة

$$f(x,y)=t^nf(x,y)$$

حيث $\mathrm{t}\neq 0$ عدد حقيقي... $n=0$ ، فان الدالة متجانسة منن الدرجة صفر.

لمعرفة كون الدالة متجانسة ام لا يمكن اخراج $t$ عامل مشترك بعد تبديل كل من $(x,y)$

ب $(tx,ty)$وتعود الدالة كما هي.

وكمثال على ذلك فالدالة $f(x,y) = x^3 - xy^2$ تكون متجانسة من الدرجة الثالثة لأن

$$f(tx,ty) = (tx)^3 - (tx)\,(ty)^2 = t^3(x^3 - xy^2) = t^3\, f(x,y)$$

أما الدالة $f(x,y) = e^{y\backslash x} + sin\left(\frac{2y}{x}\right)$ فهي متجانسة من الدرجة صفر لأنها عندما تعوض بدل كل من $(x,y)$ ب $(tx,ty)$ ستحقرر $t$ وتحذف $y$ أما الدالة $f(x,y) = x + sin\, y$ فهي دالة غير متجانسة.

يقال للدالة التفاضلية من الرتبة الاولى والتي على الصورة

بأنها متجانسة إذا كانت كل من $M, N$ دالة متجانسة وفى نفس الرتبة.

**خطوات على المعادلة التفاضلية المتجانسة**

(1) نفرض $y = vx$

(2) تشق (1) بالنسبة لـ $x$ فتحصل $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = v + x\frac{du}{dx}$

(3) تضرب المعادلة $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = v + x\frac{du}{dx}$ بالمقدار $dx$ لنحصل على $dy = vdx + xdv$

(4) نعوض قيمتي $y, dy$ في المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة قابله لفضل المتغيرات والتي من السهل استنتاج حل لها.

# الفصل الثاني

# الفصل الثاني

# حل المعادلات التفاضلية

## [1-2] حل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة والمتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

المعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة من الرتبة n ذات العاملات الثابتة تكون على الصورة

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

حيث ان $a_0, a_{n-1}, a_n$ ثوابت

$f(x)$ داله متصلة في نطاق تعريفها وباستخدام المؤثر $D$ فان الصورة الرمزية للمعادلة هي

$$Q(D) = f(x) \ldots\ldots.(1)$$

حيث $Q(D)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة n في D

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (1) نتبع الخطوات التالية:

( 1 ) نوجد حل للمعادلة المتجانسة المناظرة $Q(D)y = 0$ ترمز للحل الناتج بالرمز $y_H$ اي ان $y_H$ يحقق المعادلة المتجانسة فقط.

( 2 ) نوجد حلا خاصا نرمز له بالرمز $y_p$ ويحقق المعادلة (1)

( 3 ) توجد الكل العام $y_G$ حيث $y_G = y_p + y_H$ بالطبع $y_G$ تحقق المعادلة (1)

ولأثبات ان $y_G$ تحقق المعادلة فأن

$$Q(D)y = 0$$
$$Q(D)yc = 0$$

$y_p$ تحقق المعادلة $Q(D)y = f(x)$ ولأثبات ان $y_G$ تحقق المعادلة $Q(D)y = f(x)$ فأن

$$Q(D)y_G = Q(D)[y_p + y_H] = Q(D)y_p + Q(D)y_H = 0 + f(x) = f(x)$$

## [2-2] انواع المعادلات التفاضلية [1]:

تعريف: يقال للعلاقة التي تتضمن مشتقات وتفاضلات لبعض الدوال الرياضية بالمعادلة التفاضلية وتظهر هذه الدوال بشكل متغيرات المعادلة وتقسم [4] الى عدة أقسامها:

( 1 ) المعادلة التفاضلية الاعتيادية (ODE)

هي المعادلات التي تحتوي متغير واحد او يسمى متغير تابع وليكن $y$ ومتغير مستقل واحد فقط وليكن $x$ ومن امثلتها

a) $\frac{d^y}{dx} = x + 1$

b) $y + 2\sin y = 1$

c) $(y')^2 + y = 5x$

( 2 ) المعادلات التفاضلية الجزئية (PPE)

هي المعادلات التي تحتوي متغير تابع أو متغيرين مستقلين أو أكثر ومن امثلتها

d) $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}$

e) $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$

رتبه المعادلات التفاضلية: (order of DE)

وهي اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية

درجة المعادلة التفاضلية: (Degree of DE)

وهي الأس او القوة لأعلى مشتقة تظهر في المعادلة بشرط ان تكون خالي من الجذور والكسور.

## [3-2] تكوين المعادلة التفاضلية [4] formation Differential equation:

إذا أعطينا الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة nنجد ذلك الحل يعتمد n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة $F(x,y)C_1, C_2, \dots, C_n = 0$

حيث $C_1, C_2, \dots, C_n$ثوابت اختيارية وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى تجرى n من المشتقات للمعادلة (1)ويكون لدينا n+1 من المعادلات التي عددها ٨ وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها تحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة وبصفه عامه يتم تكوين المعادلة التفاضلية بحذف الثوابت الاختيارية في الحل العام وذلك عن طريق الاشتقاق وعدد الثوابت المحذوفة يعدد رتبه المعادلة التفاضلية.

[1-3-2] **مثال [4]:** اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = C\, Sinx$ حيث C ثابت اختياري

**الحل:**

$$y = C\, Sinx \ldots\ldots (1)$$

**نفاضل المعادلة (1) مرة واحدة**

$$y' = C \cos x \ldots\ldots (2)$$

نحذف الثابت C من المعادلتين (1) , (2) ونقسم المعادلة(2) على المعادلة(1) وتكون المعادلة المطلوبة

$$y' = C \cot x$$

[2-3-2] **مثال [4]:** اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ حيث $C_1, C_2$ ثابتان اختياريان

**الحل:**

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \dots\dots (1)$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} \dots\dots\dots (2)$$

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} \dots\dots (3)$$

بضرب المعادلة$(1)$ في $(2)$ وطرح المعادلة $(2)$من$(3)$ نحصل على

$$y'' - 2y' = 3C_2 e^{3x} \Rightarrow C_2 e^{3x} = \frac{y'' - 2y'}{3} \dots\dots (4)$$

بضرب المعادلة$(2)$ في $(3)$ وطرح المعادلة $(3)$ من $(2)$نحصل على

$$3y' - 2^{y''} = 2C_1 e^{2x} \Rightarrow C_1 e^{2x} = \frac{3y' - y'^1}{2} \dots\dots (5)$$

*بالتعويض عن* $C_2 e^{3x}$ , $C_1 e^{2x}$ *قيم في المعادل*$(1)$*ة نحصل على*

$$y = \frac{3y' - y''}{2} + \frac{y'' - 2y'}{3}$$

$$y = \frac{9y' - 3y'' + 2y'' - 4y'}{6}$$

$$\Rightarrow 6y = 5y' - y''$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

## [4-2] المعادلة التفاضلية المتجانسة[4] :

يقال ان المعادلة التفاضلية $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$

متجانسة إذا كان كل من $N$ ، $M$ دوال متجانسة من نفس الدرجة علما بأن $f(x, y)$

داله متجانسة من الدرجة $n$ إذا كان $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) = KR$

### [1-4-2] مثال[4] :

اختبر تجانس الدالة $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$

**الحل:**

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x, y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$ دالة متجانسة من الدرجة (2)

**[2-4-2] مثال[5] :**

اختبر تجانس الدالة $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}$

**الحل:**

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2x^2-\lambda^2y^2}{\sqrt{\lambda x-\lambda y}}=\lambda^{3\backslash 2}f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$دالة متجانسة من الدرجة (3\2)

**[3-4-2] مثال[5] :**

اختبر تجانس الدالة $f(x,y)=\sqrt{3x-y^3}$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{3\lambda x-\lambda^3y^3}=\lambda^{1\backslash 2}f(x,y)\neq\lambda^n f(x,y)$$

$\therefore$ $f(x,y)$دالة غير متجانسة

**مبرهنة[5] :**

إذا كانت الدالتان $M(x,y),N(x,y)$ متجانستان من الدرجة n فأن الدالة $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ تكون دالة متجانسة من الدرجة صفر.

**البرهان**

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)}=\lambda^{\circ}\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$\therefore$ $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$دالة متجانسة من الدرجة صفر

## [5-2] طرق إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

### [1-5-2] المؤثر العكسي (inverse operator) [6]:

حيث ان $y_p$ يحقق المعادلة

$$Q(D)y = 0$$
$$Q(D)y_p = 0$$

باستخدام التأثير العكسي على الطرفين

$$\frac{1}{Q(D)} Q(D)y = \frac{1}{Q(D)} f(x)$$

$$y_p = \frac{1}{Q(D)} f(x)$$

وسوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{Q(D)}$ على الدالة $f(x)$ هي صور مختلفة.

١) إذا كان $f(x) = e^{ax}$

$$Q(D)e^{ax} = Q(a)e^{ax}$$

$$\therefore \frac{1}{Q(D)} Q(a)e^{ax} = \frac{1}{Q(D)} Q(D)e^{ax}$$

$$Q(a)\frac{1}{Q(D)} e^{ax} = e^{ax}$$

بالقسمة على $Q(a) \neq 0$

$$\frac{1}{Q(D)} e^{ax} = e^{ax}\frac{1}{Q(a)}, Q(a) \neq 0$$

إذا كان $f(x) = e^{ax}$

نعلم انه

$$D[e^{ax}v(x)] = e^{ax}Dv(x) + ae^{x}v(x)$$

$$D[e^{ax}v(x)] = e^{ax}[(D + a)v(x)]$$

ايضًا

$$= D^2[e^{ax}v(x)] = D\left[e^{ax}[(D + a)v(x)]\right]$$

$$e^{ax}[(D^2v(x) + aDv(x)] + ae^{x}(D + a)v(x)$$

وهكذا نجد

$$= e^{ax}(D + a)^2 v(x)$$

$$D^2[e^{ax}v(x)] = e^{ax}v(x) = e^{ax} = \frac{1}{Q(D+a)}v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $Q(D)$

$$Q(D)\frac{1}{Q(D)}e^{ax}\ v(x) = e^{ax}v(x)$$

$$= QD\left[e^{ax}\frac{1}{Q(D+a)}v(x)\ \right]$$

$$= e^{ax}Q(D+a)\frac{1}{Q(D+a)}v(x) = e^{ax}v(x)$$

٢) إذا كان $f(x) = c$ حيث cمقدار ثابت فأن

$$\frac{1}{Q(D)}\mathrm{c} = \frac{1}{Q(D)}ce^{ax} = c\frac{1}{Q(D)}\ , Q(a) \neq 0$$

$$(1)Q(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5 \Rightarrow Q(0) = 5$$

$$\therefore \frac{1}{Q(D)}\mathrm{c} = \frac{\mathrm{c}}{Q(D)} = \frac{C}{5}$$

$$(2)Q(D) = D^3 - 2D^2 + 6D = Q(0) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{Q(D)}\mathrm{c} = \frac{\mathrm{c}}{D^3 - 2D^2 + 6D} \Rightarrow \frac{1}{D}.\frac{1}{D^3 - 2D^2 + 6D}.c = \frac{1}{D}$$

٣) إذا كانت $f(x) = sin(ax+\beta), \cos(ax+\beta)$ فأن

$$\frac{1}{Q(D^2)} = \begin{cases} sin(ax+\beta) \\ \cos(ax-\beta) \end{cases} = \frac{1}{Q(-a^2)} = \begin{cases} sin(ax+\beta) \\ \cos(ax+\beta) \end{cases}$$

نعلم انه $D\ sin(ax+\beta) = a.\cos(ax+\beta)$

$$D^2\ sin(ax+\beta) = -a^2.\cos(ax+\beta)$$

$$D^3\ sin(ax+\beta) = -a^3.\cos(ax+\beta)$$

$$D^4\ sin(ax+\beta) = a^4.\cos(ax+\beta) = (-a^2)^2\ sin(ax+\beta)$$

نستنتج ان $(D^2)^k\ sin(ax+\beta) = (-a^2)^k.\cos(ax+\beta)$

# الفصل الثالث

# الفصل الثالث

## [1-3] حل المعادلات باستعمال المتسلسلات [1]:

### ١. استعمال متسلسلة تاير: -

$$y = \sum_{n=a}^{a} anx^n = a_0 + a_1x_1 + a_2{x_2}^2 + a_3{x_3}^3 + a_4{x_4}^4 + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=a}^{\infty} nanx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3{x_3}^2 + 4a_4{x_4}^3 + 5a_5{x_5}^4 + \cdots$$

$$y'' = \sum_{n=a}^{\infty} n(n-1)anx^{n-2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots$$

ثم نعوض $y, y', y''$ في المعادلة التفاضلية ونجد قيمة الثوابت $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

**[1-1-3] مثال[1] :** حل المعادلة التفاضلية $y' - y = 0$

$$y = \sum_{n=a}^{a} anx^n = a_0 + a_1x_1 + a_2{x_2}^2 + a_3{x_3}^3 + a_4{x_4}^4 + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=a}^{\infty} nanx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3{x_3}^2 + 4a_4{x_4}^3 + 5a_5{x_5}^4 + \cdots$$

ثم نعوض $y, y'$ في المعادلة التفاضلية $y' - y = 0$ نحصل على

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_3 - 4a_4)x^3 + (a_4 - 5a_5)x^4 + ..$$

$$(a_0 - a_1) = 0 \Rightarrow a_1 = a_0 \Rightarrow a_1 = -2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$(a_2 - 3a_3) = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_3}{3} = \frac{a_0}{2x^3} \Rightarrow a_3 - 4a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{4} \Rightarrow \frac{a_4}{2x^3x^4}$$

بالتعويض نحصل على $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$

## [2-3] طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الدرجة الثانية [7]:

**اولًا-الطريقة المباشرة Direct Method**

يمكن تعيين الحد العام لبعض المعادلات التفاضلية الجزائية الخطية بالمكاملة بالنسبة لاحد متحولاتها المستقلة بشكل مباشر.

**[1-2-3] مثال [7]:** عين الحل العام لمعادلة $\frac{d^2u}{dx^2} = x^3$ ثم عين الحل الذي يحقق الشرطين التاليين

$$u(0, y) = y^2$$

$$u(1, y) = \sin y$$

الحل:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = xe^3$$

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 e^y + \mathrm{g(y)}$$

حيث ان g(y) هو تابع اختياري للمتحول y فقط ويكامله طرفي المعادلة الناتجة مرة أخرى بالنسبة الى (x) نجعل ان

$$u(0, y) = \frac{1}{6}x^3 e^y + xg_1(y) + g_2(y)$$

ولتعيين الحل الخاص المحقق للشرطين

$$u(0, y) = y^2 = 0 + 0 + g_2(y)$$

$$y_2(y) = y^2 \Rightarrow m(1, y) = \sin y - y^2 \frac{1}{6} e^y \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 e^y + x\sin y - xy^2 - \frac{1}{6}xe^y + y^2$$

## ثانيًا- طريقة فروبنسون method of fobinins [5]:

**[2-2-3] مثال:** حل المعادلة التفاضلية التالية $4\mathrm{xy}'' + 2\mathrm{y}' + \mathrm{y} = 0$

$$\mathrm{y} = \mathrm{a_0x^c} + \mathrm{a_1x^{c+1}} + \mathrm{a_2x^{c+2}} + \cdots + ck\mathrm{x^{k+n}}, \mathrm{a_0} \neq 0$$

$$\mathrm{y}' = \mathrm{ca_0x^{c-1}} + (\mathrm{c}+1)\mathrm{a_1x^c} + (\mathrm{c}+2)\mathrm{a_2x^{c+1}} + \cdots + ck(k+n)\mathrm{x^{k+n-1}}$$

$$\mathrm{y}'' = \mathrm{c(c+1)a_0x^{c-2}} + c(\mathrm{c}+1)\mathrm{a_1x^{c-1}} + (\mathrm{c}+1)(\mathrm{c}+2)\mathrm{a_2x^c} + \cdots + ck(k+n)(\mathrm{k+n-1})\mathrm{x^{k+n-2}}$$

$$4\mathrm{xy}'' = uc(\mathrm{c}+1)\mathrm{a_0x^{c-2}} + c(\mathrm{c}+1)\mathrm{a_1x^{c-1}} + (\mathrm{c}+1)(\mathrm{c}+2)\mathrm{a_2x^c} +$$

$$2\mathrm{y}' = 2\mathrm{ca_0x^{c-1}} + (\mathrm{c}+1)\mathrm{a_1x^c} + (\mathrm{c}+2)\mathrm{a_2x^{c+1}}$$

$$y = 0 + a_0 x^c + a_1 x^{c+1} + \cdots$$

وبمساواة معاملات $x$ المختلفة القوى بالصفر

$$uc(c+1)a_0 + 2ca_0 = 0 \ldots..(1)$$

$$uc(c+1)a_1 + 2(c+1)a_1 + a_0 = 0 \ldots..(2)$$

$$(c+1)(c+2)a_2 + 2(c+2)a_c + a_1 \ldots..(3)$$

وباعتبار ان $a_0 \neq 0$ من المعادلة $(1)$ نحصل على

$$uc(c-1) + 2c = 0 \Rightarrow uc^2 - uc + 2c = 0 \ \Rightarrow uc^2 - uc0$$

$$2c(2c-1) = 0 \ \Rightarrow c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

من المعادلة $(2)$ نحصل على $a_1 = \frac{-a_0}{uc(c+1)+2(c+1)}$

من المعادلة $(3)$ نحصل على $a_2 = \frac{-a_0}{u(c-1)(c+2)+2(c+2)}$

**[2-2-3] مثال:** حل المعادلة التفاضلية التالية $xy'' + y' + xy = 0$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_2}^2 + a_3 {x_3}^3 + a_4 {x_4}^4 + \cdots$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 {x_3}^2 + 4a_4 {x_4}^3 + 5a_5 {x_5}^4 + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$

$$xy'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots (1)$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 {x_3}^2 + 4a_4 {x_4}^3 + 5a_5 {x_5}^4 + \cdots (2)$$

$$xy = 0 + a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_2}^2 + a_3 {x_3}^3 + a_4 {x_4}^4 + \cdots (3)$$

من المعادلات $(1), (2),(3)$

$$a_1 + (2a_2 + 2a_2 + a_0)x + (6a_3 + 3a_3 + a_1)x^2 + (12a_4 + 4a_4 + a_2)x^3$$

وبمساواة المعادلات المختلفة

$$a_1 = 0$$

$$2a_2 + 2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow\Rightarrow a_2 = -\left(\frac{1}{4}\right) a_0$$

$$6a_3 + 3a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\left(\frac{1}{9}\right)a_1 = 0$$

$$12a_4 + 4a_4 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\left(\frac{1}{16}\right)a_2 \Rightarrow a_2 = (\frac{1}{16})a_1$$

$$y = a\left(\frac{1}{u}\right)ax^2 + \left(\frac{1}{au}\right)a_2x^4$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{u}x^2\right) + \frac{1}{au}x^4$$

**[3-2-3] مثال:** حل المعادلة التفاضلية التالية $2\frac{du}{dt} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$

$$u(0,1) = 0, u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = 2\sin 3x - 5\sin 4x$$

**الحل:**بما ان متحولي المعادلة $x, t, u$ نضع $u(\pi,t) = X(x) - T(t)$

فاذا كانت $0 \geq \lambda$ومن النسبة الأولى والثانية والثابت$\lambda$ نجد المعادلة والتي حلها العام

$$2T' - \lambda T = 0 \Rightarrow T = Ce^{\left[\frac{\lambda}{c}\right]}$$

ومن النسبة الثابتة والثابت $\lambda$ نحصل على المعادلة $x'' - \lambda x = 0$

والتي حلها العام $x(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}$

وبالتالي فأن الحل العام للمسألة التفاضلية الجزئية المعطاة يصبح بالشكل

$$u(x,t) = \sqrt{\lambda x} + \frac{\lambda}{2}t = Bt^{e^{-\sqrt{2}x} + \frac{-1}{2}t}$$

ولتعين حل المعادلة المحققة للشرط الإضافي الأول نلاحظ

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x} \Rightarrow (A_1 + B_1)c^{\frac{\lambda}{2}t} = 0$$

$$\Rightarrow (A_1 + B_1) = 0\,, \qquad u(x,t) = A_1(e^{\sqrt{\lambda}x + \frac{\lambda}{2}t} - e^{-\sqrt{\lambda}x + \frac{\lambda}{3}t})$$

$$u(\pi,t) = 0 \Rightarrow A_1\left(e^{\sqrt{\lambda}x + \frac{\lambda}{2}t} - e^{-\sqrt{\lambda}x + \frac{\lambda}{3}t}\right) = Ae^{\sqrt{\lambda}x}(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$$

وبالتالي $at = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0$

$$\frac{2T''}{T} = \frac{x''}{x} = -\lambda^2$$

ومن النسبة الأولى والثابت λ نحصل على المعادلة

$$2T' + \lambda^2 T = 0$$

الحل العام

$$T = ae^{\frac{\lambda^2}{2}t}$$

ومن النسبة الثابتة والثابت $-\lambda^2$ نحصل على المعادلة

$$x'' + \lambda^2 x = 0$$

$x = A\cos\lambda x + R\sin 2x$ حلها العام

وبالتالي تصبح

$$u(x,t) = e^{\frac{\lambda^2}{2}t}(A_1\cos 2x + B_1\sin tx) = Bt^{e^{-\sqrt{2}x}+\frac{-1}{2}t}$$

ولتعين حل المعادلة المحققة للشرط الإضافي الأول نلاحظ ان

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow A_1 e^{\frac{\lambda^2}{2}t}(\mathrm{A}\cos 2\mathrm{x} + B_1\sin 2\mathrm{x})$$

أي ان الحل العام المحقق للشرط الأول هو $u(x,t) = B_1 e^{\frac{\lambda^2}{2}t}\sin tx$

ولتعين حل المعادلة المحققة للشرطين الإضافيين الأول والثاني نلاحظ ان

$$u(\pi,t) = 0 = B_1 e^{\frac{\lambda^2}{2}t}\sin\lambda\pi$$

$$n(\pi,t) = 0 = B_1 e^{\frac{\lambda^2}{2}t}\sin\lambda\pi$$

$\sin t\pi = 0$ أي ان $t = n$ حيث ان $n = \pm 1, \pm 2,$

$$u(x,t)B_1 e^{\frac{1}{2}n^2 t}\sin n\pi\,, n = \pm 1, \pm 2$$

وبما ان$u(x,0)$ $u(x,0) = 2\sin 3x - \sin nx = a\sin x$

$$a_2\, sin\, n_2 x$$

## ثالثًا - طريقه سلاسل فورييه (Method of Fourier series)[7]:

وجد بعض المسائل المؤلفة من معادلة تفاضلية جزئيه خطيه متجانسة ذات امثال ثابته وبعض الشروط الإضافية التي لا تستطيع تعيين حلها المحقق تجميع الشروط بالاعتماد على طريقه فصل المتحولات لتعين الكل المطلوب. لذا سنذكر الان تعريف وخواص سلاسل فورييه. إذا كان $f(x)$تابعاً حقيقياً دورياً دورة $2L$ ومعرفًا في المجال $(-L,L)$وكان مستمراً أو مستمراً جزئياً ومحدداً بالمجال$(-L,L)$ عندئذ يمكن نشر التابع وفق سلسله فورييه التي كما الشكل التالي ...

$$\frac{a_\circ}{2}1\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

حيث ان $b_n, a_n$أمثال متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ التي تتعين من التكاملين

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$\forall n=1,2,3,\ldots.$$

ملاحظة: اذا كان $f(x)$ تابعًا زوجيًا فان $b_n=0$ من أجل كل nتصبح متسلسلة فورييه للتابع بالشكل $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$

وتسمى المتسلسلة جيب تمام فورييه حيث ان

$$a_n=\frac{2}{h}\int_{0}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

إذا كان $f(x)$ تابعًا فرديًا فان $a_n=0$ من أجل كل nتصبح متسلسلة فورييه للتابع بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$

وتسمى المتسلسلة جيب فورييه حيث ان

$$b_n=\frac{2}{h}\int_{0}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

**[3-2-4] مثال [6]:** حل المسألة التالية

$$2\frac{du}{dt} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$$u(0,1) = 0, u(\pi, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(x, t) = Be^{\frac{1}{2}n^2 t} \sin nx \,, n = \pm 1, \pm 2$$

أما الشرط الثالث فيؤدي الى المعادلة التالية $to = \ u(x, t) = B \sin nx$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + e^{\frac{1}{2}n^2 - 1} \sin nx$$

وبالتالي يصبح الشرط بالشكل $f(x) = u(x, t) = to = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

وهذه المتسلسلة جيوب فورييه.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin nx \, dx = \frac{20}{\pi} \int_0^l \sin nx \, dx$$

$$= \frac{20}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{20}{\pi}$$

$$= \left[\frac{-\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\right] = \frac{20}{n\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$= b_n \left[\frac{40}{(2n-1)\pi}\right] = n = 2m + 1 = n = 2m$$

وبالتالي $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2m - 1,$

$$sin(2m + 1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

## المصادر:


1-أحمد درويش / المعادلة التفاضلية (٢) / منشورات جامعه دمشق / 1993

2-اسماعيل يوقفة، عايش المادة / المعادلات التفاضلية / حلول وتطبيقات الجمهورية الليبية / جامعه العلوم الطبعة الاولى ووفا

3-رشيد عبد الرزاق، معروف محمد حديد / المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها -وزارة التعليم العالي والبحث العلمي اليمن /1997.

4-روحي ابراهيم الخطيب، مقدمة في المعادلات التفاضلية دار النشر السيرة / الطبعة الاولى .٢٠١٢.

5-زياد عبد الكريم القاضي محمد خليل أبو زلاطة، مصباح جمعه عقيل تنظيم المعادلات التفاضلية والمعادلات الجزئية / مكتبه المجمع العربي للنشر والتوزيع 2012.

6-زياد عبد الكريم الغاضب لها محمد خليل ابو زلاطة، مصباح جمعه عقل -المعادلات التفاضلية مكتبية الجمع العربي للنشر والتوزيع /2009

7-حسين مصطفى العريفي، عبد الوهاب وجيد، سناء علي زراع المعادلات التفاضلية / مكتبة الرشيد / المطبعة الاولى /2005.