جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

دالتا كاما وبيتا

بحث تقدم به الطالب

منتظر عبدالرضا حبيب

الى مجلس كلية التربية/ قسم الرياضيات

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في تربية الرياضيات

بإشراف

م. تغريد عبدالكريم حاتم

2025 م 1446 هـ

(بسم الله الرحمن الرحيم)

{ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ }

- صدق الله العلي العظيم -

(الزمر: 9)

إقرار المشرف

اشهد ان اعداد هذا البحث بـ **(دالتا كاما وبيتا)** تقدم به الطالب **(منتظر عبدالرضا حبيب)** قد جرى بإشراف في قسم الرياضيات– كلية التربية – جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في تربية الرياضيات.

المشرف

م. تغريد عبدالكريم حاتم

التاريخ: / / 2025

رئيس قسم الرياضيات

التاريخ / / 2025

الإهـــــداء...

"وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ"

الحمد لله عند البدء وعند الختام،

مَنْ قالَ إنَّا لَهَا نالها .

لقد كان طريقاً مليئاً بالإخفاقات والنجاحات، فخورين بكفاحنا لتحقيق حلمنا، لحظة لطالما انتظرتها وحلمت بها في حكاية اكتساب فصولها .

إلى من علَّمني العطاء بلا انتظار، إلى من أحمل اسمه بكل افتخار، إلى والدي العزيز .

وإلى حبيبتي، قُرَّة عيني، إلى من كانت دعواتها الصادقة سرَّ نجاحي، أمي الغالية .

وإلى كل أفراد عائلتي دون استثناء،

وإلى كل الأساتذة الأفضل الذين قدموا لنا يد المساعدة .

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل، وفقني الله وإياكم بالخير .

الشكر والتقدير

من دواعي الحكمة وسداد الرأي ان نتوجه بالمقام الاول بالشكر والعرفان الى خالق الخلق وبارئ النسمة الله أذ من علينا بجوهرة لا نظير لها ألا وهي العقل.
والى خاتم النبيين والمرسلين أبي القاسم محمد (ص) فهو المعلم الاول ومرشدنا الى طريق الحق والهداية كما اتوجه بجزيل الشكر الى مشرفتي على هذا البحث الأستاذة (م. تغريد عبد الكريم حاتم) الذي لأزمتني يوماً بيوم توجيهياً وإرشاديا لأنتج هذه الثمرة كما لا يفوتني ان اتقدم بالشكر الى عمادة كلية التربية ورئاسة قسم الرياضيات واساتذتنا كافة الذين مدوا يد العون وكانوا كالجندي المجهول فهم النور الذي اضاء طريقي....

الباحث

المحتويات

المقدمة..... 1
الفصل الأول 2
دالة كاما وخواصها الأساسية 2
تعريف دالة كاما: 2
الفصل الثاني..... 13
دالة بيتا 13
خصائص دالة بيتا: 14
المصادر 18

المقدمة

عرفت دالة كاما من قبل السويسري اويلر وعرفت دالة بيتا من قبل الانكليزي والس عام 1655م واويلر عام 1730م وسماها الفرنسي لجندر دالة اويلر عام 1826م وسميت دالة بيتا من قبل الفرنسي بنيت عام 1839م وتكمن أهمية الدالتين وخاصة دالة كاما في تطبيقاتها الفيزيائية والهندسية واعتماد الكثير من الدوال الخاصة الأخرى عليها مقل: دوال بسل، دالة الخطأ والتكامل الأسي والتكامل الجيبي وتكامل جيب تمام وغيرها.

الفصل الأول

دالة كاما وخواصها الأساسية

تعريف دالة گاما [1] :

$$\Gamma(n) = \int_{n}^{\infty} e^{-1} t^{n-1} dt \ , \qquad n > 0$$

نلاحظ أن التكامل متقارب لكل $n > 0$ لأن:

$$\int_{0}^{\infty} t^{n-1}\, e^{-1} dt = \int_{0}^{1} t^{n-1}\, e^{-1} dt + \int_{1}^{\infty} t^{n-1}\, e^{-1} dt$$

لكن $0 < \int_0^1 t^{n-1}\, e^{-1} < \frac{1}{t^r}$ لكل $r = 1 - n < 1$ وعليه فان:

$$\left| \int_{0}^{1} t^{n-1}\, e^{-1} dt \right| < \left| \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^r} \right| = \frac{1}{1-r} \ , r < 1$$

وبالتالي فان $\int_0^1 t^{n-1}\, e^{-1} dt$ متقارب لكل $n > 0$ أما بالنسبة إلى $\int_1^\infty t^{n-1}\, e^{-1} dt$ فنفرض أن $f(m) = m^{n-1} e^m$ إذا $f(m+1) = (m+1)^{n-1} e^{-(m+1)}$ وعليه فان:

$$\left| \frac{f(m+1)}{f(m)} \right| = \left| \left(\frac{m+1}{m} \right)^{n-1} \frac{1}{e} \right| = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \frac{1}{e}$$

وبالتالي فان

$$\lim_{m \to \infty} \left| \frac{f(m+1)}{f(m)} \right| = \frac{1}{e} < 1$$

ومنها نجد أن: $\int_1^\infty t^{n-1}e^{-1}dt$ إذاً $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-1}dt$ متقارب لكل $n > 0$

مبرهنة *(1. 1)*[2]: إذا كان $n = 1$ فان $\Gamma(1) = 1$

البرهان: من تعريف $\Gamma(n)$ نضع $n = 1$ فنحصل على:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}\,dt = \lim_{a\to\infty}[-e^t]_0^a = 1$$

مبرهنة *(1.2)*[2] : إذا كان $n > 0$ فان $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

البرهان: نضع $(n+1)$ بدل من n في المعادلة ونجد أن:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^n dt$$

بالتكامل udv

$$u = t^n \ , dv = e^{-t}dt$$

نحصل على:

$$\Gamma(n+1) = \lim_{b\to\infty}\left\{[-e^{-t}t^n]_0^b + n\int_0^b e^{-t}t^{n-1}\,dt\right\}$$

$$\Gamma(n+1) = \lim_{b\to\infty}[-e^{-b}b^n]_0^b + n\int_0^\infty e^{-1}t^{n-1}\,dt$$

$$\Gamma(n+1) = 0 + n\Gamma(n)$$

مبرهنه *(1.3)* [2]: لأي عدد صحيح موجب $\Gamma(n+1) = n!$

البرهان: بتطبيق مبرهنة *(2)* وتكرار التعويض عن n بالمقادير $n-3, n-2, n-1$ وهكذا نجد أن:

$$\Gamma(n+1) = n(n+1)\Gamma(n+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots.2.1\Gamma(1)$$

وعليه فان:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

مبرهنة *(1.4)*[2]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2n-1}\theta Sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)}$$

البرهان:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4\int_0^{\infty} e^{-u^2}u^{2n-1}du \int_0^{\infty} e^{-v^2}v^{2m-1}dv$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\, u^{2n-1}v^{2m-1}dudv$$

باستخدام التحويلات القطبية: $v = rSin\theta$ و $u = rCos\theta$

مع تطبيق نظرية الجاكوبين $dudv = rdrd\theta$ نجد أن:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(rCos\theta)^{2n-1}(rSin\theta)^{2m-1}drd\theta$$

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2n+2m-1}Cos^{2n-1}\theta Sin^{2m-1}\theta drd\theta$$

$$\Gamma(n+m) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2(n+m)-1}dr$$

وعليه فان:

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 2\,\Gamma(n+m)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2n-1}\theta Sin^{2m-1}\theta d\theta$$

وبالتالي فان:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2n-1}\theta Sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)}$$

<u>*مثال*(1. 5)[2]</u>:بيّن أن: $\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

الحل: من مبرهنة *(4)* يكون:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2x-1}\theta Sin^{2y-1}\theta d\theta$$

بوضع $x = y = \frac{1}{2}$ في العلاقة أعلاه نحصل على:

$$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

<u>مثال*(1.6)*</u>: اثبت أن:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-n^2} du, x, \theta$$

الحل: من التعريف لدينا:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, x > 0$$

نفرض $t = u^2$ إذا $dt = 2udu$ ونهايتي التكامل تبقى كما هي وبذلك يكون:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2(x-1)}(2udu)$$

$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du \, , x > 0$

برهان: ان التكامل $\int_1^a x^{n-1} e^{-x} dx$ يكون متقارباً عندما $n > 0$

نتأمل الآتي:

$$\frac{x^{n+1}}{m!} < \frac{x^m}{m!} < e^x$$

عندما $n + 1 < m$ وان $x > 1$ فان:

$$x^{n-1} e^{-m} < \frac{m!}{x^2}$$

وبما ان التكامل:

$$\int_1^a \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

يقترب إلى *(1)* عندما $a \to \infty$ فان التكامل يبقى محدوداً عندما $a \to \infty$

الآن إذا أبدلنا n في المعادلة $\int_1^a x^{n-1} e^{-x} dx$ إلى $(n + 1)$ وتنفيذ التكامل بطريقة التجزئة يكون لدينا:

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

$$= n\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \, , n > 0$$

مقارنة هذه النتيجة مع $\Gamma(n)$ نجد أن:

$$\Gamma(n + 1) = \Gamma(n) \dots\dots\dots\dots . (1)$$

وهذه تسمى بالعلاقة التكرارية لدالة كاما

إذا فرضنا n عدداً صحيحاً موجباً فان تكرار تطبيق العلاقة *(1)* يعطينا:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

$$= n\Gamma(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1\,\Gamma(1)$$

حيث ان قيمة $\Gamma(1)$ نحصل عليها بوضع $n = 1$ في $\Gamma(n)$ نجد أن:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1$$

وبذلك يصبح لدينا العلاقة المهمة هي:

$$\Gamma(n+1) = n!\,,(n = 0,1,2,\ldots.)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نلاحظ من *(2)* ان دالة كاما يمكن اعتبارها تعميماً للدالة العاملية لهذا فان$\Gamma(n)$ تسمى أحياناً بالدالة العاملية.

لاحظنا ان معادلة $\Gamma(n)$ تعرف دالة كاما فقط عندما $n > 0$

الآن سنعرف دالة كاما لقيم n السالبة بالطريقة التالية:

دعنا اولاً نكتب العلاقة التكرارية *(1)* بالشكل:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

وعليه إذا كان $-1 < n < 0$ فان المعادلة *(3)* تعطينا $\Gamma(n)$ لأن $(n+1)$ يكون موجباً وكذلك يمكننا إيجاد $\Gamma(n)$ عندما $-2 < n < -1$ لأن $\Gamma(n+1)$ في الطرف الأيمن من المعادلة *(3)* تكون معلومة وهكذا نستمر بالتكرار لنحصل على:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k-1)} \ , n \neq 0\ , -1, -2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

حيث k عدد صحيح وان $n + k > 0$ هذه العلاقة يمكن استعمالها لإيجاد قيم $\Gamma(n)$ لجميع قيم n السالبة $(n \neq 0, -1, -2, \ldots.)$

العلاقتان $\Gamma(n)$ و*(4)* تعطينا تعريف $\Gamma(n)$ عندما n لا تساوي صفراً أو عدداً صحيحاً سالباً ونلاحظ هنا عندما تقترب n من الصفر أو من قيمة صحيحة سالبة فان:

$$\Gamma(n) \to \pm\infty$$

من الجدير بالذكر هنا ان دالة كاما تزداد بسرعة مطردة عندما تكون n كبيرة لذلك تظهر صعوبات حسابية عند حساب قيمة $\Gamma(n)$ وفي مثل هذه الحالات نجد من المفيد ان نستخدم صيغاً تقريبية لدالة كاما، ان من أهم هذه الصيغ هي صيغة سترلنك التقريبية للمقدار $\Gamma(n+1)$ والتي هي بالشكل:

$$\Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

حيث e يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي

بالإمكان إيجاد قيم $\Gamma(n)$ عندما قيم n تكون أنصاف الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة باستخدام العلاقة *(1)* و*(4)* على الترتيب والنتيجة:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

<u>مثال(*1.7*)</u>: لحساب قيمة $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ نستعمل *(1)* و*(5)* فيكون لدينا:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

لإيجاد قيمة $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ مثلاً نستعمل *(4)* و*(5)* كالآتي:

بما ان *(n + k)* تكون أكبر من الصفر و$n = \frac{1}{2}$

فيجب أن يكون *k = 1* ومن *(4)* نحصل على:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2\sqrt{\pi}$$

وبنفس الأسلوب ولحساب قيمة $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ نجد أن:

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= (2)\left(-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

وعندما $n = -\frac{5}{2}$ يكون لدينا:

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = (-2)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\sqrt{\pi}$$

وهكذا إذا استمررنا بنفس الأسلوب نلاحظ انه في حالة $n = -P - \frac{1}{2}$ حيث P عدد صحيح موجب أو صفر يكون لدينا:

$$\Gamma\left(-P - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{P+1}(2)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right) \dots\dots \left(\frac{2}{2P+1}\right)\sqrt{\pi} \dots\dots\dots\dots (6)$$

الآن نبرهن النتيجة *(5)* ضع $x = y^2$ في معادلة $\Gamma(n)$ نجد أن:

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}e^{-y^2}dy\,, n > 0 \dots\dots\dots\dots (7)$$

الآن إذا كان $n = \frac{1}{2}$ فان:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy = 2I_1$$

التكامل I_1 يظهر عادة في عدة فروع من الرياضيات وبصورة خاصة في نظرية الاحتمال هذا التكامل يمثل مساحة المنحني الذي يدعى منحني الاحتمالية $u = e^{-y^2}$

لحساب هذا التكامل نطبق الطريقة التالية: بما ان متغير التكامل في التكاملات المحددة ليس له تأثير على نتيجة التكامل فان بالإمكان تعريف الآتي:

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-y^2}dy \ , I_2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

بضرب هذان التكاملان وكتابة الناتج بشكل تكامل ثنائي يكون لدينا:

$$I_1^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

إذا اعتبرنا y, x إحداثيان ديكارتيان ولنفرض أن z هو الإحداثي العمودي فان التكامل الثنائي أعلاه سيمثل حجم لدوران منطقة صلدة محددة بالسطح

$$Z = e^{-(x^2+y^2)}$$

ان هذا الحجم يمكن إيجاده باستعمال الإحداثيات القطبية θ, r وذلك بوضع:

$$y = rSin\theta \ , x = rCos\theta$$

ويكون عنصر المساحة ds في المستوى $x.\ y$ عندئذ

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{حيث } dx = rdrd\theta$$

أما حدود التكامل 0 و∞ لكل من x .y في *(8)* فهي تناظر الحدود 0 و∞ للمتغير r بينما تكون الحدود للمتغير θ هي 0 و$\frac{\pi}{2}$ بذلك فان التكامل الثنائي *(8)* يصبح:

$$I_1^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج أن:

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

وبما ان $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I_1$ فنحصل على المطلوب

الأمثلة الآتية توضح كيفية حساب التكاملات المحددة باستعمال دالة كاما [2]

<u>مثال*(1.8)*</u>: جد قيمة التكامل المحدد:

$$\int_0^{\infty} t^4 e^{-2t} dt$$

<u>الحل:</u> بفرض $x = 2t$ فان التكامل يصبح

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{2^2} e^{-x} \frac{dx}{2} = \frac{1}{32} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{32} \Gamma(5)$$

$$= \frac{4!}{32} = \frac{3}{4}$$

<u>مثال*(1.9)*</u>: اثبت أن: $\int_0^1 \frac{dy}{\ln\left(\frac{1}{y}\right)} = \sqrt{\pi}$

الحل: لنفرض $x = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$ وينتج أن $y = e^{-x}$ حينئذ عندما $y = 0 \to x = \infty$ وعندما $y = 1 \to x = 0$ بهذا يصبح التكامل كالآتي:

$$\int_{\infty}^{0} \frac{-e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_{0}^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال*(1.10)*: اثبت أن:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (tan^3\theta + tan^5\theta) e^{-tan^2\theta} d\theta = \frac{1}{2}$$

الحل: بوضع $x = tan^2\theta$ فان التكامل المعطى يصبح:

$$\int_{0}^{\infty} x^{\frac{3}{2}}(1+x) e^{-x} \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\Gamma(2) = \frac{1}{2}$$

الفصل الثاني

دالة بيتا

تعريف دالة بيتا [1] :

$$\beta(n,m) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}dt \quad , \quad (n>0\,, m>0) \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

غالباً ما تطغى فائدة دالة بيتا على دالة كاتما ربما يرجع ذلك جزئياً إلى انه يمكن تقييمها من حيث دالة كارما. نظراً لأنه يحدث بشكل متكرر في الممارسة العملية فان تسمية خاصة له مقبولة على نطاق واسع.

إذا أجرينا تغيير المتغير $u = 1 - t$ في *(1)* سنجد:

$$\beta(n,m) = \int_0^1 (1-u)^{n-1}u^{m-1}du$$

نستنتج منها خاصية التماثل

$$\beta(n,m) = \beta(m,n) \dots\dots\dots\dots (2)$$

تمثيل آخر للدالة ينتج إذا أجرينا تغيير المتغير $u/(1+u)$ مما يؤدي إلى:

$$\beta(n,m) = \int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{(1+u)^{n+m}}du \quad , \quad n>0\,, m>0 \dots\dots\dots\dots (3)$$

❖ **وأخيراً لإظهار كيفية ارتباط دالة بيتا بوظيفة كاما[3]:**

$$\beta(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

البرهان: من دالة *(1)*:

$$\beta(n,m) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}dt$$

بفرض $t = Cos^2\theta$ وعليه عندما تكون:

$$t = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2} \ , t = 1 \to \theta = 0$$

$$dt = -2Sin\theta Cos\theta d\theta$$

ومن ذلك نجد:

$$\beta(n,m) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^{2n-1}\theta Sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \dots\dots\dots (4)$$

- **<u>خصائص دالة بيتا[3]:</u>**

1) $\beta(n,m) = \beta(m,n)$

2) $\beta(2+1,m) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+1+m)}$

$$= \frac{n\Gamma(n)\Gamma(m)}{(n+m)\Gamma(n+m)}$$

$$= \frac{n}{n+m}\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

$$= \frac{n}{n+m}\beta(n,m)$$

$$\beta(n+1,m) = \frac{n}{n+m}\ \beta(n,m) \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

3) $\beta(n,m+1) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+1)}$

$$= \frac{m\Gamma(n)\Gamma(m)}{(n+m)\Gamma(n+m)}$$

$$= \frac{m}{n+m}\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

$= \frac{m}{n+m}\beta(n,m)$

$\beta(n,m+1) = \frac{m}{n+m}\ \beta(n,m) \dots\dots\dots\dots\dots (6)$

مثال(2.1): احسب التكاملات الآتية:

1) $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx$

2) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$

3) $\int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}} dy$

الحل:

1) $\int_0^1 \boldsymbol{x^4(1-x)^3 dx} = \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1} dx$

$= \beta(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)}$

$= \frac{4!3!}{8!} = \frac{1}{280}$

2) $\int_0^2 \boldsymbol{\frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx}$

نفرض $x = 2y$ و $dx = 2dy$ نجد أنه عندما

$x = 0 \to y = 0\ ,\ x = 2 \to y = 1$

وعليه فان:

$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = \int_0^1 \frac{4y^2}{\sqrt{2-2y}} 2dy$

$= \frac{8}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} y^2 dy$

$$= 4\sqrt{2}\beta\left(3,\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})}$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

3) $\int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}dy$

نفرض $y^2 = a^2x$ نجد أن $y = ax^{\frac{1}{2}}$ وعليه فأن:

$$= \int_0^1 \left(ax^{\frac{1}{2}}\right)^4 a\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{a^6}{2}\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{a^6}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)}$$

$$= \frac{a^6}{2}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\pi}{3!} \quad = \frac{\pi a^6}{32}$$

مثال*(2.2)*: احسب التكاملات:

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^6\theta d\theta$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^4\theta Cos^5\theta d\theta$

3) $I = \int_0^{\pi} Cos^4\theta d\theta$

الحل:

1) $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^6\theta d\theta}$

باستخدام مبرهنة *(4)*

$\beta(n,m) = 2\int_0^1 Sin^{2n-1}\theta Cos^{2m-1}\theta d\theta$

بما ان $2n-1=0\ ,2m-1=0$ فان: $n=\frac{7}{2}\ \ ,\ \ m=\frac{1}{2}$ وعليه:

$I = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{32}$

2) $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^4\theta Cos^5\theta d\theta}$

نفرض $2n-1=4$ فان $n=\frac{5}{2}$ و $2m-1=5$ فان $m=3$ عليه:

$I = 2\beta\left(\frac{5}{2},3\right)$

$= 2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$

$= \frac{8}{315}$

3) $\boldsymbol{I = \int_0^{\pi} Cos^4\theta d\theta}$

بوضع $2n-1=0\rightarrow n=\frac{1}{2}$ و $2m-1=4\rightarrow m=\frac{5}{2}$ وعليه فان:

$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^4\theta d\theta$

$= 2\beta\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{8\pi}{3}$

المصادر

[1] أ. د. فالح بن عمران بن محمد الدوسري، و أ. د. محمد عبد اللاه أحمد عبده *الدوال الخاصة وبعض تطبيقاتها* .مكة المكرمة، 2008، الفصل الثاني، ص 45–71.

[2] د. سميرة الأمين محمد سليمان *الدوال الخاصة* .ليبيا، 2021، الفصل الثالث، ص 61–74.

[3] د. باسل يعقوب يوسف لوقا، *طرق في الرياضيات التطبيقية*، العراق، 1989، الفصل الثاني، ص 83–99.