جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـامعة ميسان
كليــة التربية
قسم الرياضيات

التكامل باستخدام الطرق العددية

بحث
مقدم الى مجلس كلية التربية /جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

تقدم بها

زهراء سامر فيصل

بأشراف
الدكتور علاء نجم

2025م. **1446هـ.**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

((وَيَرَى الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ الَّذِي أُنزِلَ إِلَيْكَ مِن رَّبِّكَ هُوَ

الْحَقَّ وَيَهْدِي إِلَىٰ صِرَاطِ الْعَزِيزِ الْحَمِيدِ))

(سورة سبأ:٦)

الاهداء

الى صاحب السيرة العطرة والفكر المستنير (والدي الحبيب)

الى صديقتي الأولى وحبيبتي الدائمة الى من وضعتني على طريق الحياة امي الغالية)

الى من كان لهم بالغ الأثر في الكثر من العقبات والصعاب(اخواني)

الى من قضيت معهم أجمل اللحظات (زملائي وزميلاتي)

الى جميع أساتذتي الكرام ممن لم يتوانوا في مديد العون لي....

اهدي اليكم بحث تخرجي...

الشكر والتقدير

بعد شكري لله عز وجل أن أعانني على انجاز هذه البحث المتواضع

يشرفني في هذا المقام الكريم أن أقف إجلال واحتراما أمام القناديل

العلمية التي اضاءت لي دروب العلم وبالأستاذ علاء نجم

اتقدم إليه بجزيل الشكر وخالص المعرفة بدء التقدير لقبوله الأشراف

على هذا البحث الذي ما كان لنثرى النور لولا جهوده ما في تحقيق

فيه من انجازات جازه الله كل الخير وله منا فائق الشكر والتقدير والاحترام.

كما اعبر عن شكري الى كل اساتذة قسم الرياضيات لمساعدتي خلال مسيرتي الدراسية.

المحتويات

الاهداء _____ ii

الشكر والتقدير _____ iii

مقدمة في التحليل العددي _____ ١

التحليل العددي Numerical analysis _____ ١

التسمية الدقيقة لهذا التخصص هو التحليل العددي _____ ٢

أنواع الأخطاء _____ ٢

متسلسلة تايلور _____ ٣

الطرق العددية لحساب التكاملات المحددة _____ ٥

قاعدة شبه المنحرف trapezoidal rule _____ ٥

حساب الخطأ في قاعدة شبه المنحرف _____ ٨

طريقة المستطيلات _____ ١١

حساب الخطأ المرتكب لطريقة المستطيلات _____ ١٤

قاعدة سمبسون Simpson's Rule _____ ١٦

حساب الخطأ في قاعدة سمبسون _____ ١٩

تكامل روميوك _____ ٢٠

حساب الخطأ _____ ٢٣

الاستنتاج _____ ٣٠

المصادر _____ ٣١

الفصل الأول

الفصل الأول

(1-1) مقدمة في التحليل العددي:

التحليل العددي ومنه التكامل العددي هو أحد فروع علم الرياضيات الذي يربط بين الرياضيات التحليلية والحاسب الآلي. وللتكامل العددي أهمية كبيرة في التطبيقات الهندسية والفيزيائية ففي الأواني الأخيرة استخدام التكامل العددي في طب الأسنان حيث استخدام أطباء الأسنان بعض الطرائق العددية لإيجاد المساحة السطحية للمقطع العرضي لقناة جذر السن واستخدام الباحثون الكثير من الطرائق العددية المختلفة لحساب قيم التكاملات الأحادية والمحددة في فترات تكاملها وحسنوا النتائج بطرق تعجيلية متعددة عادة ما نحصل على نتيجة تقريبية أو حل تقريبي باستخدام هذه الطرق. وهذا يعني وجود نسبة خطأ علينا حسابها، إذا تتلخص مهمة التحليل العددي عموماً والتكامل العددي على وجه الخصوص في أيجاد الحل التقريبي لمسألة ما وتقويم خطأ. [**1**]

وفي التحليل العددي، يشكل التكامل العددي عائلة واسعة من الخوارزميات لحساب القيمة العددي لتكامل المحدود، وقد استخدمت لحل المسائل في العلوم الفيزيائية والهندسية.

أسباب اللجوء للتكامل العددي:

توجد أسباب عدة اللجوء للتكامل العددي، فالكمية المتكاملة يمكن معرفتها فقط عند نقاط معينة، كتلك المحصل عليها عن طريق الأخذ بالعينة أو تكون حلولاً عددية لمسائل أخرى ولهذا السبب قد يعرف المرء الكمية المتكاملة ولكن يكون من الصعب أيجاد الاشتقاق العكسي والذي يفترض أن يكون دالة أساسية حينئذ تصبح أساليب التكامل العددي هي الوسائل الوحيدة لإيجاد قيمة التكامل العددي. [**2**].

(2-1) التحليل العددي **Numerical analysis**:

هو أحد فروع علم الرياضيات، وعلم الكمبيوتر (الحاسب الآلي)، حيث يقوم التحليل العددي على مبدأ إنشاء وتحليل وتنفيذ عدد من الخوارزميات (نسبة إلى محمد بن موسى الخوارزمي عالم الرياضيات). للوصول إلى حلول رقمية للمشاكل الرياضية التي بنيت على مجموعة من التغيرات والتقلبات المستمرة. وقد تتكون هذه المشاكل أيضا في العلوم الاجتماعية، والطبيعية، والهندسة، والطب وقد يطلق أسماء أخرى على التحليل مثل التحليل الكمي، أو الطرق العددية. فالأمر لا يتعلق فقط بطبيعة المسألة بل بطريقة حلها بالتالي تكون مهمة التحليل العددي كذلك إيجاد خوارزميات مستقرة لحل المسائل السيئة الشروط.

(1-2-1) التسمية الدقيقة لهذا التخصص هو التحليل العددي:

يستخدم التحليل العددي في حل المعادلات الرياضية التي يصعب حلها أو يستلزم وقتًا طويلاً فصله. فإذا كانت لدينا معادلة رياضية من الدرجة الرابعة أو الخامسة فإن من الممكن حلها بالطرق التقليدية، وحتى هذه الطرق تأخذ وقتًا. أما إذا كانت المعادلة من الدرجة السادسة وأكثر يكون من الصعب دائمًا التعامل مع المعادلة تقليديًا.

في التحليل العددي يتضمن الاشتقاق وتطوير طرق لحساب نتائج عددية مطلوبة من بيانات عددية معطاة. وهذا يجعل التحليل العددي جزءًا من العلم الحديث الذي يسمى تشغيل المعلومات، حيث البيانات المعطاة تمثل المعلومات المدخلة، والنتائج المطلوبة تمثل المعلومات المخرجة.

(1-3) أنواع الأخطاء:

لتكن $\hat{X}$ القيمة التقريبية لعدد قيمته الحقيقية هي x فإن هناك نوعان من الأخطاء وهي:

أولاً: الخطأ المطلق Absolute error

يعرف الخطأ المطلق بأنه حاصل طرح القيمة التقريبية للعدد $(\widehat{x})$ من القيمة الحقيقية له x ويرمز له بالرمز (e_x) والصيغة العامة لهذا الخطأ هي:

$$|e_x| = |x - \hat{x}|$$

ثانيًا: الخطأ النسبي: Relative error

يعرف الخطأ النسبي بأنه النسبة بين قيمة الخطأ المطلق للعدد e_x والقيمة الحقيقية له x ويرمز له بالرمز

$$\delta x = \left|\frac{e_x}{|x|}\right| \cong$$

مثال: جد خطأ مطلق والخطأ النسبي

1) If $x = 0.005$ and $\hat{x} = 0.0049$
2) If $y = 0.135$ and $\hat{y} = 0.136$

الحل:

1) $|e_x| = |x - \widehat{x}| = |0.005 - 0.0049| = 0.0001$

$$\delta x = \left|\frac{e_x}{|x|}\right| \cong 0.00010.005$$

2) $|e_y| = |y - \widehat{y}|$=| 0.135 - 0.136| = |- 0.001| = 0.001

$$\delta y = \left|\frac{e_y}{|y|}\right| \cong 0.0010.135$$

(4-1) متسلسلة تايلور:

تمثيل الدالة كسلسلة لا نهائية من الحدود التي تعتمد على مشتقاتها في نقطة معينة. إذا كانت $\mathbf{f(x)}$دالة قابلة للاشتقاق من غير منته من المرات في نقطة معينة $\boldsymbol{x + b}$ و$\boldsymbol{x - h}$ ضمن الفترة المعرفة عليها الدالة، فإنه باستخدام متسلسلة تايلور للدالة $\boldsymbol{f}$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) \dots\dots\dots\dots (2)$$

بطرح معادلة **2** من معادلة **1** (واهمها جميع الحدود التي تحتوي على **h** مرفوعة القوى أكثر من واحد)

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + 2\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x)_+ \dots\dots$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - (3)$$

حالة خاصة: متسلسلة ماكلورين:

عندما تكون لنقطة $\boldsymbol{a = 0}$، فإن متسلسلة تايلور تعرف باسم متسلسلة ماكلورين.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n_1^1} x^n$$

مثال /أوجد المشتقة الأولى للدالة $\boldsymbol{e^x}$عنده $\mathbf{x = 0}$، إذا كانت $\mathbf{h_1 = 0.1}$ و $\mathbf{h_2 = 0.01}$

الحل:

$$\frac{d}{\partial x}[e^x] = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[e^x]\Big|_{x=0} = \frac{e^{x+h} - e^{x-h}}{2h} = \frac{e^h - e^{-h}}{2h}$$

$$\text{If h} = 0.1 \rightarrow \frac{\text{d}}{\partial \text{x}}[\text{e}^{\text{x}}]\Big|_{\text{x=0}}$$

$$= \frac{e^{0.1}e^{-0.1}}{2(0.1)}$$
$$= 1.001667$$

$$\text{If h} = 0.01 \rightarrow \frac{\text{d}}{\partial \text{x}}[\text{e}^{\text{x}}]\Big|_{\text{x=0}}$$

$$= \frac{\text{e}^{0.001}\text{e}^{-0.001}}{2(0.001)}$$
$$= 1.000016$$

الخطأ أقل عندما يقل **h**

وهذا ما سوف نتناوله في الفصل الثاني.

الفصل الثاني

الفصل الثاني

(2-1) الطرق العددية لحساب التكاملات المحددة:

تعتمد الطرق العددية لحساب قيمة تقريبية لتكامل محدد على تجزئة المجال المتكامل إلى أقسام صغيرة وحساب المساحات الجزئية ثم جمع هذه المساحات الجزئية للحصول على القيمة التقريبية للتكامل الكلي وتعتمد هذه التكاملات المحددة في الحالات:

A. عند استحالة إيجاد القيمة المضبوطة للتكامل كالتكامل المحدد

$$\int_1^2 e^{x^3} dx$$

B. عندما تكون عملية إيجاد القيمة المضبوطة للتكامل ممكنة ولكن يشقه لأن الدالة قد تكون معقدة وتحتاج إلى زمن طويل لإيجاد قيمة التكامل كالتكامل المحدد

$$\int_0^{10} \frac{dx}{9 + x^4}$$

(2-2) قاعدة شبه المنحرف trapezoidal rule:

تقوم هذه القاعدة بتقدير المساحة المطلوبة تحت المنحنى الدالة $f(x)$ بالمساحة الواقعة تحت المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى $f(x)$ إذا أن تلك النقطتين هما $\big((x_2)f(x_2)\big)\big((x_1), f(x_1)\big)$.

نفرض أن دالة مستمرة نقسم الفترة **[a,b]** إلى عدد من الأجزاء المتساوية.

من **a**الى **b** مجموع التكاملات من **a** الى $x1$ومن $x1$الى$x2$ ومن $xn-1$ الى $x_n = b$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^{x1} f(x)dx + \int_{x1}^{x2} f(x)dx + \cdots + \int_{xn-1}^{b} f(x)dx$$

حيث مساحة شيه المنحرف $=\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين * الارتفاع)

$$= \frac{1}{2}(f(x) + f(x0) + h$$
$$= \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots .. + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\frac{h}{2}[f(a) + f(b)]; h = b - a$$

ماهي قاعدة شبه المنحرف

هي طريقة تقريبية لحساب المساحة تحت المنحنى لدالة ما، وذلك بتقسيم هذه المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة إلى أشباه منحرفات ويتم حساب مساحة كل شبه منحرف وجمعها للحصول على تقريب لمساحة المنطقة الكلية.

مثال/ لتكن لدينا الدالة $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ ونريد حساب التكامل المحدد لهذه الدالة في الفترة [**2,0**].

الحل:

$n = 4, h = (b - a)/n$
$h = (2 - 0)/4 = 0.5$
$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$
$x_4 = 2$

$$f(x_0) = 0^2 = 0$$
$$f(x_1) = (0.5)^2 = 0.25$$
$$f(x_2) = (1)^2 = 1$$
$$f(x_1) = (1.5)^2 = 2.25$$
$$f(x_4) = (2)^2 = 4$$
$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$
$$= \frac{0.5}{2}[0 + 0.25] = 0.0.625$$
$$= \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$
$$= \frac{0.5}{2}[0.25 + 1] = 0.3125$$
$$= \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)]$$
$$= \frac{0.5}{2}[2.25 + 1] = 0.8125$$
$$= \frac{0.5}{2}[2.25 + 4] = 1.5625$$
$$= 0.0625 + 0.3125 + 0.81254 + 1562$$
$$= 2.75$$

مثال\ باستخدام قاعدة شبه المنحرف

$$\int_0^2 e^x dx$$

باستخدام **1,2,4,8** من الفترات الجزئية

الحل\\

$$n = 1$$

$$\frac{1}{2}(2)[f(0) + f(2)] = 8.3820$$

$$n = 2$$

$$\frac{1}{2}(1)[f(0)+f(2)+2f(1)]=6.9128029$$

$$n=4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\cdot f(0)+f(2)+2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right]=6.5216101$$

*** حساب الخطأ في قاعدة شبه المنحرف**

بما أننا استخدمنا متعددة حدود نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية في استنتاج صيغة تكامل التي استخرجناها فمن الطبيعي أن نعود لها في صيغة مقدار الخطأ ففي صيغة شبه المنحرف البسيطة حيث قطعنا حدودية نيوتن بعد أخذ الحد الثاني.

$$f_1(x)=f_0+m\Delta f_0$$

فإن قيمة التكامل على الحد الثالث يعطينا قيمة الخطأ في التكامل بواسطة قاعدة شبه المنحرف البسيطة، بحيث أن:

$$E_1=h\int_0^1\frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0\,dm$$
$$=-\frac{h}{12}\Delta^2 f_0$$

ولأجل الحصول على صيغة خطأ لا تعتمد على مشتقة الدالة، بحيث أن:

$$\Delta^2 f_i=h^2 f''(s_i)\quad ,x_i<s<x_{i+1}$$

وعليه فإن:

$$E_1=\frac{-h^3}{12}f''(s)\,,x_i<s<x_{i+1}$$

إن وجود المشتقة الثانية للدالة في الصيغة أعلاه، تفسر لنا سبب ان صيغة شبه المنحرف تعطي نتائج مضبوطة للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ عندما تكون عبارة عن حدودية من الدرجة الأولى وليس أكثر من ذلك.

للصيغة المركبة فإن الخطأ E_t هو مجموع الخطأ في كل فترة جزئية، بحيث أن عدد **(n)** من الفترات الجزئية، فإن:

$$E_T = -\frac{h^3}{12}[f''(s_1) + f''(s_2) + \cdots + f''(s_n)] \ldots\ldots (x)$$

حيث كل من $\boldsymbol{s_i|_{i=1}^{n}}$ هي موجودة في الفترة الكاملة **[a,b]**. فإذا فرضنا أن$\boldsymbol{f''(x)}$ مستمرة على **[a,b]** فإنها توجد نقطة **x** في **[a,b]**، لتكن $\boldsymbol{x = \eta}$عندها يكون المجموع بين القوسين في * يساوي $\boldsymbol{nf''(x)}$

يعني

$$E_T = n\left(-\frac{h^3}{12}f''(\eta)\right), x_0 < \eta < x_n$$

ولأن

$$n = \frac{b-a}{h}$$

فان

$$E_T = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\eta)$$

حيث $a < \eta < b$

لاحظ ان رتبة hقد انخفضت. [3]

مثال\ باستخدام قاعدة شبه المنحرف $\boldsymbol{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx}$

علما ان$h = 0.25$ ثم احسب الخطأ. [4]

الحل\\

$\frac{x}{0}$	$\frac{f(x)}{1}$
0.25	0.94
0.5	0.8
0.75	0.64
1	0.5

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3) + f_4]$$
$$= \frac{0.25}{2}[1 + 2(0.94 + 0.8 + 0.64) + 0.5]$$
$$= 0.125[1 + 4.76 + 0.5]$$
$$= 0.125[6.25)$$
$$= 0.7825$$

ولحساب الخطأ

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = -2x \cdot (1+x^2)^2 = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 6x^2 - 2 \cdot (1+x^2)^3 = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$E = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(x)$$
$$E \leqslant -\frac{(1-0)}{12}(0.25)^2 \max f''(x)_0$$
$$= -\frac{(0.25)^2}{12}(-2)$$
$$= 0.0104$$
$$\leq x \leq f$$

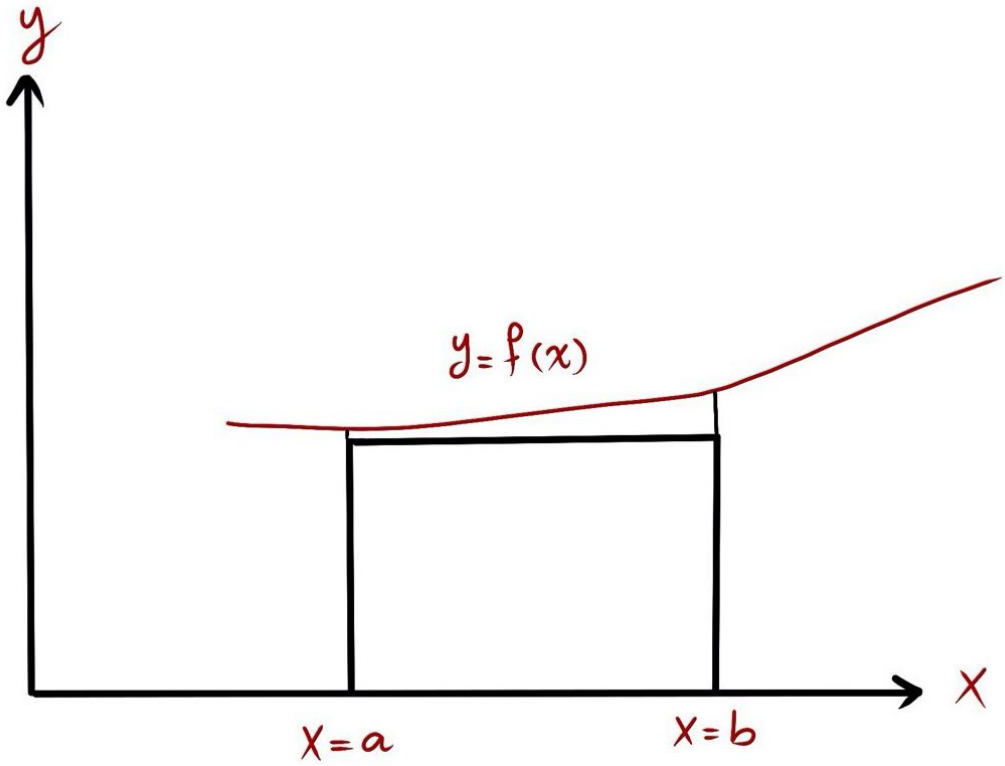
$$f''(0) = \frac{6(0)-2}{(1-(0)^2)^3} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$f''(1) = \frac{6(1)-2}{(1-(1)^2)^3}$$
$$= \frac{6-2}{(2)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$$

∴ أكبرقيمة $f''(0)$

(3-2) طريقة المستطيلات:

ليكن لدينا الدالة $y = f(x)$ قابلة للتكامل على المجال [a, b] والمطلوب هو إيجاد قيمة تقريبية لتكامل هذه الدالة على المجال [a, b] .تستخدم هذه الطريقة تقريب كقيمة لتكامل الدالة بمساحة المستطيل الذي طوله الفترة [a, b]وعرضه $f(a)$.[2]



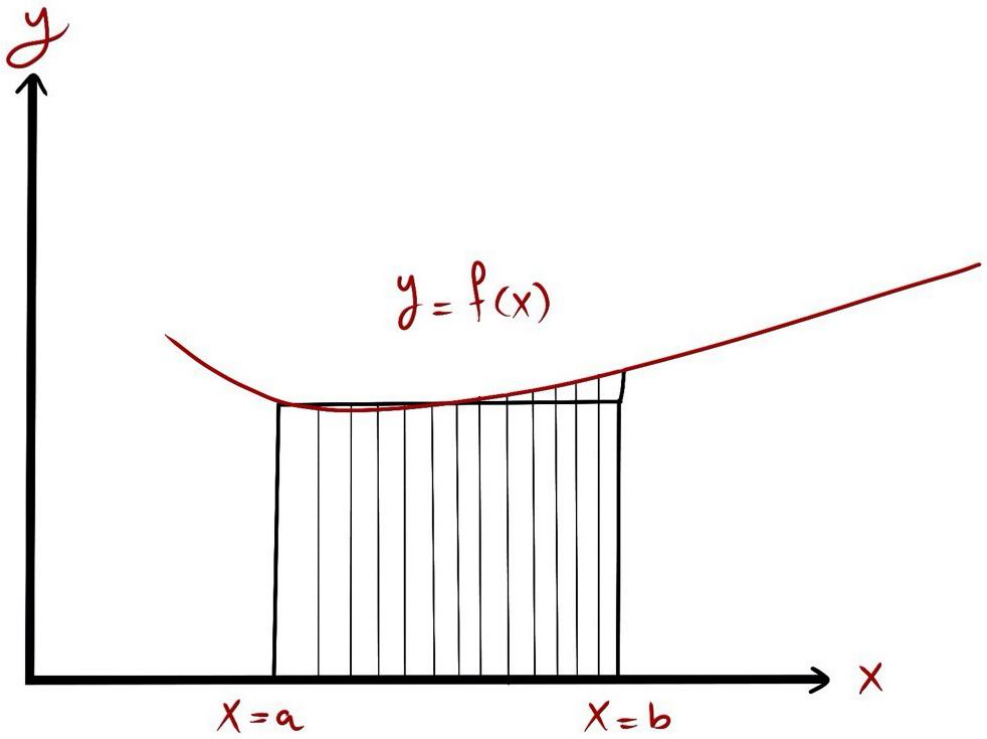
الشكل (1-1)

أي أن القيمة التقريبية للتكامل تعطى بالعلاقة:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong (b-a) \cdot f(a)$$

حيث c هي أي نقطة اختيارية في المجال.[a, b]
نلاحظ أن الخطأ في القيمة التقريبية التي تعطيها هذه الطريقة يكون كبير إذا كان طول المجال [a, b] كبير وصغير إذا كان المجال [a, b] صغير. لذلك، وللحصول على قيمة تقريبية للتكامل ذات دقة أكبر نسبيًا، يمكننا تقسيم المجال [a, b] إلى n مجال جزئي متساوي الطول كل منها هو:

$$h = \frac{b-a}{n}$$



الشكل (1-2)

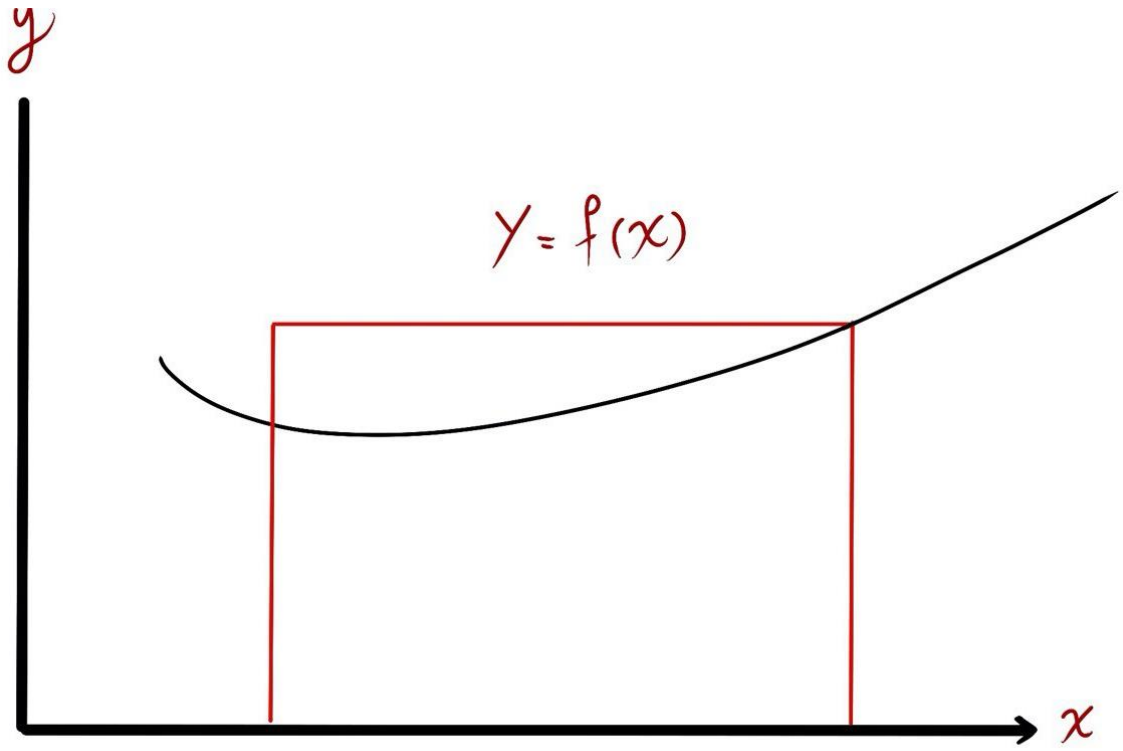
عند القيام بذلك، فإن القيمة التقريبية للتكامل يمكن أن تعطى بالشكل التالي:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$
$$= \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$$
$$= h[f(x_0) + f(x_1) \cdots f(x_{n-1})]$$
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

ومن الواضح أنه كلما زاد عدد $n \to \infty$ ، فإن القيمة التقريبية للتكامل المحسوبة بهذه الطريقة تساوي مساحة السطح المحدد بمنحنى الدالة $y = f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ وهي القيمة التحليلية للتكامل.

ملاحظة هامة: كلما كان من الممكن حساب قيمة تقريبية لمساحة السطح المحدد بمنحنى الدالة $y = f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ بالشكل التالي:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f(b)$$



الشكل (3-1)

نلاحظ عند ذلك، يقسّم المجال $[a,b]$ إلى nمجال جزئي متساوي الطول، فإن القيمة التقريبية للتكامل تعطى بالشكل:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$
$$= h[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

مثال: ليكن لدينا الدالة f(x)المعطاة بالجدول التالي:[2]

x	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
f(x)	4.953	6.050	7.389	9.25	11.23	13.46

والمطلوب هو حساب قيمة التكامل:

$$\mathrm{I} = \int_{1.6}^{2.6} f(x)dx$$

الحل\\

باعتبار $h = 0.2$ عندها يمكن تقسيم الفترة الى خمس فترات صغيرة متساوية الطول بالشكل:

$$x_0 = 1.6 < 1.8 < 2.0 < 2.2 < 2.4 < 2.6 = x_n$$

وبالتالي فان القيمة التقريبية للتكامل تكون:

$$I = h[f(x_0)_1 + r(x_1) + f(x_2)_4 + f(x_3) + f(x_n)]$$
$$= 0.2[4.953 + 6.050 + 7.389 + 9.025 + 11.023]$$
$$= 0.2(38.44) = 7.688$$

حساب الخطأ المرتكب لطريقة المستطيلات

نعلم ان الخطأ المرتكب هو الفرق بين القيمتين الحقيقية والتقريبية للتكامل لذلك يمكننا ان نكتب:[2]

$$R_1 = \int_a^b \mathrm{f}dx - (b-a)\mathrm{f(a)}$$

ونستخدم نشر تايلر يمكن ان نكتب:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)}{2!} + \cdots$$
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(s_1);\ s_1 \in [a, b]$$

وباعتبار $x_0 = a$ يكون

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(s_1)$$

ويتكامل الطرفين على المجال [a,b] نجد أن:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(a)dx = \int_a^b (x - a)f'(s_1)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx - (b - a)f(a) = \int_a^b (x - a)f'(s_1)dx$$

ومنة تستنتج ان الخطأ المرتكب يكتب بالشكل:

$$R_1 = \int_a^b (x - a)f'(s_1)dx$$
$$R_1 = f'(s_1)\int_a^b (x - a)dx$$
$$= \frac{(b - a)^2}{2}f'(s_1)$$

وباعتبار الصيغة المستخدمة تستخدم فترة واحدة فقط من طول $h = b - a$ يمكننا أن يكتب:

$$R_1 = \frac{h^2}{2} f'(s_1)$$

أما في حالة استخدام الا من الفترات الجزئية المساوية فإن:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n} f'(s_i)$$

وبالتالي يكون:

$$R = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} f'(s_i)$$

وباعتبار ان$f'(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ الفترة فانه يمكن إيجاد نقطة في هذه الفترة مثل sبحيث يكون:

$$f'(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(s_i)$$

وبالتالي فان الخطأ المرتكب عند تقسيم الفترة الى من الفترات الجزئية المتساوية يكتب على الشكل التالي:

$$R = \frac{b-a}{2} h f'(s)$$

مثال\ استخدام طريقة المستطيلات لحساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

و $h = 0.1$ ثم احسب الخطأ المرتكب. [2]

الحل\\

نقوم بتجزئة الفترة$[a, b]$ الى عشرة اقسام متساوية فنحصل على الجدول التالي الذي يعطي قيمة الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x}$عند نقاط التقسيم:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{F(x)}$
0	**1**
0.1	0.909090909
0.2	0.833333333
0.3	0.76923769
0.4	0.714285714

0.5	0.666666666
0.6	0.625
0.7	0.588235294
0.8	0.555555555
0.9	0.526315789
0	0.5

باستخدام طريقة المستطيلات لحساب القيمة التقريبية للتكامل نكتب:

$$I = h[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_a)].$$
$$I = 0.1[1 + 0.99090909 + 0.833333333 + 0.769230769 + 0.71228.5714 + 0.666666666 + 0.625 + 0.588235294 + 0.555555555 + 0.526315789]$$

$$= 0.718771402$$

ولحساب الخطأ المرتكب نستخدم العلاقة:

$$R = \frac{b-a}{2} hf'(s): S \in [0,1]$$

حيث

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

و $h = 0.1$فيكون:

$$R_{\max} = [(0.5)(0.1)(-1)] = 0.05$$

$$R_{\min} = [(0.5)(0.1)(-0.25)] = 0.0125$$

*قاعدة سمبسون Simpson's Rule

في هذه القاعدة تقرب الدالة fبحدودية تربيعية f_2 ولذلك نحتاج الى ثلاث نقاط في الفترة الجزئية الواحدة لكي نصور بها الحدودية التربيعية[3] .

نفرض ان لدينا النقاط(x_0, f_0) (x_2, f_2) (x_1, f_1), حيث$h = x_1 - x_0$
$h = x_2 - x_1$

تكون الحدود التربيعية من صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية

$$f_2(x) = f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

وبإجراء التكامل عانى الفترة$[x_\circ, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1}{2}\Delta^2 f_0\right]dx$$

وبتحويل التكامل في الجهة اليمنى بدلالة m يصبح

$$\int_{x_0}^{x_2} f_2(x)dx = h\int_{x_0}^{x_2} \left[f_0 + m(f_1 - f_0) + \frac{m^2 - m}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0)\right]dm$$

$$= mf_0 + \frac{m^2}{2}(f_1 - f_0) + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right)(f_2 - 2f_1 + f_0)\Big]_0^2$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

و هي طبقة سمبسون البسيطة.

أما الصيغة المركبة فتنتج عندما نقسم الفترة [a, b] إلى n في الفترات الجزئية المتساوية حيث n لابد ان يكون عدد زوجي.

لتكن النقاط هي $x_1, x_2, \dots, x_n$ بتطبيق صيغة سمبسون البسيطة على المجموعات المرئية تحصل على:

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$x_n = x_0 + n$$

$$h = \frac{b-a}{h}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} I_i s I_{1+} + I_2 + \cdots + I_n$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\delta x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]_+ \frac{h}{3}[f_2 + 1f_3 + f_4]_+ \dots\dots$$

(عدد زوجي n)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\}$$

صيغة سمبسون المركبة.

مثال\ استخدام قاعدة سمبسون 1\3 لحساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:[6]

$\int_0^1 (x^4 + x)dx$ حيث ان $h = 4$

الحل:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-a}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

x	$f(x)$
0	0
0.25	0.2539
0.5	0.5625
0.75	1.0664
1	2

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + f_n + 2(f_2) + 4(f_1 + f_3)$$

$$= \frac{0.25}{3}[0 + 2 + 2(0.5625) + (0.2539 + 1.0664)]$$

$$= 0.08333[2 + 1.125 + 5.2812]$$

$$= 0.08333(8.4062) = 0.700488$$

مثال: اوجد القيمة التقريبية للتكامل بطريقة سمبسون إذا كانت $h = 4$

$$\int_2^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

الحل:

$$h = \frac{h-a}{n} = \frac{\pi/2 - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_2^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f_\circ = f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f_1 = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.38268$$

$$f_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.70710$$

$$f_3 = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.92387$$

$$f_4 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$= \frac{\pi}{24}[0 + 4(0.382681 + 0.92387$$
$$2(0.70710) + 1]$$

***حساب الخطأ في قاعدة سمبسون**

لحساب الخطأ المرتكب نقوم بحساب الخطأ المرتكب في الفترة الجزئية الأولى أي في الفترة $[x_\circ, x_2]$.
بما اننا استبدلنا التابع التكامل بحدودية نيوتن للفروقات من الدرجة الثانية فإن الخطأ المرتكب يكون من مرتبة الى التالي أي:

$$R_1 = h\int_0^2 \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 F_0 dm$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_0}{6}\int_0^2 (m^3 - 3m^2 + 2m)dm = 0$$

بما أن نتيجة هذا التكامل تساوي صفر فإن هذه النتيجة تدفعنا إلى الانتقال الى الحد الخامس في حدودية نيوتن لان من غير المعقول أن تكون صيغة سمبسون بدون خطأ.
وعليه فإن:

$$R_1 = h_0^2 \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta f_0 dm$$

$$= \frac{h\Delta^4 f_0}{24}\int_0^2 (m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m)dm$$

$$= \frac{h\Delta^4 f_0}{24}\left[\frac{m^5}{5} - \frac{6m^4}{4} + \frac{11m^3}{3} - \frac{6m^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{h\Delta_0^4 f_0}{24}\left(\frac{-4}{15}\right) = \frac{-4h\Delta^4 f_0^0}{360} = \frac{-h\Delta_0^4 f_0}{a_0}$$

بالاعتماد على العلاقتين التاليتين:

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{f^n(s)}{n!}, s \in [a, b]$$
$$(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x_1)}{n!\, h^n}$$

يمكننا ان نكتب

$$f''(s) = \frac{\Delta'' f_0}{h^4}, S \in [x_0, x_2]$$

وبالتالي فأن صيغة الخطأ تكتب بالشكل التالي:

$$R_1 = -\left[\frac{h^5}{q_0} f^4(s_1)\right]$$

تعطي الصيغة السابقة الخطأ عند حساب قيمة تقريبية للتكامل على الفترة الجزئية الأولى $[x_0, x_2]$
وبالتالي فإن الخطأ الكلي المركب يساوي مجموع الأخطاء المرتكبة عل كل الفترات الجزئية والتي عددها $\frac{n}{2}$ فترة أي أن:

$$R = \frac{n}{2}\left[-\frac{h^5}{q_0} f^4(s,)\right]; s \in [a, b]$$

وبما أن:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

فان عبارة الخطأ الكلي المرتكب:

$$R = -\frac{b-a}{١٨٠} h^٤ f^{4x)}(s);\ \delta \in [a, b] \qquad [3]$$

(4-2) تكامل روميوك:

يعتمد تكامل روميوك بالمقام الاول على في عدة اشباه المنحرفات في تكامل الدالة$\boldsymbol{f(x)}$ في الفترة **[a,b]** بعد تقسيمها على **n** من الفترات الجزئية$[\boldsymbol{x_{i-1}, x_i}]$ بالنقاط $\boldsymbol{x_i}$ حيث$\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$

وباعتبار $\boldsymbol{x_\circ = a, x_n = b}$

$$h = x_i - x_i - 1$$

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$T(h) = I + \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i}$$

$$T(h) = T_0, k$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = T_0, k + T$$

حيث $\boldsymbol{T\left(\frac{h}{2}\right)}$ هي قيمة التكامل المحسوب بقاعدة شبه المنحرف باستعمال طول فترة $\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\right)$ اي عدد الفترات الجزئية **n**

$$T_0, k = I + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h^{2j} \text{.....-(1)}$$

$$T_{-1} k + 1 = I + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^{2j} \text{ ..... (2) بالطرح}$$

من المعادلتين اعلاه يمكن حذف الحد الذي يحوي على h^2

$$T_i, K = \frac{4T_{0,h+1} - T_{0,k}}{3}$$

$$T_{1,0} = \frac{1}{4-1}\left(4T_{0,1} - T_{0,0}\right)$$

$$T_{2,0} = \frac{1}{4^2-1}\left(4^2T_{1,1} - T_{1,0}\right)$$

$$T_{3,0} = \frac{1}{4^3-1}\left(4^3T_{2,1} - T_{2,0}\right)$$

$$T_{1,1} = \frac{1}{4-1}\left(4T_{0,2} - T_{0,1}\right)$$

$$T_{1,2} = \frac{1}{4-1}\left(4T_{0,3} - T_{0,2}\right)$$

مثال \ اوجد قيمة التكامل $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$

الحل\

$$h = 1 \rightarrow h = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$T_{010} = \frac{h}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 0.107106$$

$$h = 2 \rightarrow h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{To,1} = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right] = 0.633061$$

$$h = 4, h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$t_{\circ,\lambda} = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + fi\right.$$

$$= 0.615329$$

$$n = 1\ T_{1,0} = \frac{1}{4-1}\left[4T_{0,1} - T_{0,0}\right]$$

$$\frac{1}{3}[4(0.63306) - 0.70106]$$

$$0.16.8379$$

$$\mathrm{T}_{1,1} = \frac{1}{3}[4(0.61532) - 0.633061$$

$$=0.\ 609418$$

$$\mathrm{T}_{1,2} = \frac{1}{15}[16(0.609418) - 0.60879$$

$$=0.\ 60987$$

الفصل الثالث

الفصل الثالث

(1-3) حساب الخطأ:

سوف نأخذ مثال ونقوم بحله بجميع الطرق التي درسناها في هذا البحث ونجد حساب الخطأ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 2x \, dx$$

لنجد قيمة التكامل التقريبي باستخدام الطرق السابقة نفترض ان $h = 4$

$$h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x)$	0	0.70412	2.81649	6.33711	11.26598

A. الحل باستخدام طريقة شبه المنحرف

$$I_1 = \frac{h}{2}[f_\circ + 2(f_1 + f_2 + f_3) + f_4]$$

$$= \frac{\frac{\pi}{16}}{2}[[0 + 2[0.7041 + 2.8164 + 6.33711] + 11.2659]$$

$$= 3.049268187$$

حساب الخطأ

$$f(x) = e^{3x} \sin 2x$$

$$f'(x) = e^{3x}(2\cos(2x) + 3\sin 2x)$$

$$f''(x) = e^{3x}(12\cos(2x) + \sin 2x)$$

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(x)$$

$$E = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{12} \cdot (0.1963)^4(12)$$

$$= -0.588325$$

$f''(0)=2$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -44.9664$

B. الحل باستخدام طريقة سمبسون $\frac{1}{3}$

$$I_3 = \frac{h}{3}[f_\circ + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$= \frac{\pi\backslash 16}{3}[0 + 4(0.7041) + 2(2.8164) + 4(6.3371) + 11.2659]$$

$$= 2.9471529$$

حساب الخطأ

$$E = -\frac{b-a}{180}h^4 f^4(x) = e^{3x}(120(0)(2x) - 119\sin 2x)$$

$$f^4(x) = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{180} - (0{,}1763)^4(120)$$

$$= 40.7339449$$

1.877 =120 , $f^4\left(\frac{\pi}{4}\right)=f^4(0)$

القيمةالكبرى$f^4(0)$

C. الحل باستخدام طريقة المستطيلات

$$I_3 = h[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$$

$$= \frac{\pi}{16}[0 + 0.70412 + 2.8164 + 6.3371 + 11.2659]$$

$$= 4.14738799$$

حساب الخطأ

$E = \frac{b-a}{2} hf'(x) = e^{3x}\, 2\cos 2x - 3\sin 2x$ S=$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$E = \frac{\frac{\pi}{4}-0}{2}(0.1963)(2)$=4.0010094

$f'(0)= 2, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3$

D. الحل باستخدام طريقة روميوك

$$h = 1 \;\; h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$T_{o,o} = \frac{h}{2}[f_0 + f_1] = \frac{\pi}{2}[0 + 11.2659]$$

$$= 0.3928(11.2659)$$

$$= 4.42299$$

$$h = 2 \rightarrow h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$T_{0,1} = \frac{h}{2}\left[f_{(0)} + 2f_{(2.8164)} + f_{(11.2659)}\right]$$
$$=(0.1963)(16.8787)$$
$$= 3.3172$$
$$n = 4 \rightarrow h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$
$$T_{0,2} = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{16}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= (0.1963)(31.0611)$$
$$=6.09729393$$
$$m = 1 \quad T_{1,0} = \frac{1}{4-1}\left[4T_{0,1} - T_{0,0}\right]$$
$$= \frac{1}{3}[4(3.3172 - 0.42299]$$
$$= (0.33.3)(8.84581)$$

$$T_{1,0} = [2.9456547]$$
$$m = 2 \quad T_{1,1} = \frac{1}{3}[4(6.09729) - (3.3172)$$
$$= (0.333)[21.07197572]$$
$$= 7 \cdot 016967$$
$$T_{1,2} = \frac{1}{15}[16(7.016967) - 2.945654]$$
$$= 7.2883933$$

سوف نأخذ مثال ونقوم بحله بجميع الطرق التي درسناها في هذا البحث ونجد حساب الخطأ.

$$\int_{-0.5}^{0} x \ln(x+1)\, dx$$

لنجد قيمة التكامل التقريبي باستخدام الطرق السابقة نفترض ان $h = 4$

$$h = \frac{0 - (-0.5)}{4} = 0.125$$

x	-0.5	-0.375	-0.25	-0.125	0
$f(x)$	0.34657	0.17625	0.07122	0.01669	0

- **الحل باستخدام طريقة شبه المنحرف**

$$I_1 = \frac{h}{2}[f_x + 2f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$= \frac{0.125}{2}[0.3465 + 3(0.1762) + 2(0.07192) + 2(0.0166 + 0]$$

$$= 0.05474325$$

حساب الخطأ

$$f(x) = x\ln(x+1)$$

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$$E = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(x)$$

$$E = -\frac{(0+0.5)}{12}(0.125)^2(6)$$

$$= -\frac{0.5}{12}(0.09375)$$

$$= -0.443733$$

القيمة الكبرى $f(-0.5) = 6$

$f(0) = 2$

- **الحل باستخدام طريقة سمبسون $\frac{1}{3}$**

$$I_3 = \frac{h}{3}[f_\circ + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$
$$= \frac{0.125}{3}[0.3465 + 4(0.1762) + 2(0.0719) + 4(0.0166) + 0]$$
$$= 0.055307816$$

حساب الخطأ

$$E = -\frac{b-a}{180}h^4 f^4(x) = e^{3x}(120(0)(2x) - 119\sin 2x)$$
$$f^4(x) = -\frac{0.5}{180} - (0.125)^4(112)$$
$$= -0.00075742$$

$f(0)=8$, $f(-0.5)=112$

القيمةالكبرى$f(-0.5)$

- **الحل باستخدام طريقة المستطيلات**

$$I_3 = h[f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4]$$
$$= 0.12.5[0.3465 + 0.1762 + 0.071) + 0.0160 + 0]$$
$$= 0.076325$$

حساب الخطأ

$$E = \frac{b-a}{2}hf'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$
$$E = \frac{0.5}{2}(0.125)$$

$f(-0,5)= -2.65514, f(0) = 0$

- **الحل باستخدام طريقة روميوك**

$$h = 1 \rightarrow h = \frac{0 + 0.5}{1} = 0.5$$

$$T_{\circ},0 = \frac{0.5}{2}[0.3465 + 0]$$

$$= 0.086625$$

$$h = 2 \rightarrow h = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

$$T_{0,1} = \frac{0.25}{2}[\mathrm{f}(-0.5) + 2\mathrm{f}(-0.25) + f(0)]$$

$$T_{0,1} = 0.612875$$

$$h = 4 \rightarrow h = \frac{0.5}{4}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_s + f_4\}$$

$$T_{0,2} = (0.0625)(0.8759)$$

$$= 0.05474375$$

$$m = 1\ T_{1,0} = \frac{1}{4-1}\left[4T_{0,1} - T_{0,0}\right]$$

$$\frac{1}{3}[4(0.6612875) - (0.086625)]$$

$$= 0.052788825$$

$$\mathrm{h} = 2\ \ T_{1,1} = \frac{1}{3}[4(0.05414375) - 0.6612.875]$$

$$= 0.0525099375$$

$$h_1 = T_{2,0} = \frac{1}{15}[16(0.0525099375) - 0.05278825$$

$$= 0.05249136$$

الاستنتاج: -

من خلال دراسة هذا البحث تم استنتاج ما يلي:

ان النتائج التي تم الحصول عليها من طرائق التكامل العددي تستنتج ان صيغة سيمسون هي أفضل طريقة وأكثر دقة من الطرق الأخرى لأن مقدار الخطأ في هذه الطريقة صغيرة جداً مقارنة مع الطرق الأخرى.

المصادر:

[١] فؤاد حمزة عبد الشريفي - ابتسام عبد الواحد الجزائري - صابرين حاكم ملك، استنباط قاعدة للتكامل العددي رسالة ماجيستير مقدمة الى جامعة بابل - كلية العلوم ٢٠١٦.

[٢] حنان عبد الرحمن علوه - منى حامد عبد الحف - التكامل باستخدام الطرق العددية، بحث مقدم الى جامعة سبها - كلية العلوم (٢٠١٦ - ٢٠١٧).

[٣] أ.د. محمد منصور صبح - د. صالح بن منيع الحربي - التحليل العددي وطرف حسابه العددي - مكتبة الرشيد - الطبعة الأولى (١٤٠٧ هـ - ٢٠٠٦).

[٤] التكامل العددي الموقع الفريد في الفيزياء.

[٥] د. كاظم محمد حسن اللامي – Introduction to numerical analysis- **طباعة ونشر جامعة الموصل (1979).**