جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـامعة ميسان
كليــة التربية
قسم الرياضيات

الفضاءات المتراصة

أعداد الطالبان

نعيم حيدر شاتي

مهدي صالح دهش

بحث مقدم الى مجـلس كلية التربية – جـامعة ميسان وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في علوم الرياضيات

بأشراف

م . د. هديل غازي عبد علي

1446هـ 2025 م

بِسْمِ اللَّـهِ الرَّحْمَـنِ الرَّحِيمِ

((وَيَرَى الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ الَّذِي أُنزِلَ إِلَيْكَ مِن رَّبِّكَ هُوَ الْحَقَّ وَيَهْدِي إِلَى صِرَاطِ الْعَزِيزِ الْحَمِيدِ))

سورة سباء، اية: ٦

الاهداء

الى الحبيب الازلي الذي لم ينسني ولن ينساني لحظة في حياتي وحتى بعد مماتي

الله جل جلاله

الى من أضاء الدنيا بنوره وأنقذ العباد من المهلكات وبين الحكم من الشبهات

الى خاتم الانبياء محمد صلى الله عليه واله وسلم

الى من علمني الدنيا كفاح ... وسلاحها العلم والمعرفة

الى الذي لم يبخل علي بأي شيء ... الى من سعى لأجل راحتي ونجاحي

الى اعظم وأعز رجل بالكون ... ابي.

الى من ساندني في صلاتها ودعائها ... الى من سهرت الليالي تنير دربي

الى من شاركني افراحي وأساتي ... الى نبع العطف الحنان الاجمل

بابتسامتها في حياتي ... الى اروع امرأة في الوجود ... امي

الشكر والتقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الانبياء والمرسلين ابو القاسم محمد واله وصحبه اجمعين اشكر الله الذي لا يطيب العمل الا بشكره ولا تطيب اللحظات الا بذكره ولا تطيب الاخرة الا بعفوه والذي وفقنا لإنجاز هذه الدراسة فله الحمد اولاً اخيراً.

ويسعدنا ان نشكر من كان الشكر اقل ما يقدم له استاذتنا (م.د هديل غازي عبدعلي) التي تفضلت بالأشراف على هذا البحث فجزاها الله خيراً ولها منا فائق الشكر والاحترام.

كما نتقدم بخالص الشكر الى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة ومهدوا لنا طريق العلم والمعرفة الى جميع اساتذتنا الافاضل.

كذلك نشكر كل من قام بمساعدتنا في اتمام هذا البحث وقدم لنا العون ومد لنا يد المساعدة. ولا ننسى ان نتقدم بالشكر الى اسرنا العزيزة على ما أبدوه من جهد وتشجيع لكي يظهر هذا العمل في أحسن صورة ممكنة.

اسال الله العظيم ان ينال جهدنا اعجابكم وان تكون هذه الدراسة بمثابة علم ينتفع به.

المحتويات

ت	الموضوع	الصفحة
1	المستخلص	v
2	المقدمة	1
3	الفصل الاول	2-5
4	مفاهيم اساسية في التبولوجيا	2
5	المجموعات المغلقة	3
6	الاساس الى الفضاء التبولوجي	4
7	الدوال المتصلة	5
8	الفصل الثاني(الفضاء المتراص)	6-12
9	الغطاء	6
10	أنواع الغطاء	6-7
11	الفضاء المتراص	7-8
12	بعض أنواع الفضاءات المتراصة	9-10
13	التراص والاتصال	11
14	المصادر	12

المستخلص

تحدثنا في هذا البحث عن خاصـية من أهم الخواص تبولوجيا وهي خاصـية التراص في الفضـاء التبولوجيا وتناولنا موضـوعات مهمة عديدة ذات علاقة بالفضـاء المتراص بداً من الفضـاء التبولوجيا والمجموعات المغلقة والاساس (القاعدة) والدوال المتصلة ثم تطرقنا الى الفضاء المتراص وانواعه والتراص والاتصال.

المقدمة

المقدمة

أهم خاصية تبولوجيا هي التراص. انه يلعب دور المفتاح في عدة فروع من الرياضيات من العدل القول أن من لم يفهم لغاية الآن التراص فهو لم يفهم التبولوجيا! إذاً ما هو التراص؟ يمكن أن يوصف بانه تعميم التبولوجيين للتناهي. التعريف الاصطلاحي يقول إن الفضاء التبولوجي هو متراص إذا حقق الخاصية انه عندما يكون مجموعة جزئية من اتحاد عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة فهو كذلك مجموعة جزئية من اتحاد عدد منتهي من هذه المجموعات المفتوحة. واضح أن كل مجموعة جزئية منتهية من فضاء تبولوجي هي متراصة. وبسرعة يمكن أن نشاهد أن في الفضاء المتقطع المجموعة هي متراصة إذا وفقط إذا كانت منتهية. عندما نذهب الى الفضاءات التبولوجيا مع تراكيب تبولوجيا غنية مثل R نكتشف أن مجموعات غير منتهية يمكن أن تكون متراصة. في الحقيقة كل الفترات المغلقة $[a, b]$ في R هي متراصة. ولكن فترات من هذا النوع هي الوحيدة التي تكون متراصة. لذلك يقودنا لنسأل: بالضبط أي المجموعات الجزئية من R هي متراصة؟ نظرية هين بورل سوف تخبرنا أن المجموعات الجزئية المتراصة في R هي فقط المجموعات التي تكون مغلقة ومحدودة في نفس الوقت. عندما نذهب بعيداً في دراسة التبولوجيا سوفَ نشاهد أن التراص يلعب دوراً حاسماً [5:p.145].

أن العالم الكسندروف قد أعطى التعريف الدقيق لهذه الخاصية كل الفضاءات التبولوجيا عام 1924 بالشكل الآتي:

يسمى الفضاء التبولوجيا فضاءاً متراص (Compact space) إذا وفقط إذا لكل تغطية مفتوحة (Open cover) للفضاء توجد تغطية مفتوحة منتهية جزئية منها لنفس الفضاء. أن الفائدة من خاصية التراص هي إمكانية دراسة الفضاء التبولوجي المتمتع بهذه الخاصية من خلال معرفة عدد منته من المجموعات الجزئية المفتوحة والتي تغطي الفضاء [3:p.173].

في هذا البحث قمنا بدراسة مفهوم التراص في الفضاءات التبولوجيا وقد قمنا بتقسيم هذا البحث إلى فصلان:

تطرقنا في الفصل الأول الى مفهوم الفضاء التبولوجيا والمجموعات المفتوحة والمغلقة وكذلك الأساس والاتصال.

وفي الفصل الثاني قمنا بذكر التراص وبعض انواعه وعلاقته بالاتصال مع بعض الأمثلة الخاصة بالموضوع.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية في التبولوجيا

الفصل الأول

مفاهيم أساسية في التبولوجيا

(1-1) الفضاءات التبولوجيا

تعريف (1-1-1): الفضاءات التبولوجيا [1:p.50]

لتكن X أي مجموعة غير خالية. العائلة المجموعات τ من المجموعات الجزئية من X تســـمى تبولوجيا (Topology)على X اذا حققت الشروط التالية:

1) X والمجموعة الخالية $\emptyset$ تنتميان الى τ.

2) اتحاد اي عدد (منتهي او غير منتهي) من عناصر τ ينتمي لـ τ.

3) تقاطع اي عنصرين في τ ينتمي لـ τ.

الزوج (X,τ) يسمى فضاء تبولوجيا.

مثال (1-1-1): [1:p.50] : لتكن $X = \{a, b\}$ ولتكن

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

نلاحظ ان τ_1 هي تبولوجيا على X لأنها تحقق الشروط 1,2,3 في تعريف (1-1-1).

مثال (1-1-2): [1:p.14] لتكن $X = \{a, bc. d. e\}$ ولتكن

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$$

نلاحظ ان τ_2هي ليست تبولوجيا على X لان

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\} \notin \tau_2$$

(1-2) المجموعات المغلقة

بدلا من الاستمرار بالإشارة الى عناصر في τ نجد انه اكثر ملائمة اعطاء مثل هذه المجموعات اسماً سوف نسميهم "مجموعات مفتوحة" كذلك سوف نسمي متممات المجموعات المفتوحة سوف نسميهم "مجموعات مغلقة" هذه التسمية ليست خيالية ولكنها مشتقة من ما يسمى "فترات مفتوحة " و"فترات مغلقة " على خط الاعداد الحقيقية.

تعريف (1-2-1): المجموعة المغلقة (Closed set) [1:p.43]

اذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي,المجموعة الجزئية s من X تسمى مجموعة مغلقة (closed set) في (X,τ) اذا كانت $\mathrm{X}-\mathrm{S}$ مجموعة مفتوحة في (X,τ). سوف نرمز لمجموعة المجموعات المغلقة بالرمز $\mathrm{F_D}$.

مثال (1-2-1): [1:p.43]

لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $\tau=\{\mathrm{X},\varphi,\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{c,d}\},\{\mathrm{a,c,d}\},\{\mathrm{b,c,d,e}\}\}$ فان

$\mathrm{F_D}=\{\varphi,X,\{b,c,d,e\},\{a,c,d\},\{c,d\},\{a\}\}$

مبرهنة (1-2-1) [1:p.43]: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $\mathrm{F_D}$ عائلة المجموعات الجزئية المغلقة في X فأن

1) Xو $\emptyset$ مجموعات مغلقة.
2) تقاطع أي عدد (منتهي أوغير منتهي) من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.
3) اتحاد اي عدد منتهي من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة.

البرهان:

1) $\emptyset^c = X \in \tau \Rightarrow \emptyset \in F_D$ and $X^c = \emptyset \in \tau \Rightarrow X \in F_D$

2) Let $F_1, F_2 \in F_D$, to prove $F_1 \cup F_2 \in F_D$

$$\Rightarrow \exists\, u_1, u_2 \in F_D \; s.t. F_1 = X - u_1 = {u_1}^c$$

$$F_2 = X - u_2 = {u_2}^c$$

$$F_1 \cup F_2 = (X - u_1) \cup (X - u_2)$$

$$= X - (u_1 \cap u_2)$$

$$F_1 \cup F_2 \in F_D$$

وبنفس الطريقة بالنسبة الى الشرط الثالث.

(1-3) الأساس (القاعدة) الى الفضاء التبولوجيا

تعريف (1-3-1) : الأساس [1:p.90]

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجيا، العائلة $\mathcal{B}$ من المجموعات الجزئية المفتوحة في X تسمى قاعدة (base) للتبولوجيا τ اذا كان كل مجموعة مفتوحة هي اتحاد لعناصر $\mathcal{B}$.

مثال (1-3-1) [1:p.90]]: لتكن $X = \{a, b, c, d\}$ و $\tau_1 = \{X, \varphi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ فإن $B_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ و $B_2 = \{X, \{a, b\}, \{c, d\}\}$ تمثل أســـاس للتبولوجيا τ_1 لان $\mathcal{B} \subseteq \tau_1$ وكل عنصر في τ_1 يمكن كتابته على شكل أتحاد لعناصر من $\mathcal{B}$. أما المجموعة $B_3 = \{X, \{a, b\}\}$ لا تمثل أساس للتبولوجيا.

مبرهنة (1-3-1) [1:p.90]: لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{B}$ عائلة المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط التالية:

1) $X = \cup \{b : b \in \mathcal{B}\}$

2) $\forall b_1, b_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow b_1 \cap b_2 = \cup \{b_i : b_i \in \mathcal{B}\}$

فأن يوجد تبولوجيا وحيد على X بحيث ان $\mathcal{B}$ قاعدة له.

البرهان: نفرض $\tau = \{u \subseteq X : u \in \cup_{\alpha \in \lambda} b_\alpha, b_\alpha \in \mathcal{B}, \forall \alpha \in \lambda\}$

2) Let $u_1, u_2 \in \tau$, to prove $u_1 \cap u_2 \in \tau$

$$u_1 = \cup_{\alpha \in \lambda} b_\alpha \ , u_2 = \cup_{\delta \in \lambda} b_\delta \ , b_\alpha, b_\delta \in B$$

$$u_1 \cap u_2 = (\cup_{\alpha \in \lambda} b_\alpha) \cap (\cup_{\delta \in \lambda} b_\delta)$$

$$= \cup_{\substack{\alpha \in \lambda \\ \delta \in \lambda}} (b_\alpha \cap b_\delta)$$

Since $b_\alpha \cap b_\delta \in B \Rightarrow u_1 \cap u_2 \in \tau$

(1-4) الدوال المتصلة

تعريف (1-4-1) الدوال المتصلة: [1:p.119]

بفرض أن (X,τ) , (Y,τ') فضـــاءان تبولوجيان. يقال $f: X \to Y$ دالة متصـــلة أذا وفقط أذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X أي أن:

$$\forall\, v \in \tau' \Rightarrow f^{-1}(v) \in \tau$$

مثال (1-4-1) [1:p.119] : نفرض $X = \{a,b,c\}, Y = \{x,y,z\}$. ونفرض

$$\tau_x = \{x, \emptyset, \{a\}, \{a,d\}\}$$

$$\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{x,y\}\}$$

ونفرض الدوال $f, g: X \to Y$ المعرفة بالصورة:

$$f(a) = x, f(b) = y \ , f(c) = z, \text{ و } g(a) = x\,, g(b) = z\,, g(c) = y$$

نجد أن f دالة متصلة لأن:

$$f^{-1}(Y) = X \in \tau_x \qquad , f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_x$$

$$f^{-1}(\{x\}) = \{a\} \in \tau_x, \quad f^{-1}(\{x,y\}) = \{a,b\} \in \tau_x$$

$$f^{-1}(\{x,y\}) = \{a,b\} \in \tau_x$$

لكن g ليست متصلة لأن:

$$g^{-1}(\{x,y\}) = \{a,c\} \notin \tau_x$$

الفصل الثاني

الفضاء المتراص

الفصل الثاني

الفضاء المتراص

الأحكام (التراص) هو تعميم لبعض خواص المجموعات المحدودة والمغلقة في الفضاء الاعداد الحقيقية حيث هناك نظريات تعلب دوراً هاماً في التحليل الرياضـــي كنظرية هاين_بوريل (Heine_Borel) والتي تنص على أن كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تكون متراصـــة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة و نظرية بولزانو_فيرشـــتراس (Bolzano_Weierstrass) والتي تنص على أن أي مجموعة جزئية غير منتهية من مجموعة مغلقة ومحدودة في فضـــاء الاعداد الحقيقية لها نقطة تراكم ونظرية كانتور للتقاطع (Cantor's intersection) ونظراً للأهمية البالغة لهذه النظريات في تطوير التحليل الرياضـي والتوبولوجيا وسنقدم في هذا الفصل مفهوم التراص في الفضاءات التبولوجيا وعلاقتها بالفضاءات الأخرى [1: p.235].

(2-1) الغطاء

تعريف (2-1-1) [5:p.146] : يقال ان العائلة $G = \{G_i : i \in I\}$ من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X بأنها غطاء (cover) للمجموعة A أذا كانت

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i = G_1 \cup G_2 \cup \dots$$

مثال (*2-1-1*) [5:p.146]: لتكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ و $A = \{1,2\}$ العائلة

$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,5\}\}$$

تمثل غطاء الى X و A.

(2-1-1) انواع الغطاء

تعريف (2-1-1-1): الغطاء المفتوح [5:p.147]

لتكن I أي مجموعة و $i \in I$ ، u_i عائلة من المجموعات المفتوحة في فضـــاء تبولوجي (X, τ) . لتكن A مجموعة جزئية من (X, τ) فان u_i ، $i \in I$ تسمى غطاء مفتوح إذا كانت $A \subseteq \cup_{i \in I} u_i$.

مثال (2-1-1-1) [5:p.147]: لتكن (X, τ) الفضاء تبولوجيا المنفصل و $A \subseteq X$ فان

$F = \{\{x\} : x \in A\}$ تمثل غطاء مفتوح الى A لان $A = \cup_{x \in A}\{x\}$ و $\{x\}$ تمثل مجموعة مفتوحة في الفضاء تبولوجيا المنفصل.

تعريف (2-1-1-2): الغطاء الجزئي المنتهي [1: p.236]

إذا كانت G غطاء للمجموعة A وكانت $G^* = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ عائلة جزئية من G ومنتهية فان G^* تسمى غطاء منتهي للمجموعة A.

(2-2) الفضاء المتراص

تعريف (2-2-1) [5:p.147]: الفضاء التبولوجيا (X, τ) يسمى فضاء متراص (Compact) إذا كان لكل غطاء مفتوح للفضاء X يوجد غطاء جزئي منتهي للفضاء يغطي X

$$X\ is\ Compact \Leftrightarrow \forall G = \{G_i : i \in N, G_i \in \tau\};\ X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

ويجب ان نلاحظ ان (X, τ) يكون فضاء غير متراص إذا وجد غطاء مفتوح للفضاء X لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

مثال (2-2-1) [1:p.238]: فضاء النقطة المستبعدة (X, E) بدون النقطة P هو فضاء متراص حيث أن $E_p = \{X, U \subseteq X : p \notin U\}$ واذا كانت G غطاء مفتوح للمجموعة $p \in X, X$ فأن توجد $G_{io} \in G$ بحيث تكون $p \in G_{io}$ لكن المجموعة X هي المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحتوي p وهذا فأن $X \in G$لكل غطاء مفتوح G للمجموعة X وبالتالي فأن $\{X\}$ غطاء جزئي منتهي اذاً X فضاء متراص.

مثال (2-2-2) [5:p.146]: ليكن (R, τ) فضاء التبولوجيا الاعتيادي و كانت $A = (0, \infty)$ فأن A ليست متراصة . لان لكل عدد صحيح موجب i, لتكن O_i الفترة المفتوحة $(0, i)$ فأن من الواضح ان $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} O_i$ ولكن لا يوجد $i_1, i_2, \dots . i_n$ بحيث أن

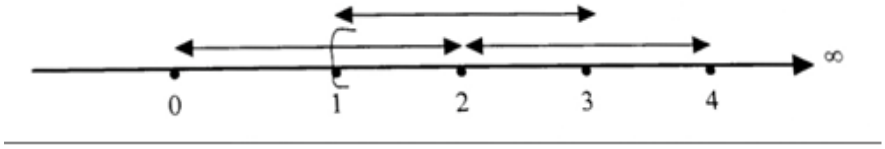
$$A \subseteq (O, i_1) \cup (O, i_2) \dots . (O, i_n)$$

لذلك A ليست متراصة.

مثال (2-2-3) [1:p.244]: المجموعة $A = [1, \infty)$ غير متراصة لان

$$G = \{(0, 2), (1,3), (2, 4), \dots\}$$

غطاء مفتوح للمجموعة A لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي



مبرهنة (2-2-1) [1:p.74]: اي مجموعة جزئية مغلقة من فضاء تبولوجيا متراص (X,τ) تكون متراصة.

البرهان: لنفرض ان F مجموعة جزئية مغلقة من X وأن (X_n) متوالية من عناصر F من ثم فأن (X_n) متوالية في Xالمتراص . ومنه فأن (X_n) تحوي متواليه جزئية (X_{nk}) متقاربة من نقطة x من X وبما ان حدود (نقاط) المتوالية الجزئية هي من عناصر F المغلقة إذن فأن نهايتها x من F وبذلك نجد أننا من اية متوالية من عناصر F استطعنا ايجاد متوالية جزئية متقاربة في F إذن F متراصة.

مبرهنة (2-2-2) [1:p.70]: ان اي مجموعة جزئية متراصة K في (X,τ) فضاء تبولوجي تكون محدودة.

البرهان: نفرض موقتاً أن K مجموعة غير محدودة ومن ثم نستطيع من أجل نقطة a من X إيجاد X_n من K بحيث يكون$d(X_n\,,a)\geq n$ وذلك منأجل كل n من N. وبذلك نحصل على متوالية (X_n) في K. لما كانت K متراصة فأن هذه المتوالية تحوي متوالية جزئية (X_{nk}) متقاربة في K أي ان : $X_{nk}\to y\in K$ ومنه

$$d(X_n\,,a)=\lim_{n\to\infty} d(X_{nk}\,,a)\geq \lim_{n\to\infty} n_k=\infty$$

وذا تناقض ومن ثم فأن K محدودة .

(2-2-1) بعض انواع الفضاءات المتراصة

تعريف (2-2-1-1) الفضاء المتراص تتابعياً [1: p.256]

الفضاء $(X\,,\tau)$ تكون متراصة تتابعياً إذا كانت كل متتابعة في X تحتوي على متتابعة جزئية متقاربة .

مثال (2-2-1-1) [1: p.257]: كل مجموعة منتهية في الفضاء $(X\,,\tau)$ تكون متراصة تتابعياً. بفرض أن A مجموعة منتهية في الفضاء X . $\langle a_n\rangle=\langle a_1\,,a_2\,,\dots\rangle$متتابعة في A حيث ان A منتهية فأن على الاقل

عنصـــر من A ليكن a_0 يجب ان يظهر بعدد لانهائي من المرات في المتتابعة، ومن ثم فأن $\langle a_0 , a_0, \dots . \rangle$ متتابعة جزئية من$\langle a_n \rangle$ وهي متقاربة فيA الى a_0.

مثال (2-2-1-2)[1: p.257]: كل فترة مفتوحة في R ليست متراصة تتابعياً.

بفرض أن $A = (0,1)$ فترة مفتوحة في الفضاء التبولوجيا الاعتيادي نعتبر المتتابعة

$$\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \dots \rangle$$

في المجموعة A. نلاحظ أن $\langle a_n \rangle$تتقارب الى 0 وبالتالي كل متتابعة جزئية منها تتقارب الى 0 ولكن $0 \notin A$. اذاً A ليست متراصة تتابعياً.

تعريف (2-2-1-2) الفضاء المتراص عددياً [1:p.258]

الفضاء(X , τ) يسمى متراص عددياً أذا كان كل غطاء مفتوح قابل للعـــد للـــمجموعة X يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

مثال (2-2-1-3) [1: p.259]: كل فترة محدودة ومغلقة $A = [a , b]$ من R متراصـــة عددياً. اذا كانت B مجموعة جزئية غير منتهية من A تكون محدودة .طبقاً لنظرية بولزانو- فيرشـــتراس تنص النظرية على "كل مجموعة محددة وغير منتهية جزئية منR لها نقطة تراكم " فأنB لها نقطة تراكم وحيث أن A مغلقة فأن $p \in A$ أي أن A متراصة عددياً.

مثال (2-2-1-4) [1: p.260] الفترة $A = (0,1)$ ليست متراصة عددياً.

تعريف (2-2-1-3) الفضاء المتراص محلياً [3: p.187]

ليكن (X , τ) فضاءاً تبولبوجياً . يسمى (X , τ) فضاءاً مـتراص محـــلياً اذا وفقـط اذا وجد لكل نقطة a تنتمي الى X مجموعة مفتوحة A تحتوي على النقطة a بحيث أن $\bar{A}$ مجموعة متراصة.

مثال (2-2-1-5) [3: p.187] الفضـاء التبولوجيا الاعتيادي متراص محلياً. حيث ان لكل نقطة x تنتمي الى R وان (a , b) فترة مفتوحة تحتوي على x فأن $(\overline{a , b}) = [a , b]$ حيث ان $[a , b]$ مجموعة متراصـــة . بينما يلاحظ ان الفضاء الجزئي لمجموعة الاعداد النسبية Q غير متراصة محلياً والسبب في ذلك لو فرضنا أن x نقطة من النقاط Q وأن A مجموعة مفتوحة تحتوي على x فأن A ليست متراصة.

مثـال (2-2-1-6) [3: p.187]: الفضـــــاء التبولوجيـا الإقليـدي (R^n , T^n) متراص محليـاً. لو اخـذنـا $X = (X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ نقطة ما تنتمي الى R^n فأن المجموعة

$$A = (a_1 , b_1) \times (a_2 , b_2) \times \dots \times (a_n , b_n)$$

تحتوي على النقطة X بحيث أن $X_i \in (a_i , b_i)$ لكل $i = 1,2, \dots n$ فأن

$$\bar{A} = [a_1 , b_1] \times [a_2 , b_2] \times \dots \times [a_n , b_n]$$

مجموعة متراصة في R^n.

تعريف (2-2-1-4) الفضاء التراص الموضعي [2: p.221]

نقول عن فضاء تبولوجيا (X , τ) انه متراص موضعياً اذا كان يحقق الشرط التالي : لكل x من X توجد مجاورة واحدة على الاقل بحيث تكون متراصة. كما نسمي المجموعة الجزئية A متراصة موضوعياً ، اذان كان الفضاء الجزئي (A , τ_A) متراص موضعياً.

مبرهنة (2-2-1-1) [2: p.222]: إذا كان الفضـاء التبولوجي (X , τ) متراصـاً موضـعياً ، فأن كل مجموعة مغلقة فيه تكون متراصة موضعياً .

البرهان : إذا كان F مجموعة مغلقة في (X , τ) و x نقطة من F . فأن $x \in X$ وبما ان (X , τ) متراص موضعياً فأن توجد فيه مجاورة متراصة V لـــ X . أن $V \cap F$ مجاورة لـــ x في الفضاء الجزئي (F , τ_f) . كما ان $V \cap F$ مجموعة مغلقة في الفضـــاء الجزئي (V, τ_v) المتراص ، وبالتالي $V \cap F$ تكون متراصـــة فيه بحسب مبرهنة (كـل مجـــموعة جـزئية مغـــلقة في فـضاء مـــتراص هـــي مجـــموعة متـــراصة) وبالتالي متراصـة في الفضـاء (F , τ_f) إذن : $V \cap F$ مجاورة متراصـة لـــــــ X في (F , τ_f) . وبالتالي (F , τ_f) متراصة موضعياً وبالتالي F مجموعة متراصة موضعياً .

(2-3) التراص والاتصال

مبرهنة (2-3-1) [1: p.251]: اذا كانت $f : X \to Y$ دالة متصـلة من الفضـاء التبولوجيا X الى الفضـاء التبولوجيا Y وكان X فضاء متراص فأن $f(X)$ تكون ايضاً متراصاً

البرهان: نفرض ان $G = \{G_i : i \in I\}$ غطاء مفتوح للمجموعة $f(x)$ اي أن $f(x) \subseteq \cup_i G_i$. ومن ثم فأن $X = \cup_i f^{-1}(G_i)$ وحيث ان f دالة متصلة فأن العائلة $\{f^{-1}(G_i)\}$ غطاء مفتوح للمجموعة X . لكن X فضاء متراص ومن ثم فأن توجد عائلة جزئية منتهية $\{f^{-1}(G_{ij})\}_{j=1}^{n}$ بحيث تكون

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{ij})$$

وهذا يؤدي الى أن:

$$f(x) = f\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(G_{ij})\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{n} f f^{-1}(G_{ij})\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}$$

وعليه فأن توجد عائلة جزئية منتهية $\{(G_{ij})\}_{j=1}^{n}$ من G تغطي $f(x)$. اي ان $f(x)$متراصة .

مثال *(1-3-2) [1:p.254]* : بفرض أن $f: X = [0,1] \to R$ دالة معرفة بالصورة :

$$f(t) = (\cos 2\pi t\,, \sin 2\pi t)$$

نلاحظ أن f دالة تناظر احادي من X الى دائرة الوحدة S وهي دالة متصلة لكن $S \neq [0,1]$ حيث $[0,1]$ غير متراصة.

المصادر

المصادر

1- أ.د.أحمد عبد القادر رمضـــان و د.طه مرســي العدوي ، الطبولوجيا العامة، قســم الرياضــيات _كلية العلوم_جامعة الملك سعود_فرع القصيم، نُشر لأول مرة عام 1986.

2- الدكتور محمد خير أحمد والدكتور بســـام ضـــغيم، تبولوجيا 2 جامعة حلب، مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية 1430هـ _ 2009 م.

3- أ. د.كتور صلاح أحمد، أ.د.عبد الواحد ابو حمده الطبولوجيا (1) ،منشورات جامعة دمشق، خلاصة في الفضاءات المترية، أهداء من الدكتور بشير قابيل لطلاب الرياضيات في جامعة دمشق بمناسبة مطلع عام 2018.

4- الدكتور غفار حسين موسى، مقدمة في التبولوجيا، أستاذ مساعد قسم الرياضيات، كلية العلوم جامعة الزرقاء الأهلية، نُشر الأول مرة عام *2002* من قبل دار المسيرة للطباعة والنشر.

5- سيدني. امورس، تبولوجيا بدون دموع، نسخة 14 أكتوبر 2007.