جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية الجزئية بأستخدام تحويلات لابلاس

بحث تقدم به الطالبة

آيات يعقوب هاشم

الى مجلس كلية التربية/ قسم الرياضيات

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في تربية الرياضيات

بإشراف

أ. م. د. مصطفى علي حسين

٢٠٢٥ م ١٤٤٦ هـ

(بسم الله الرحمن الرحيم)

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴾

(المجادلة: ١١)

- صدق الله العلي العظيم -

إقرار المشرف

اشهد ان اعداد هذا البحث بـ **(حل المعادلات التفاضلية الجزئية بأستخدام تحويلات لابلاس)** تقدم به الطالبة **(آيات يعقوب هاشم)** قد جرى بإشراف في قسم الرياضيات– كلية التربية – جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في تربية الرياضيات.

المشرف

أ. م. د. مصطفى علي

التاريخ: / / ٢٠٢٥

رئيس قسم الرياضيات

التاريخ / / ٢٠٢٥

الإهـــــداء...

﴿وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ﴾

الحمد لله الذي ما نجحنا وما علونا ولا تفوقنا إلا برضاه، الحمد لله الذي ما اجتزنا درباً ولا تخطينا جهداً إلا بفضله وإليه ينسب الفضل والكمال والإكمال.

أهدي هذا النجاح لنفسي أولاً ثم إلى كل من سعى معي لإتمام المسيرة ودمتم لي سنداً لا عمر له...

بكل حب أهدي فرحة تخرجي:

إلى من هو جزء من القلب والفؤاد إلى قدوتي وخير مثال إلى من احمل اسمه بكل فخر وعزّ **(أبي الغالي)**

إلى نبراس أيامي ووهج حياتي إلى ثمرة الخير والتضحية والعطاء اللامحدود إلى من كانت الداعم الأول لتحقيق طموحاتي إلى من كانت دعواتها تحيطني إلى من لا أجد لها كلمات تعبّر عن قيمتها في القلب الحنون والشمعة التي كانت لي في الليالي المظلمات **(حبيبتي أمي)** حفظها الله

إلى من علمونا حروفاً من ذهب وكلمات من درر وعبارات من أسمى وأجلى عبارات في العلم إلى من صاغو لما علمهم حروفاً ومن فكرهم منارة تنير لنا سيرة العلم والنجاح **(أساتذتنا الكرام)** وأخص منهم بالذكر **(الدكتور أحمد كريم مطشر والدكتور مصطفى علي حسين)**.

ممتنة لكم جميعاً ما كنت لأصل لولا فضلكم عليّ من بعد الله

الشكر والتقدير

لا بد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود فيها إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهود كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد .

قبل أن تمضي نقدم أسمى آيات الشكر والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة، إلى جميع أساتذتنا الأفضل ونخص بالشكر منهم الأستاذ المشرف (الدكتور مصطفى علي حسين) لتفضله بالإشراف على هذا البحث وقراءته وتقديم النصح والإرشاد فلولا جهوده وتوجيهاته لم يظهر البحث بهذا الشكل .

كما أتوجه بالشكر والعرفان إلى رئاسة قسم الرياضيات متمثلة بالسيد رئيس القسم الأستاذ (**م . أحمد كريم مطشر**) وإلى الأساتذة الأفضل في قسم الرياضيات .

والشكر موصول إلى جميع زملائي وزميلاتي أثناء مرحلة الدراسة .

الباحثة

مستخلص البحث

في هذا البحث تم مناقشة حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس يتكون البحث من ثلاثة فصول حيث جاء في الفصل الأول يتكون من محورين، المحور الأول تم دراسة تحويل لابلاس للدوال والمحور الثاني فتم دراسة تحويل لابلاس للمشتقات حيث تم إيجاد التحويل بالنسبة للمتغير المستقل الثاني، أما الفصل الثاني تعاريف أساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية.

أما الفصل الثالث والأخير وهو هدف البحث يتكون من حل معادلات تفاضلية جزئية خطية بمتغيرين وبعضها متجانس وبعضها غير متجانس تحت شروط ابتدائية وحدودية معينة حيث تم إيجاد حل باستخدام تحويل لابلاس الذي عرضه في الفصل الأول

المحتويات

الموضوع	الصفحة
الملخص	و
المقدمة	١
الفصل الأول: تحويل لابلاس	٣
(1-1) تعريف تحويل لابلاس	٣
(1-2) إيجاد تحويل لابلاس لبعض الدوال المشهورة أو الأولية	٤
(1-3) جدول تحويل لابلاس لبعض الدوال المشهورة	١٢
(1-4) تحويل لابلاس العكسي	١٣
(1-5) بعض خواص تحويل لابلاس	١٦
(1-6) إيجاد تحويل لابلاس للمشتقات	١٧
الفصل الثاني: بعض المفاهيم الأساسية في حل المعادلات الجزئية	٢١
(2-1) المعادلة	٢١
(2-2) المعادلة التفاضلية	٢١
(2-3) المعادلة التفاضلية الاعتيادية	٢١
(2-4) المعادلة التفاضلية الجزئية	٢٢
(2-5) رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية	٢٢
(2-6) المعادلة التفاضلية الجزئية	٢٣
(2-7) أمثلة على معادلة المعادلة التفاضلية الجزئية	٢٣
(2-8) الحل العام	٢٤
(2-9) الحل الخاص	٢٤
(2-10) الشروط الحدودية	٢٤
(2-11) الشروط الابتدائية	٢٥
(2-12) الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات معاملات ثابتة	٢٥

الموضوع	الصفحة
الفصل الثالث: إيجاد الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس	٢٨
(3–1) خطوات الطريقة	٢٨
مسألة 3 – 1	٢٨
مسألة 3 – 2	٣٠
مسألة 3 – 3	٣٣
مسألة 3 – 4	٣٦
مسألة 3 – 5	٣٨
مسألة 3 – 6	٣٩
مسألة 3 – 7	٤١
مسألة 3 – 8	٤٢
مسألة 3 – 9	٤٣
المصادر	٤٥

المقدمة

لقد حصل موضوع المعادلات الجزئية على اهتمام الرياضيين منذ بداية القرن السابع عشر وحتى يومنا هذا سواء من ناحية الدراسة ووجود حل من ناحية خصائصه أو من ناحية الحصول عليه وان الرياضي لم توقفه المعادلات التفاضلية التي تكون صعبة بل تجاوز هذه الصعوبة من خلال الحل التقريبي والحل العددي وتظهر الاستفادة من المعادلات التفاضلية الجزئية هي نوع من المعادلات التفاضلية أو علاقة تتضمن توابع مجهولة لها عدة متحولات مستقلة بالإضافة إلى مشتقات جزئية لصياغة وحل المسائل التي تتعلق بتوابع ذات عدة متحولات مثل ذلك الموجود في الصوت والحرارة والكهرباء الساكنة وغيرها وتختلف المعادلات الجزئية عن المعادلات العادية هو ان المعادلات العادية التفاضلية تكون فيها الدالة بمتغير واحد عكس المعادلات التفاضلية الجزئية تكون فيها دالة بمتغيرين أو أكثر.

ان الاختلاف الأكبر في تطبيق تحويل لابلاس في المعادلات الجزئية عما هو عليه في المعادلات التفاضلية الاعتيادية هو أن المعادلة التفاضلية الجزئية تتحول إلى معادلة أما أن تكون تفاضلية جزئية بعدد المتغيرات يقل واحداً عن الأولى وأما إلى معادلة تفاضلية اعتيادية بمتغير واحد يجب أن تحدد كيفية حل المسألة (بتحويل آخر أو بطريقة فصل المتغيرات أو بطريقة أخرى).

تحويل لابلاس هو عبارة عن عمليات تجري على الدوال لتحويلها من مجال إلى آخر وعادة يكون التحويل من مجال الزمن إلى مجال التردد هو فوريه إلا انه تم تطويرها بشكل مستقل. تحويل لابلاس مفيد في تحليل النظم الخطية بخلاف تحويل فوريه الذي يستخدم عادة في تحليل الإشارات كما يستخدم لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها إلى معادلات جبرية. وسمي التحويل بهذا الاسم نسبة إلى العالم الفرنسي لابلاس الذي عاش في القرن التاسع عشر.

الفصل الاول

تحويل لابلاس

الفصل الأول

تحويل لابلاس

(1 – 1) تعريف تحويل لابلاس:

تحويل لابلاس ذو فائدة ويمتاز باحتوائه على عامل التضاؤل e^{-st} الذي يتيح لنا تحويل صنفاً أوسع من الدوال، وهذا التحويل يعمل على الدوال المعروفة على الفترة $[0,\infty]$ فانه غالباً ما يطبق على متغير t وهو أداة فعالة جداً لتحويل المسائل القيم الحدودية والابتدائية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية إلى معادلات جبرية.

وليس تحويل لابلاس مفيداً لتحويل المعادلات التفاضلية الاعتيادية إلى معادلة جبرية فحسب بل تتعدى فائدته لتحويل معادلات الجزئية إلى معادلات اعتيادية.

وبصورة خاصة سنحاول تطبيق تحويل لابلاس على أي من المتغيرات x, y, z, t التي تتغير من o إلى ∞ (ولو اننا سنطبق ذلك عموماً على الزمن)، ان الاختلاف الأكبر في التطبيق تحويل لابلاس في المعادلات التفاضلية الجزئية عما هو عليه في المعادلات التفاضلية الاعتيادية هو أن المعادلة التفاضلية الجزئية تتحول إلى معادلة أما أن تكون تفاضلية جزئية بعد المتغيرات يقل واحد عن الأولى وأما إلى معادلة تفاضلية اعتيادية بمتغير واحد وعادة يكون التحويل من مجال الزمن إلى مجال التردد وسمي بتحويل لابلاس نسبة إلى العالم الفرنسي سيمون لابلاس وهو شبيه بتحويل فوريه إلا انه تم تطويرهما بشكل مستقل وتحويل لابلاس مفيد في تحويل النظم الخطية، حيث ان تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو: [1]

$$l[f] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-st}.dt$$

(1 – 2) إيجاد تحويل لابلاس لبعض الدوال المشهورة أو الأولية

1) تحويل الدالة الثابتة هو:

$$L(k) = \frac{k}{s}$$

Sol:

$$\ell(k) = \int_0^\infty k\, e^{-xt} dx$$

$$= k \int_0^\infty e^{-xt}\, dx$$

$$= \frac{-k}{s}[e^{-xt}]_0^\infty$$

$$= \frac{-k}{s}\left[e^{-s(\infty)} - e^{-s(0)}\right]$$

$$= \frac{-k}{s}[0 - 1]$$

$$= \frac{-k}{s}[-1]$$

$$= \frac{k}{s}$$

2) تحويل الدالة x^n هو:

$$L(x^n\ ) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

N عدد صحيح موجب وان $s > 0$

الحل: حسب تعريف لابلاس

Sol:

$$L(x^n\ ) = \int_0^\infty x^n\, e^{-sx} dx$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة

$$u = x^n \qquad dv = e^{-sx} dx$$

$$du = nx^{n-1} dx \qquad v = \frac{-1}{s} e^{-sx}$$

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-sx} dx = \left[x^n - \frac{1}{s} e^{-sx}\right]_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{n-1} dx$$

يحل أيضاً بالتكامل بالتجزئة

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-sx} dx = 0 + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{n-1} dx$$

$$u = x^{n-1} \qquad dv = e^{-sx} dx$$

$$du = n - 1x^{(n-2)} dx \qquad v = \frac{-1}{s} e^{-sx}$$

$$\int_0^\infty x^n\, e^{-sx} dx = \frac{n}{s}\left[x^{n-1} - \frac{1}{s} e^{-sx}\right]_0^\infty + \frac{n^2-n}{s^2} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{n-2} dx$$

$$= \frac{n}{s}[0] + \frac{n^2-n}{s^2} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{n-2} dx$$

$$= \frac{n^2-n}{s^2} \int_0^\infty e^{-sx}\, x^{n-2} dx$$

وبتكرار التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$L(x^n) = \frac{n!}{S^{n+1}}$$

3) تحويل الدالة e^{ax} هو:

$$\ell[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$$

Sol:

$$\ell[e^{ax}] = \int_0^{\infty} e^{ax}\, e^{-sx} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x(s-a)} dx$$

$$= \frac{-1}{(s-a)} \left[e^{-(s-a)x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{(s-a)} \left[e^{-(s-a)(\infty)} - e^{-(s-a)(0)}\right]$$

$$= \frac{-1}{(s-a)} [0-1]$$

$$= \frac{-1}{(s-a)} [-1]$$

$$= \frac{1}{(s-a)}$$

4) تحويل دالة $Sinax$ هو:

$$L[Sinax] = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Sol:

$$\ell[Sinax] = F(s) = \int_0^{\infty} Sinax e^{-sx} dx$$

$u = Sinax$ $\qquad$ $dv = e^{-sx}dx$

$du = aCosaxdx$ $\qquad$ $v = \frac{-1}{s} e^{-sx}$

$$= \left[\frac{-1}{s}e^{-sx}\,Sinax\right]_0^{\infty} + \frac{a}{s}\int_0^{\infty} cosaxe^{-sx}dx$$

$$= 0 + \frac{a}{s}\int_0^{\infty} cosaxe^{-sx}dx$$

$$\frac{a}{s}\int_0^{\infty} cosaxe^{-sx}dx$$

$u = cosax$ $\qquad$ $dv = e^{-sx}dx$

$du = asinaxdx$ $\qquad$ $v = \frac{-1}{s}e^{-sx}$

$$F(s) = \frac{a}{s}\left[Cosax - \frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^{\infty} + \frac{-a^2}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-sx}Sinaxdx$$

$$F(s) = \frac{a}{s}\left[0 - \frac{1}{s}\right]_0^{\infty} - \frac{a^2}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-sx}Sinaxdx$$

$$F(s) = \frac{a}{s} - \frac{a^2}{s^2}\int_0^{\infty} e^{-sx}Sinaxdx$$

$$F(s) + \frac{a^2}{s^2}.f(s) = \frac{a}{s^2}$$

$$F(s).\left[1 - \frac{a^2}{s^2}\right] = \frac{a}{s^2}$$

$$F(s) = \left[\frac{s^2-a^2}{s^2}\right] = \frac{a}{s^2}$$

نضرب $\times \left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$ للطرفين

$$F(s) = \frac{a}{s^2} - \frac{s^2}{s^2-a^2}$$

$F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$

5) تحويل الدالة $Cosax$ هو:

$$\ell[Cosax] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Sol:

$\ell[Cosax] = F(s) = \int_0^\infty Cosax\, e^{-sx} dx$

$u = Cosax \qquad dv = e^{-sx} dx$

$du = -aSinaxdx \qquad v = \frac{-1}{s} e^{-sx}$

$F(s) = \left[\frac{-1}{s} e^{-sx} Cosax\right]_0^\infty + \frac{-a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} Sinaxdx$

$F(s) = \left[0 + \frac{1}{s}\right] - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} Sinaxdx$

$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-sx} Sinaxdx$

$u = Sinax \qquad dv = e^{-sx} dx$

$du = aCosaxdx \qquad v = \frac{-1}{s} e^{-sx}$

$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\left[\frac{-1}{s} e^{-sx} Sinax\right]_0^\infty + \frac{a^2}{s^2} \int_0^\infty e^{-sx} Cosaxdx$

$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}[0] - \frac{a^2}{s^2} F(s)$

$F(s) + \frac{a^2}{s^2} F(s) = \frac{1}{s}$

$$F(s)\left[1+\frac{a^2}{s^2}\right]=\frac{1}{s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s}.\frac{s^2}{s^2+a^2}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

6) تحويل الدالة $Sinhax$ هو:

$$L[Sinhax]=\frac{a}{s^2-a^2}$$

Sol:

$$L[Sinhax]=L\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[\ell e^{ax}-\ell e^{-ax}]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)-(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s+a-s+a}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2a}{(s-a)(s+a)}=\frac{a}{s^2-a^2}$$

7) تحويل الدالة e^{-ax} هو:

$$L[e^{-ax}]=\frac{1}{s+a}$$

Sol:

$$L[e^{-ax}] = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, e^{-ax} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x(s+a)} dx$$

$$= \frac{-1}{s+a}\left[e^{-(s+a)x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{s+a}[0-1]$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

8) تحويل الدالة x هو:

$$L[x] = \frac{1}{s^2}$$

Sol:

$$L[x] = \int_0^{\infty} x\, e^{-sx} dx$$

$$u = x \qquad\qquad dv = e^{-sx} dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \frac{-1}{s} e^{-sx}$$

$$= \left[\frac{-sx}{s} e^{-sx}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx$$

$$= \frac{1}{s}.\frac{-1}{s}[e^{-sx}]_0^{\infty}$$

$= \frac{-1}{s^2}[0-1] = \frac{1}{s^2}$

9) تحويل الدالة $Coshax$ هو:

$$L[Coshax] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Sol:

$L[Coshax] = L\left[\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right]$

$= \frac{1}{2}[Le^{ax} + e^{-ax}]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)+(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+a+s-a}{(s-a)(s+a)}\right]$

$= \frac{1}{2}\frac{2s}{(s-a)(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2}$

10) تحويل الدالة $x - e^{-ax}$ هو:

$$L[x.e^{-ax}\ ] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

Sol:

$L[x - e^{-ax}\ ] = \int_0^\infty x.e^{-ax}e^{-sx}dx$

$$= \int_0^\infty x.e^{-(a+s)x}dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{-x(a+s)}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{-1}{a+s}e^{-x(a+s)}$$

$$= \left[\frac{-x}{a+s}e^{-x(a+s)}\right]_0^\infty + \frac{1}{a+s}\int_0^\infty e^{-(a+s)x}\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{a+s}\int_0^\infty e^{-(a+s)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{a+s}.\frac{-1}{a+s}\left[e^{-(a+s)x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{-1}{(a+s)^2}[0-1] = \frac{1}{(a+s)^2}$$

(1 – 3) جدول تحويل لابلاس لبعض الدوال المشهورة

$f(x)$	$L[f(x) = f(x)]$
k	$\frac{k}{s}, s > 0$
x^n	$\frac{n!}{S^n + 1}, s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, s > 0$
$Sinax$	$\frac{a}{a^2 + s^2}, s > 0$
$Cosax$	$\frac{s}{a^2 + s^2}, s > 0$
$Sinhax$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
$Coshax$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > 0$
e^{-ax}	$\frac{1}{s+a}, s > 0$

$L[f(x) = f(x)]$	$f(x)$
$\frac{1}{s^2}$	x
$\frac{1}{(a+s)^2}$	$x.e^{-ax}$

المصدر [2]

(1 – 4) تحويل لابلاس العكسي

من تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وجدنا أن:

$$L[f(x)] = \bar{f}(s)$$

بافتراض أن L^{-1} هو مؤثر العكسي للمؤثر L فان:

$$f(x) = L^{-1}[f(s)]$$

وعلى هذا فان مما سبق يمكن بسهولة استنتاج ما يلي: [3]

1) إذا كان $L = [1]\frac{1}{s}$ فان $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$

2) إذا كان $L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ فان $L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = x^n$

3) إذا كان $L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$ فان $L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{ax}$

4) إذا كان $L[Cosax] = \frac{s}{s^2+a^2}$ فان $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = Cosax$

وهكذا بالنسبة لباقي الدوال

مثال: أوجد: $L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right]$ **حيث a, b ثابتان**

Sol:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right]$$

بالتحليل إلى الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+a}$$

وبالضرب × $(s+a)(s+b)$ وبمساواة المعاملات نجد أن:

$$A = -B\frac{1}{a-b}$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+a}\right]$$

باستخدام المؤثر العكسي

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] = \frac{1}{a-b}\left[L^{-1}\frac{1}{s+a} - L^{-1}\frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}(e^{-ax} - e^{-ax})$$

وبالتالي فأن:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right] = \frac{1}{a-b}(e^{-ax} - e^{-ax})$$

مثال: أوجد $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right]$ حيث b, a ثابتان حقيقيان.

Sol:

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right]$$

بالتحليل إلى الكسور الجزئية نحصل على:

$$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \frac{A}{(s^2+a^2)} + \frac{B}{(s^2+b^2)}$$

بالضرب × $(s^2+a^2)(s^2+b^2)$ وبمساواة المعاملات نجد أن:

$$A = -B\frac{1}{a^2-b^2}$$

ومنها نحصل:

$$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}\right]$$

باستخدام المؤثر لابلاس العكسي

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right] = \frac{1}{b^2-a^2}\left[L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}(Cosax - Cosbx)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right] = \frac{1}{b^2-a^2}(Cosax - Cosbx)$$

تحويل المشتقة $y_{tt}(x,y)$ هو

$$L[y_{tt}(x,t)] = s^2 y^-(x,s) - sy(x,0) - y(x,0)$$

Sol:

$$L[y_{tt}(x,t) = \int_0^\infty y_{tt}(x,t)e^{-st}dt$$

$u = e^{-st}$ $\qquad dv = y_{tt}(x,t)dt$

$du = -se^{-st}dt$ $\qquad v = y_t(x,t)$

$$L[y_{tt}(x,t)] = [e^{-st}y(x,t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y_t(x,t)dt$$

تستخدم طريقة التجزئة مرة ثانية:

$u = e^{-st}$ $\qquad dv = y_t(x,t)dt$

$du = -se^{-st}dt$ $\qquad v = y(x,t)$

$$L[y_{tt}(x,t)] = -y(x,0) + s[e^{-st}y(x,0)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y(x,t)dt$$

$$= -y(x,0) + s[0 - y(x,0)] + s^2 y^-(x,s)$$
$$= -y(x,0) - sy(x,0) + s^2 y^-(x,s)$$
$$= s^2 y^2 - sy(x,0) - y(x,0)$$

(1 – 5) بعض خواص تحويل لابلاس

إن اختصاص الأولى التي يتصف بها تحويل لابلاس هي الخاصية الخطية: [2]

$$L[Af(t) + Bg(t)] = AL[f(t)] + BL[g(t)]$$

بحيث أن A, B ثابتان $g(t)$ دالة معرفة $t > 0$ وعند $B = 0$ نحصل على:

$$L[Af(t)] = AL[f(t)]$$

يمكن تحقيق هاتين خاصيتين من التعريف مباشرة لبرهان الأولى:

$$\ell[af(t) + Bg(t)] = \int_0^\infty e^{-st}[Af(t) + Bg(t)]dt$$

$$= \int_0^\infty A\, e^{-st} f(t)dt + \int_0^\infty B\, e^{-st} g(t)dt$$

$$= A\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + B\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

$$= A\ell[f(t)] + B\ell[g(t)]$$

لبرهان الخاصية الثانية:

$$\ell[kf(t)] = \int_0^\infty ke^{-st} f(t)dt$$

$$= k\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= k\ell[f(t)]$$

(1 – 6) إيجاد تحويل لابلاس للمشتقات

ليكن الدالة $y = (x,t)$ معرفة على الفترة $a \le x \le b$ و$t > 0$ وإذا نظرنا إلى $y = (x,t)$ كدالة في t ذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$ وانها متصلة في أجزاء (piece wise) على كل الفترة محدودة $t \ge 0$ فاننا نستخدم الرموز التالية: [3]

$$L[y(x,t)] = \int_0^\infty y(x,t) = \bar{y}(x,s) = \bar{y}$$

- **تحويل المشتقة $y_t = (x,t)$ هو:**

$$L[y_t = (x,t)] = -y(x,0) + s\bar{y}(x,s)$$

Sol:

$$L[y_t = (x,t)] = \int_0^\infty y_t(x,t)\, e^{-st} dt$$

تستخدم طريقة التجزئة وكما يلي:

$$y = e^{-st} \qquad dv = y(x,t)dt$$

$$dy = -se^{-st}dt \qquad v = y(x,t)$$

نعوض

$$L[y_t = (x,t)] = [e^{-st}y(x,t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y(x,t)dt$$

$$= [0 - y(x,0)] + s\bar{y}(x,s)$$

$$= -y(x,0) + s\bar{y}(x,s)$$

- **تحويل المشتقة $y_{tt} = (x,t)$ هو:**

$$L[y_{tt} = (x,t)] = \int_0^\infty y_{tt} = (x,t)e^{-st}dt$$

$$y = e^{-st} \qquad dv = y_{tt}(x,t)dt$$

$$dy = -se^{-st}dt \qquad v = y_t(x,t)$$

$$L[y_{tt} = (x,t)] = [e^{-st}y(x,t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y_t(x,t)\, dt$$

نستخدم طريقة التجزئة مرة ثانية

$$y = e^{-st} \qquad dv = y_t(x,t)dt$$

$$dy = -se^{-st}dt \qquad v = y(x,t)$$

$$L[y_{tt} = (x,t)] = -y(x,0) + s[e^{-st}y(x,0)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}y(x,t)\,dt$$

$$= -y(x,0) + s[0 - y(x,0)] + s^2\bar{y}(x,s)$$

$$= -y(x,0) - sy(x,0) + s^2\bar{y}(x,s)$$

$$= s^2\bar{y} - sy(x,0) - y(x,0)$$

- **تحويل المشتقة $y_x(x,t)$ هو:**

$$L[y_x(x,t)] = \bar{y}_x(x,s)$$

Sol:

$$L[y_x(x,t)] = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}y(x,t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty y(x,t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\bar{y}(x,s)$$

$$= \bar{y}(x,s)$$

- **تحويل المشتقة $y_{xx}(x,t)$ هو:**

$$L[y_{xx}(x,t)] = \bar{y}_{xx}(x,s)$$

Sol:

$$L[y_{xx}(x,t)] = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty y(x,t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{y}(x,s)$$

$$= \bar{y}_{xx}(x,s)$$

الفصل الثاني
بعض مفاهيم الأساسية في حل المعادلات الجزئية

الفصل الثاني

بعض المفاهيم الأساسية في حل المعادلات الجزئية

(2-1) المعادلة:

هي أداة رياضية للتعبير عن تساوي مقدارين يحتوي أحدهما أو كليهما على رموز تسمى المجاهيل كما في المثال:

$$14x + 15 = 71$$

أو المعادلة الرياضية في الرياضيات هي عبارة مؤلفة من رموز رياضية تنص على مساواة تعبيرين رياضيين ويعبّر عن هذه المساواة عن طريق علامة تساوي (=).[7]

(2-2) المعادلة التفاضلية:

هي معادلة تتضمن دالة مجهولة وتفاضلاتها وتنقسم المعادلات التفاضلية إلى نوعين هما:[8]

1) المعادلات التفاضلية الاعتيادية

2) المعادلات التفاضلية الجزئية

(2-3) المعادلة التفاضلية الاعتيادية:

هي علاقة تساوي بين دالة مجهول تعتمد على متغير واحد وبين واحد أو أكثر من المشتقات (أو تفاضلات) الدالة المجهولة فمثلاً إذا كانت الدالة مجهولة هي $y = f(x)$ والتي تعتمد على المتغير المستقل x فان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية هي:[8]

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots\dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

(4-2) المعادلة التفاضلية الجزئية:

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقات جزئية وتختلف عن المعادلات التفاضلية الاعتيادية حيث تعتمد الدالة المجهولة على متغير واحد فان الدالة في المعادلات التفاضلية الجزئية تعتمد على عدد من المتغيرات مثل درجة الحرارة $u(x,t)$ حيث تعتمد على الموضع x والزمن t.[1]

أمثلة لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية المعرفة جيداً:

1) معادلة التوصيل الحراري في البعد الواحد:

$$u_t = u_{xx}$$

2) معادلة التوصيل الحراري في البعدين:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

(5-2) رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية:

رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية: هي رتبة أعلى مشتقة تظهر في المعادلة.[3]

1) عيّن رتبة المعادلات الآتية:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\left[\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\right]^2$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثالثة

درجة المعادلة التفاضلية الجزئية: هي درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعادلات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.[3]

2) عيّن درجة المعادلات الآتية:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\left[\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\right]^2$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الأولى

(6-2) المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية:[10]

قد تكون المعادلة التفاضلية الجزئية خطية أو غير خطية ففي المعادلات التفاضلية الخطية يكون المتغير التابع u مثلاً وكل مشتقاته الجزئية تظهر في الصورة الخطية (أي ان غير مضروبة في بعضها أو مرفوعة إلى أس معين خلاف الواحد الصحيح).

- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية
- $u_{xy} + uu_y = 0$ المعادلة التفاضلية الجزئية غير خطية

(7-2) أمثلة على المعادلة التفاضلية الجزئية:

فيما يلي أمثلة على معادلة تفاضلية جزئية التطبيقات فيزيائية وهندسية متنوعة:[5]

(1.2) معادلة الحرارة في بعد واحد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(2.2) معادلة الموجة في البعد الواحد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(3.2) معادلة لابلاس في البعدين:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(4.2) معادلة بواسون في البعدين:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

(8-2) الحل العام:

إن مجموعة الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n يحتوي على n من الثوابت الاختيارية بشرط أن يحقق تلك المعادلة التفاضلية في منطقة تواجدها وتكون خالية من المشتقات.[8]

(9-2) الحل الخاص:

في أي حل من مجموعة الحل العام ينتج من تعويض قيم الثوابت الاختيارية التي تظهر في الحل العام للمعادلة التفاضلية.[2]

(10-2) الشروط الحدودية:

إن كل المسائل الفيزيائية تشتمل على حدود من نوع ما وعليه يجب أن نصف ما يحدث عن هذه الحدود بصورة رياضية لكي نضع وصفاً كاملاً للمسألة وفي تجربتنا هذه تكون الشروط الحدودية بسيطاً تماماً فيما ان درجة الحرارة u ثابتة لكل $(t > 0)$ مساوية T_2 وT_1 عند نهايتي الذراع $x = L\,, x = 0$ فيمكن التعبير عن ذلك بما يأتي:[1]

$$BC = \begin{bmatrix} u(0,t) = T_1 \\ u(1,t) = T_2 \end{bmatrix} \qquad 0 < t < \infty$$

(11-2) الشروط الابتدائية:

إن كل المسائل الفيزيائية تبدأ بزمن معين (يسمى عادة $t = 0$) وعليه يجب أن نخصص الجهاز الفيزيائي عند هذا الزمن، وفي تجربتنا هذه اننا نبدأ بدراسة حرارة الذراع بعد اللحظة التي تكون فيها درجة الحرارة ثابتة وتساوي $T_\circ$ فيكون الشرط الابتدائي:[1]

$$u(x,0) = T_\circ \qquad 0 \le x \le L$$

(12-2) الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات معاملات ثابتة:

المعادلة التفاضلية $(\mathrm{l_n}\, y = 0)$ لها n من الحلول المستقلة خطياً على I ولإيجاد هذه الحلول نفرض أن $y = e^{rx}$ حلاً لها حيث أن r هو $\mathrm{l_n}(e^{rx}) = 0$ أي أن:[6]

$$(a_\circ r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) = e^{rx} = 0$$

وبما أن $e^{rx} \neq 0$ لجميع قيم x فان:

$$(1.13.1) \quad a_\circ r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

المميز للمعادلة التفاضلية المتجانسة $\mathrm{l_n}\, y = 0$ واضح ان أعلاه متعدد حدود من الدرجة n ولها n من الجذور والتي تكون أما مختلفة القيم أو مكررة القيم .

الحالة الأولى: إذا كانت جذور المعادلة المميز مختلفة فان الحل العام هو:

$$(1.13.2) \qquad Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i x}$$

الحالة الثانية: إذا كانت جميع جذور المعادلة المميز متكررة $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$ فان الحل العام هو:

$$(1.13.3) \qquad Y(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} C_{i+1}\, x^i \right) e^{rx}$$

الحالة الثالثة: إذا كانت المعادلة المميز لها k من الجذور متساوية $r_1 = r_2 = \cdots = r_k$ أما باقي الجذور مختلفة فان الحل العام لها هو:

$$Y(x) = (C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})e^{r_ix} + C_{k+1}e^{r_{k+1}x} + \cdots C_ne^{r_nx}$$

أي أن:

$$(1.13.4)\ Y(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} C_{i+1}x^i\right)e^{r_ix} + \sum_{i=k+1}^{n} C_i\, e^{r_ix}$$

الحالة الرابعة: إذا كانت المعادلة المميزة لها من جذور معقدة $r = a + bi$ فان الحل العام لها هو:

$$(1.13.5)\ \ Y(x) = Ce^{ax}(Cos\ bx + Sin\ bx)$$

الحالة الخامسة: إذا كان بين جذور المعادلة جذراً عقدياً $r_1 = a + bi$ وغير مكرر وباقي الجذور حقيقية مختلفة $r_2, r_3, \ldots\ldots . r_n$ فان الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$(1.13.6)\ \ Y(x) = C_ie^{x}(Cos\ bx + Sin\ bx) + \sum_{j=2}^{n} C_je^{r_jx}$$

الفصل الثالث

ايجاد حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس

الفصل الثالث

إيجاد حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس

في هذا الفصل سيتم حل المعادلات التفاضلية الجزيئة بمتغيرين خطية بعضها متجانس والبعض الآخر غير متجانس تحت شروط ابتدائية وحدودية معينة باستخدام تحويل لابلاس.

(3 – 1) خطوات الطريقة:

تتلخص الطريقة بإيجاد حل لمسائل القيم الحدودية والابتدائية باستخدام تحويل لابلاس بالنقاط الآتية:

1) نجد تحويل لابلاس لجميع حدود المعادلة التفاضلية الجزيئة باستخدام الطرق المذكورة في الفصل الأول.

2) تتحول المعادلة من معادلة تفاضلية جزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية والاشتقاق بالنسبة للمتغير الثاني فقط.

3) نحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية بإحدى طرق التحليل التقليدية.

4) نجد تحويل لابلاس للشروط الحدودية أو الابتدائية.

5) نجد قيم الثوابت لنحصل على المعادلة التفاضلية الاعتيادية.

6) نجد تحويل لابلاس العكسي لدالة الحل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية.

7) ناتج التحويل العكسي يمثل الحل للمسائل الأصلية.

مسألة 3 – 1: استخدام تحويل لابلاس لمسائل القيم الابتدائية:[14]

$$y_x = 2y_t + y$$

$$y(x,0) = 6e^{-3x} \quad , x > 0 \, , t > 0$$

الحل:

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة التفاضلية الجزئية

$$L(y_x) = 2L(y_t) + L(y)$$

لنحصل:

$$\acute{y}_x(x,s) = 2[-y(x,0) + S\acute{y}(x,s) + \acute{y}(x,s)]$$

إذ ان من الممكن أن نعبّر عن المعادلة أعلاه بمعادلة تفاضلية اعتيادية لأن الاشتقاق فقط بالنسبة لمتغير واحد الذي هو x إذن من الممكن أن تعبّر عنها كما يلي:

$$\frac{d\acute{y}}{dx} = (2S+1)\acute{y}(x,s) - 2y(x,0)$$

نعوض الشرط الابتدائي:

$$\frac{d\acute{y}}{dx} = (2S+1)\acute{y}(x,s) - 12e^{-3x}$$

إذن نحصل:

$$\frac{d\acute{y}}{dx} - (2S+1)\acute{y} = -12e^{-3x}$$

نحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية بطريقة عامل التكامل وكما يلي:

If $e^{\int -(2S+1)dx} = e^{-(2S+1)x}$

$$e^{-(2S+1)x}\frac{d\acute{y}}{dx} - e^{-(2S+1)x}(2S+1)\acute{y} = e^{-(2S+1)x}(-12e^{-3x})$$

$$\acute{y}e^{-(2S+1)x} = -12\int e^{-(2S+4)x}\,dx$$

نضرب جميع الحدود × $e^{(2S+1)x}$ لنحصل على حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية

$$\acute{y}(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + Ce^{(2S+1)x}$$

حسب شروط الدالة $y(x,t)$ يجب أن تكون $(x > 0, t > 0)$ فان C يجب أن تكون مساوية للصفر إذن الحل هو:

$$\acute{y}(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

باستخدام تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}[\acute{y}(x,s)] = L^{-1}\left[\frac{6}{s+2}e^{-3x}\right]$$

$$y(x,t) = 6e^{-3x}L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

بما ان تحويل لابلاس العكسي هو $L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{ax}$ إذن نحصل:

$$y(x,t) = 6e^{-3x}(e^{-2x})$$

إذن الحل للمسألة القيم الابتدائية هو:

$$y(x,t) = 6e^{-(2t+3x)}$$

مسألة 3 – 2: استخدام تحويل لابلاس لحل المسألة القيم الحدودية:[12]

$$y_t = 2y_x \qquad 0 < x < 5 \ , \ t < 0$$

$$y(0,t) = y(5,t) = 0$$

$$y(x,0) = 10Sin4\pi x$$

الحل:

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة التفاضلية الجزئية

$$L[y_{tt}] = 2L[y_{xx}]$$

$$-y(x,0) + S\acute{y}(x,s) = 2\acute{y_{xx}}(x,s)$$

إذن من الممكن أن نعبّر عن المعادلة أعلاه بمعادلة تفاضلية اعتيادية لأن الاشتقاق فقط بالنسبة لمتغير واحد الذي هو x كما يلي:

$$S\acute{y} - y(x,0) = 2\frac{d^2y}{dx^2}$$

نعوض الشرط الابتدائي

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - S\acute{y} = -10Sin(4\pi x)$$

الآن نحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية بطريقة المعادلة المميزة في بداية نحولها إلى صيغة المؤثر D

$$(2D^2 - S)\acute{y} = -10Sin(4\pi x)$$

المعادلة المميز هي: $2m^2 - s = 0$ إذن الجذور هي:

$$2m^2 - s = 0 \Rightarrow 2m^2 = s \Rightarrow m^2 = \frac{s}{2} \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{s}{2}}$$

إذن الحل العام بالمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو:

$$\acute{y_C} = C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x}$$

الآن نجد الحل المتمم وكما يلي:

$$\acute{y_p} = \frac{1}{2D^2 - S}\left(-10Sin(4\pi x)\right)$$

$$\acute{y_p} = \frac{10Sin(4\pi x)}{-2(16\pi^2) + s}Sin(4\pi x)$$

$$\acute{y_p} = \frac{10}{32\pi + s}Sin(4\pi x)$$

لحل المسألة يعبّر عن الصيغة الآتية

$$\acute{y}(x,s) = \acute{y}_c + \acute{y}_p$$

نعوض لنحصل

$$\acute{y}(x,s) = C_1 e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x} + \frac{10}{32\pi+s} Sin(4\pi x)$$

نجد تحويل لابلاس لشروط المعادلة الحدودية فنحصل على:

$$L[y(0,t)] = \acute{y}(0,s) = 0$$

$$L[y(5,t)] = \acute{y}(5,s) = 0$$

نبدأ الشروط الحدودية الأول

$$\acute{y}(0,s) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{10}{32\pi^2+s} Sin(0) = 0$$

إذن نحصل تحويل لابلاس للشرط الحدودي الأول هو

$$\acute{y}(0,s) = C_1 + C_2 = 0$$

أما الشرط الثاني

$$\acute{y}(5,s) = C_1 e^{5\sqrt{\frac{s}{2}}} + C_2 e^{-5\sqrt{\frac{s}{2}}} + \frac{10}{32\pi^2+s} Sin\big(4\pi(5)\big) = 0$$

إذن نحصل تحويل لابلاس للشرط الحدودي الثاني الذي هو

$$\acute{y}(5,s) = C_1 e^{5\sqrt{\frac{s}{2}}} + C_2 e^{-5\sqrt{\frac{s}{2}}} = 0$$

وبحل المعادلتين لتحويل لابلاس للشرط الحدودي الأول والثاني نحصل على

$$C_1 = C_2 = 0$$

نعوض قيمة C_1 وC_2 في الحل العام

$$\acute{y}(x,s) = 0 + 0 + \frac{10}{32\pi^2+s} Sin(4\pi x)$$

$$\acute{y}(x,s) = \frac{10}{32\pi^2+s} Sin(4\pi x)$$

باستخدام تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}[\acute{y}(x,s)] = L^{-1}\left[\frac{10}{32\pi^2+s} Sin(4\pi x)\right]$$

$$\acute{y}(x,s) = 10\, Sin(4\pi x) L^{-1}\left[\frac{1}{s-(32\pi^2)}\right]$$

وبما ان تحويل لابلاس العكسي $L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{ax}$ نعوض لنحصل على الحل للمسألة

$$y(x,t) = 10\, e^{-32\pi^2 t} Sin(4\pi x)$$

مسألة 3 – 3: استخدام تحويل لابلاس للمسألة الآتية: [13]

$$y_{tt} = 9y_{xx} \qquad 0 < x < 2 \quad , \quad t > 0$$

$$y(0,t) = y(2,t) = 0$$

$$y(x,0) = 20Sin2\pi x$$

الحل:

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة التفاضلية الجزئية

$$L[y_t] = L[9y_x]$$

$$L[y_t] = 9L[y_x]$$

$$s^2\acute{y}(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0) = 9\acute{y}_{xx}(x,s)$$

$$s^2\acute{y}(x,s) - sy(x,0) - y_t(x,0) = 9\frac{d^2y}{dx^2}$$

نعوض الشروط الابتدائية

$$9\frac{d^2y}{dx^2} - s^2\acute{y} = -s(20\,Sin2\pi x)$$

نحولها إلى صيغة المؤثر D

$$9D^2 - s^2y = -20sSin2\pi x$$

المعادلة مميزة هي:

$$9m^2 - s^2y = 0$$

$$9m^2 = s^2y \Rightarrow m^2 = \frac{s^2}{9} \Rightarrow m_{1,2} = \frac{s}{3}$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$\acute{y}_c = C_1e^{\frac{s}{3}x} + C_2e^{-\frac{s}{3}x}$$

الآن نجد الحل المتمم باستخدام الصيغة الآتية: $y_p = \frac{1}{F(D)}Sinbx$ إذن نحصل

$$y_p = \frac{1}{-9(2\pi)^2 - s^2}(-20sSin2\pi x)$$

$$y_p = \frac{-20s}{-36\pi^2 - s^2}(Sin2\pi x)$$

$$y_p = \frac{-20s}{-(36\pi^2 + s^2)}Sin2\pi x$$

$$y_p = \frac{20s}{36\pi^2 + s^2}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية الغير متجانسة يعبّر عنه بالصيغة الآتية:

$$\acute{y} = y_c + y_p$$

نعوض لنحصل:

$$\acute{y}(x,s) = C_1e^{\frac{s}{3}x} + C_2e^{-\frac{s}{3}x} + \frac{20s}{36\pi^2 + s^2}\,Sin2\pi x$$

نحول الشروط حسب تحويلات لابلاس

$$L[y(0,t)] = \acute{y}(0,s) = 0$$

$$L[y(2,t)] = \acute{y}(2,s) = 0$$

تحويل لابلاس للشرط الحدودي الأول هو:

$$\acute{y}(0,s) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 0 = 0$$

$$\acute{y}(0,s) = C_1 + C_2 = 0$$

أما تحويل لابلاس للشرط الحدودي الثاني هو:

$$\acute{y}(2,s) = C_1 e^{2\frac{s}{3}} + C_2 e^{-2\frac{s}{3}} + 0 = 0$$

$$\acute{y}(2,s) = C_1 e^{2\frac{s}{3}} + C_2 e^{-2\frac{s}{3}} = 0$$

من حل المعادلتين لتحويل لابلاس للشرطين الحدوديين نحصل على:

$$C_1 = C_2 = 0$$

نعوض قيمة C_2, C_1 في الحل العام

$$\acute{y}(x,s) = \frac{20s}{36\pi^2 + s^2}\, Sin2\pi x$$

باستخدام تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}[\acute{y}(x,s)] = L^{-1}\left[\frac{20s}{36\pi^2 + s^2}\, Sin2\pi x\right]$$

نبسط:

$$y(x,s) = 20Sin2\pi x L^{-1}\left[\frac{s}{36\pi^2 + s^2}\right]$$

حسب تحويل لابلاس العكسي $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = Cosat$ نعوض لنحصل على حل المسألة:

$$y(x,t) = 20\,Sin(2\pi x)Cos(6\pi t)$$

مسألة 3 – 4: استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلة:[14]

$$y_x + y_t = x \qquad x > 0\ , t > 0$$

$$y(0,t) = 0\ ,\ \ t > 0$$

$$y(x,0) = 0\ ,\ \ x > 0$$

الحل:

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة التفاضلية الجزئية

$$L[y_x] + L[y_t] = L[x]$$

لنحصل:

$$\acute{y}_x(x,s) + [-y(x,0) + s\acute{y}(x,s)] = \frac{x}{s}$$

إذن من الممكن أن نعبّر عن المعادلة أعلاه بمعادلة تفاضلية اعتيادية لأن اشتقاق فقط بالنسبة لمتغير واحد الذي هو x إذن من الممكن أن نعبّر عنها كما يلي:

$$\frac{d\acute{y}}{dx} + s\acute{y}(x,s) - y(x,0) = \frac{x}{s}$$

نعوض الشرط الابتدائي

$$\frac{d\acute{y}}{dx} + s\acute{y}(x,s) = \frac{x}{s}$$

تحولت إلى معادلة تفاضلية خطية لهذا نوجد عامل تكامل

$$If = e^{\int s dx} \Rightarrow If = e^{sx}$$

$$e^{sx}\frac{dy}{dx}(x,s) + e^{sx}\,s\acute{y}(x,s) = e^{sx}\frac{x}{s}$$

$$e^{sx}\frac{dy}{dx}(x,s)+e^{sx}\,s\acute{y}(x,s)dx=e^{sx}\frac{x}{s}dx$$

$$\int de^{sx}\,\acute{y}(x,s)=\int e^{sx}\frac{x}{s}dx$$

نستخدم طريقة التجزئة:

$$y=\frac{x}{s}\ ,\ \ dy=\frac{1}{s}dx\quad ,\ \ dv=e^{sx}\ \ ,v=e^{sx}$$

نعوض لنجد:

$$e^{sx}\acute{y}(x,s)=\frac{x}{s^2}e^{sx}-\frac{1}{s^2}\int e^{sx}dx$$

$$e^{sx}\acute{y}(x,s)=\frac{x}{s^2}e^{sx}-\frac{1}{s^2}e^{sx}+C$$

نضرب جميع الحدود × e^{-sx} لنحصل:

$$\acute{y}(x,s)=\frac{x}{s^2}-\frac{1}{s^3}+Ce^{-sx}$$

$$0=y(0,s)=\frac{0}{s^3}+ce^{-s0}=0$$

نحصل:

$$C=\frac{1}{s^3}$$

نعوض في الحل العام:

$$\acute{y}(x,s)=\frac{x}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{e^{-sx}}{s^3}$$

الآن نجد تحويل لابلاس العكسي:

$$L^{-1}[\acute{y}(x,s)]=L^{-1}\left[\frac{x}{s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{e^{-sx}}{s^3}\right]$$

نحصل على حل المسألة:

$$y(x,t) = xt - \frac{t^2}{2}$$

مسألة 3 – 5: حل مسألة القيمة الأولية بواسطة تحويل لابلاس

$U_t = U_{xx}$, $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$ حيث $U(0,t) = 0, U(x,0) = U_0$

الحل:

$$U_t = U_{xx}$$

$$L[U_t] = L[U_{xx}]$$

$$SU(x,s) - U(x,0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,s)$$

$$(D^2 - s)U(x,s) = -U(x,0)$$

$$(D^2 - s)U(x,s) = -U_0$$

$$m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{s}$$

الحل العام U_1

$$U_1(x,s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

حيث C_2 وC_1 ثابتان

بما أن x يذهب إلى ∞

$$C_1 = 0$$

$$\therefore U_1(x,s) = C_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

The particular solution is:

$$U_2 = \frac{-U_0}{D^2 - s} = \frac{U_0}{s}$$

$$\therefore U(x,s) = C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{U_0}{s} \dots\dots\dots (*)$$

Substituting the boundary condition in $U(x,s)$ to find C_2

$$L[U(0,t)] = U(0,s)$$

$$U(0,s) = C_2 e^0 + \frac{U_0}{s}$$

$$0 = C_2 + \frac{1}{s}U_0 \Rightarrow C_2 = \frac{-1}{s}U_0 \dots\dots\dots (**)$$

Substituting $(**)$ in (8) we get:

$$U(x,s) = \frac{-1}{s}U_0 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{U_0}{s}$$

Taking inverse Laplace transformation, we get:

$$L^{-1}[U(x,s)] = -U_0 L^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}\right] + U_0 L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

From table of Laplace transforms, we get:

$U(x,s) = -U_0 erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + U_0$ هذا هو الحل العام

مسألة 3 – 6: حل مسألة القيمة الأولية بواسطة تحويل لابلاس:

$U_t = U_{xx}$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$ حيث $U(x,0) = Sinx$

الحل:

$$U_t = U_{xx}$$

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة:

$$L[U_t] = L[U_{xx}]$$

$$SU(x,s) - U(x,0) = du$$

$$SU(x,s) - Sinx = du$$

$$(D^2 - s)U(x,s) = -U(x,0)$$

$$(D^2 - s)U(x,s) = -Sinx$$

We must find the general solution U_1

$$m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{s}$$

$$U_1(x,s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

When $x \to \infty \Rightarrow C_1 = 0$

When $x \to -\infty \Rightarrow C_2 = 0$

$$\therefore U_1(x,s) = 0$$

The particular solution U_2 is:

$$U_2 = \frac{-1}{D^2 - s} Sinx = \frac{-1}{-1-s} Sinx = \frac{1}{s+1} Sinx\,,\ D^2 = a^2 = -1$$

The general solution for the given equation is:

$$U(x,s) = U_1 + U_2$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s+1} Sinx$$

Taking inverse Laplace transformation, we get:

$$L^{-1}[U(x,s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1} Sinx\right]$$

$$U(x,s) = Sinx.e^{-t}$$

مسألة 3 – 7: حل مسألة القيمة الأولية بواسطة تحويل لابلاس

$U_t = U_{xx}$, $0 < x < \infty$, $0 \le t < \infty$ حيث $U(0,t) = 2$, $U(x,0) = 0$

الحل:

$U_t = U_{xx}$

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة:

$L[U_t] = L[U_{xx}]$

$SU(x,s) - U(x,0) = D^2U(x,s)$

$(D^2 - s)U(x,s) = 0$

$m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{s}$

$\therefore U(x,s) = C_1e^{\sqrt{s}x} + C_2e^{-\sqrt{s}x}$

Since $x \to \infty \Rightarrow C_1 = 0$

$\therefore U(x,s) = C_2e^{-\sqrt{s}x}$ ..... (*)

The boundary condition $U(0,t) = 2$ will be:

$U(0,s) = L[U(0,t)] = L[2] = \frac{2}{s}$

Substituting in (*), we get:

$U(0,s) = C_2e^0 \Rightarrow \frac{2}{s} = C_2$

$U(x,s) = \frac{2}{s}e^{-\sqrt{s}x}$

Taking inverse for both sides:

$$\boldsymbol{U(x,s) = 2erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}$$

مسألة (3 – 8): استخدم تحويل لابلاس لحل المعادلة:

$$\boldsymbol{U_x = 2U_t + U \quad , \; U(x,0) = 6e^{-3x} \; , \; x < 0 \; , \; t > 0}$$

الحل:

$$\boldsymbol{U_x = 2U_t + U}$$

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة:

$$\boldsymbol{L(Ux) = 2L(Ut) + L(U)}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{du} = 2[su - u(x,0)] + u}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{du} = 2su - 2(6e^{-3x}) + u}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{du} = (2s+1)u - 12e^{-3x} \Longrightarrow \frac{dx}{du} - (2s+1)u = -12e^{-3x}}$$

$$\boldsymbol{If = e^{\int -(2s+1)dx} = e^{-(2s+1)x}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{e^{-(2s+1)x}\frac{dx}{du} - e^{-(2s+1)}(2s+1)u - 12e} = e^{(2s+1)x}(-12e^{-3x})$$

$$\Longrightarrow ue^{-(2s+1)x} = -12\int e^{-(2s+1)x}dx + C$$

$$\Longrightarrow ue^{-(2s+1)} = -\frac{12}{(2s+1)} - (2s+4)\int e^{-(2s+4)x} + C$$

$$\Longrightarrow ue^{-(2s+1)} = \frac{6}{s+2} - e^{-(2s+4)x} + C] * e^{(2s+1)x}$$

$$u = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + Ce^{(2s+1)x}$$

حسب شروط الدالة $u(x,t)$ يجب ان تكون $(x>0\,,t>0)$ فأن c يجب ان يكون صفر

$$U(x,s)=\frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

$$U(x,t)=6e^{-2t}.e^{-3x}$$

$$U(x,t)=6e^{-(2t+3x)}$$

مسألة (3-9): حل المعادلة التفاضلية $\boldsymbol{u_{tt}=u_{xx}}$ **0<x<1** $\boldsymbol{t>0}$

$$u(x,0)=\sin(fx),\quad u_t(x,0)=-\sin(fx),\quad u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$$

الحل:

نأخذ لابلاس لجميع حدود المعادلة

$$U_{tt}=u_{xx}$$

$$\mathcal{L}[u_{tt}]=\mathcal{L}[u_{xx}]$$

$$\frac{d^2V(x,s)}{dx^2}=s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)$$

$$\frac{d^2V(x,s)}{dx^2}=s^2U(x,s)-s\sin(fx)+\sin(fx)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}-s^2U=(1-s)\sin(fx)$$

معادلة تفاضلية خطية عادية من الرتبة الثانية وحلها العام هو

$$V(x,s)=C_1(s)e^{sx}+C_2(s)e^{-sx}+\frac{(s-1)\sin(fx)}{s^2+f^2}$$

$$V(x,s)=\mathcal{L}[u(x,t)]$$

$$V(0,s)=\mathcal{L}[u(0,t)]=\mathcal{L}[0]=0$$

$$V(1,s) = \mathcal{L}[u(1,t)] = \mathcal{L}[0] = 0$$

$$V(0,s) = C_1(s) + C_2(s) = 0 \quad \text{(Equation ①)}$$

$$V(1,s) = C_1(s)e^{s} + C_2(s)e^{-s} = 0 \quad \text{(Equation ②)}$$

بحل معادلتين (1) و(2) أنياً :

$$C_1(s) = C_2(s) = 0$$

Thus, the solution simplifies to:

$$V(x,s) = \frac{(s-1)\sin(fx)}{s^2 + f^2}$$

To find $u(x,t)$, we take the inverse Laplace transform:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[V(x,s)] = \sin(fx)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+f^2}\right]$$

$$u(x,t) = \sin(fx)\left(\cos(ft) - \frac{1}{f}\sin(ft)\right)$$

المصادر

المصادر العربية

[1] فارلو، اوس، ترجمة: الدكتورة مها عواد الكبيسي، المعادلات التفاضلية الجزئية (2005)، منشورات جامعة عمر المختار البيضاء.

[2] السامرائي، خالد أحمد سعيد، يحيى عبد، 1979م، طرق حل المعادلات التفاضلية، المكتبة الوطنية ببغداد، العراق.

[3] العويضي، حسن مصطفى وعباس، عبد الوهاب وزراع، سناء علي، (2005)، المعادلات التفاضلية، الجزء الأول، مكتبة الرشيد، بيروت.

[4] العاني، عطا الله ثامر، 1990، مقدمة إلى المعادلات التفاضلية الجزئية، جامعة بغداد، العراق.

[5] ياورد، ديفيدل، (1989)، مسائل القيم الحدودية، ترجمة: د. نزار حمدون، الطبعة الثالثة، جامعة الموصل.

[6] عبد، نصر الدين، (2011)، التحليل العددي، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب.

[7] أبو صبحا، سليمان عثمان، (2012)، الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية، شركة دار الأكاديميون للنشر والتوزيع.

[8] خضيري، السيد محمد أبو ذهب ونوفل، طاهر عبد الحميد وعبد الله، عبد المعطي محمد، (2020)، مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية، دار ماستر للنشر.

[9] د. نوري فرحان المياحي، المعادلات التفاضلية الجزئية، جامعة القادسية، 2016.

[10] العويضي، حسن مصطفى وعباس، عبد الوهاب وزراع، سناء علي، (2005)، المعادلات التفاضلية، الجزء الثاني، مكتبة الرشيد، بيروت.

المصادر الأجنبية

[11] Asker, K. (2013): An Introduction to Laplace Transform. Int. J. SCi. Res, 2(1), 2319 – 7064.

[12] Doetsch, G. (2012): Introduction to the theory and Application of the Laplace Transformation, Springer Science & Business Media.

[13] Duffy, D. G. (2016): Advanced Engineering Mathematics with MATLAB. Chapman and Hall/ CRC.

[14] Schiff, H.L. (2013): The Laplace Transform: Theory and Applications, Springer and applications, Springer science & Business Media.

[15] Spiegel, M,R. (1965): Laplace Transforms (p.249), New York: McGraw – Hill.