جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم رياضيات

متعددات حدود ليجندر

بحث

مقدم الى مجلس كلية التربية / جامعة ميسان وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

تقدمت به الطالبة

زهرة حميد حويس

بإشراف

أ.م.د. اسماء جاسم حرفش

1446هـ　　　　2025م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ﴾

صدق الله العلي العظيم

(يونس: آية ٥)

الإهداء

﴿وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ﴾

الحمد لله على طيب الاستهلال ومسك الختام

أهدي هذا النجاح:

إلى من أغدق على بحنانه وكرم عطائه، مَن سعى جاهدًا في دعمي وأول من رسّخ مبادئ الإسلام في نفسي، لِمَن يُضيء دربي بحكمته ويُراعي شعوري بفطنته

إلى سندي وحبيب قلبي **(والدي العزيز)**

إلى من تعانقني كل صباح دعواتها لي بالتوفيق والنجاح، من اكتظت يداها بالحنان وبعثت في قلبي الأمان، من تلهمني الصبر وتمدني بالشغف والعزم

إلى جنتي ووجهتي الأولى **(والدتي العزيزة)**

إلى من شد الله بهم عضدي فكانوا خير معين

(اخواني واخواتي)

إلى من جاد عليّ بوقته وأكرمني بفضله إقراراً مني بفضله واعترافاً بحقه حيث كان خير عون لي وسند **(زوجي)**

إلى مشرفة هذا البحث التي لم تتوانى في تعليمنا ولم تأبى تشجيعنا،

وواصلت تقويمنا بطريقتها المثلى حتى بلغنا القمة بمهارات لا تحصى

إلى **(أ.م.د. أسماء جاسم حرفش)**

الشكر والتقدير

اشكر الله العلي القدير الذي انعم عليّ بنعمة العقل والدين واثني ثناء حسناً
على والداي العزيزان
وأيضا وفاءاً وتقديراً بالجميل نتقدم بجزيل الشكر والتقدير لكل
من ساعدنا في مجال البحث
ولا ننسى ان نقدم الشكر والامتنان الى أساتذة قسم الرياضيات في
كلية التربية جامعة ميسان
وكما نقدم الشكر للأستاذة المشرفة **اسماء جاسم حرفش** لما بذلته
من جهود في انجاز هذا البحث
ولكم جزيل الشكر والتقدير

الملخص

قدمنا في هذا البحث دراسة مفصلة عن متعددة حدود ليجندر التي تستخدم في حل المعادلات التفاضلية وتمثيل الدوال الرياضية.

حيث يحتوي البحث على ثلاثة فصول هي:

الفصل الأول: تناولنا في هذا الفصل تعريف متعددة ليجندر وصيغة رودريج والدوال المولدة لمتعددة حدود ليجندر.

الفصل الثاني: تطرقنا في هذا الفصل لخواص متعددة حدود ليجندر والتعامد والصيغ التكرارية لمتعددة حدود ليجندر ومتعددة حدود ليجندر المرافقة.

الفصل الثالث: اما هذا الفصل فتضمن اهم التطبيقات الفيزيائية والهندسية لمتعددة حدود ليجندر ومنها طريقة كاوس ليجندر المستخدمة لحساب التكامل .

المحتويات

الفصل الأول

متعددات حدود ليجندر

1.1 المقدمة

تُعد متعددة حدود ليجندر (Legendre Polynomials) من الأدوات الرياضية المهمة التي ظهرت ضمن سياق دراسة المعادلات التفاضلية وحلولها، وخصوصاً في المجالات التي تتميز بالتناظر الكروي في الفيزياء والرياضيات التطبيقية. ظهرت هذه الدوال في القرن الثامن عشر على يد الرياضي الفرنسي "أدريان– ماري ليجندر"، وذلك أثناء دراسته لمشكلة جذب الأجسام الكروية، لتصبح لاحقاً جزءاً أساسياً في تطوير التحليل الرياضي ونظرية الدوال الخاصة.

تتميّز متعددة حدود ليجندر بكونها دوالاً كثيرة حدود متعامدة، وتُستخدم بشكل واسع في تحليل الدوال، وتقنيات التقريب العددي، وكذلك في الحلول التحليلية لمعادلات فيزيائية معقدة مثل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية. وبفضل خواصها الفريدة، أصبحت متعددة حدود ليجندر من أبرز الأمثلة على الدوال الخاصة التي تربط بين الرياضيات النظرية وتطبيقاتها العملية.

تهدف هذه الدراسة إلى تسليط الضوء على الخصائص الأساسية لمتعددة حدود ليجندر، من حيث تعريفها، ومعادلتها التفاضلية، وطرق توليدها، إلى جانب استعراض بعض تطبيقاتها الهامة في مجالات العلوم والهندسة.

1.2 معادلة ليجندر

المعادلة التفاضلية تعطى بالصيغة الاتية:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (1)$$

تدعى معادلة ليجندر التفاضلية (Legendre Differential Equation) **[1]**، حل هذه المعادلة عندما يكون n صفراً او عدداً صحيحاً موجباً

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \qquad (2)$$

حيث $a_\circ \neq 0$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد ان r تحقق المعادلة المميزة

$$r(r-1)=0$$

ومنها نجد ان $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ والمعاملات a_k تحقق العلاقات

$$r(r-1)a_1 = 0$$

$$(k+r-2)(k+r-3)a_{k-2} = 0 \qquad \left(k \geq 3 \text{ فردي}\right)$$

$$(k+r)(k+r-1)a_k = [2(k+r-2)-n(n+1)]a_{k-2} \qquad \left(k \geq 2 \text{ زوجي}\right)$$

وبجمع العلاقتين الأخيرتين نحصل على العلاقة التكرارية التي هي معبرة لجميع قيم $k \geq 2$ الأتية

$$(k+r)(k+r-1)a_k = (k+r-n-2)(k+r+n-1)a_{k-2} k \geq 2$$

إذا اخذنا $r = 0$ فأن كل من a_1, a_0 تبقى ثابتاً اختيارياً ومن العلاقة الأخيرة نحصل على

$$a_k = \frac{(k-n-2)(k+n-1)}{k(k-1)} a_{k-2} \quad , \qquad k \geq 2$$

وبذلك فأن المعاملات $a_2, a_{4....}$ يمكن ايجادها بدلالة a_0 والمعاملات $a_3, a_{5....}$ بدلالة a_1

والحل العام لمعادلة ليجندر (1) يمكن كتابته بالشكل..

$$y = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

$$+a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+3)(n+4)}{5!}x^5 \ldots\right] \qquad (3)$$

في الحل (3) نلاحظ أن المتسلسلة الأولى تتحول إلى متعددة حدود عندما n هو عدداً زوجياً والمتسلسلة الثانية تتحول إلى متعددة حدود عندما n هو عدداً فردياً. في أي من هاتين الحالتين متعددة الحدود تدعى متعددة حدود ليجندر (Legendre Polynomial) من الرتبة n ويرمز لها $p_n(x)$.

وللحصول على الصيغة العامة لمتعددات حدود ليجندر فأنه من المألوف أن نضرب متعددة في المعادلة (3) عندما n هو عدد صحيح بأحد العاملين الملائمين التاليين

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots(n)} \quad , \quad (\text{زوجي } n)$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5\ldots n}{2.4.6\ldots(n-1)} \quad , \quad (\text{فردي } n)$$

من هذه نحصل على الصيغة العامة لمتعددات حدود ليجندر [1] والتي تكون بهيئة متسلسلة

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,(2n-2k)!}{2^n\,k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\,x^{n-2k} \qquad (4)$$

حيث $N = \frac{n}{2}$ عندما n هو عدد زوجي وأن $N = \frac{n-1}{2}$ عندما الn عدد فردي من المعادلة (4)

يمكن ان نلاحظ سهولة أن

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

1.3 صيغة رودريج

صيغة رودريج هي واحدة من المتطابقات التي تتضمن متعددات حدود ليجندر والتي نحصل عليها كما يلي:

إذا فرضنا ان $u=(x^2-1)^n$

فأن $\frac{du}{dx}=2nx(x^2-1)^{n-1}$

هذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل

$$(x^2-1)\frac{du}{dx}=2nx(x^2-1)^n$$

أو

$$(1-x^2)\frac{du}{dx}+2nxu=0$$

إذا اشتقينا هذه المعادلة عدة مرات بالنسبة الى x نحصل على

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+2(n-1)x\frac{du}{dx}+(2n)u=0$$

و

$$(1-x^2)\frac{d^3u}{dx^3}+2(n-1)x\frac{d^2u}{dx^2}+2(2n-1)\frac{du}{dx}=0$$

وبعد $(r+1)$ من المشتقات نجد ان

$$(1-x^2)\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\left(\frac{du}{dx}\right)+2(n-r-1)x\frac{d^r}{dx^r}\left(\frac{du}{dx}\right)+(r+1)(2n-r)\frac{d^ru}{dx^r}=0$$

الان اذ وضعنا $r=n$, $\frac{d^ru}{dx^r}=y$ فأن المعادلة الأخيرة تصبح

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

وهذه هي معادلة ليجندر التفاضلية

لذلك فأن $y = \frac{d^n u}{dx^n}$ يحقق معادلة ليجندر وان

$$y = \frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n$$

فأن هذه المعادلة متعددة حدود من الرتبة n

وأن المعادلة (3) تشير الى انه لا يوجد حل واحد فقط لمعادلة ليجندر بالصيغة $p_n(x)$ تساوي y مضروباً في مقدار ثابت أي أن

$$p_n(x) = c\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1) \qquad (5)$$

ولإيجاد الثابت c نساوي معاملات x^n في المعادلتين (4) ، (5) ومنها نجد $c = \frac{1}{2^n n!}$

وبتعويض في (5) نحصل على الصيغة

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n \qquad (6)$$

والتي تسمى صيغة رودريج لمتعددات حدود ليجندر **[1]**

1.4 الدالة المولدة لمتعددات حدود ليجندر

متعددة الحدود $p_n(x)$ يمكن تعريفها بشكل معامل t^n في مفكوك الدالة (6)

$$g(x,t) = (1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}}$$

في قوى t الصاعدة هذه يمكن التحقق منها بإيجاد مفكوك معادلة (6) بواسطة مبرهنة ذي الحدين

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Ant^n \tag{7}$$

فأنه واضح من طبيعته مفكوك ذي الحدين أن A_n تكون متعددة حدود في x من الرتبة n كذلك إذا وضعنا $x = 1$ في معادلة (6) نحصل على

$$g(1,t) = (1-2t+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

وينتج أن $A_n = 1$ عندما $x = 1$ الان إذا كان بالإمكان أثبات أن A_n تحقق معادلة ليجندر، فأنها تساوي $p_n(x)$ بالتطابق عندما تكون المعاملات A_n هي متعددات الحدود الوحيدة من الرتب n التي تحقق المعادلة ولها القيمة 1 عندما $x = 1$ اشتقاق طرفي المعادلة (6) يعطينا

$$(1-2xt+t^2)\frac{dg}{dt} = (x-t)g \tag{8}$$

$$t\frac{dg}{dt} = (x-t)\frac{dg}{dx} \tag{9}$$

إذا عوضنا الان (7) في (8) ومساواة معاملات t^{n-1} من طرفي المعادلة الناتجة نحصل على

$$nA_n - (2n-1)xA_{n-1} + (n-1)A_{n-2} \tag{10}$$

وبتعويض (7) في (9) ومساواة المعاملات t^{n-1} من طرفي المعادلة الناتجة نحصل على

$$x\frac{dA_{n-1}}{dx} - \frac{dA_{n-2}}{dx} = (n-1)A_{n-1} \tag{11}$$

إذا وضعنا $(n+1)$ بدلاً من n في (11) نجد ان

$$x\frac{dA_n}{dx}-\frac{dA_{n-1}}{dx}=nA_n \qquad (12)$$

الان باشتقاق (10) بالنسبة الى x والتعويض عن $\frac{dA_{n-2}}{dx}$ من (11)

$$\frac{dA_n}{dx}-x\frac{dA_{n-1}}{dx}=nA_{n-1} \qquad (13)$$

بضرب المعادلة (12) في $-x$ وأضافتها (13) يكون لدينا

$$(1+x^2)\frac{dA_n}{dx}=n(A_{n-1}-xA_n) \qquad (14)$$

اخيراً اشتقاق (14) بالنسبة الى x وتبسط النتيجة باستعمال معادلة (12) ينتج المعادلة

$$(1+x^2)\frac{d^2A_n}{dx^2}-2x\frac{dA_n}{dx}+n(n+1)A_n=0$$

هذه توضيح ان A_n هي حل لمعادلة ليجندر وعليه تكون مساوية إلى $p_n(x)$ بالتطابق.

وتعطي علاقات مهمة تربط بين متعددات حدود ليجندر ذات الرتب المختلفة وتسمى بالعلاقات التكرارية بناء على ما تقدم يكون لدينا من (6) و (7) العلاقة المهمة

$$g(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)t^n \qquad (15)$$

وهذه تصح عندما $|x|<1$, $|t|\le 1$ وذلك بسبب منطقة التقارب لمفكوك ذي الحدين (7) أن الدالة g المعرفة في (6) تدعى الدالة المولدة لمتعددات حدود ليجندر $p_n(x)$ **[2]**.

الدالة المولدة تزودنا بمعلومات أخرى حول متعددات حدود ليجندر مثلاً إذا وضعنا $x=1$ في المعادلة (15) يكون لدينا

$$(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(1)t^n$$

بما أن

$$(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

فأن

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n=\sum_{n=0}^{\infty} p_n\,(1)t^n$$

وبمقارنة المتسلسلتين من الطرفين نجد أن

$$p_n(1)=1 \tag{16}$$

وكذلك إذا وضعنا $x=-1$ في (15) فنحصل على

$$p_n(-1)=(-1)^n \tag{17}$$

وإذا وضعنا $x=0$ واستعملنا المفكوك

$$(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}t^4+\cdots+(-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n n!}t^{2n}$$

نحصل على

$$p_n(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{n!}{2^n\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} & if\ n \text{ عدد زوجي}\\ 0 & if\ n \text{ عدد فردي}\end{cases} \tag{18}$$

وإذا أبدلنا x الى $-x$ و t الى $-t$ في المعادلة (15) فأن الدالة المولدة في الطرف الايسر لا تتغير لذلك نجد

$$g(x,t)=g(-x,-t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n\,(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-x)(-t)^n$$

وبمقارنة هاتين المتسلسلتين يكون لدينا

$$p_n(-x)=(-1)^n p_n(x) \tag{19}$$

أي ان دوال متعددات الحدود تكون زوجية أو فردية تبعاً للدليل n أكان زوجياً او فردياً

كما ان الدالة المولدة تمكننا من وضع حد أعلى على $|p_n(\cos\theta)|$ إذا وضعنا

$$x = \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i0}}{2}$$

في (15) يكون لدينا

$$\left[1-t\left(e^{i\theta}e^{-i\theta}\right)+t^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\cos\theta)\, t^n \qquad (20)$$

الطرف الايسر في هذه المعادلة يمكن كتابته بالشكل

$$\left(1-te^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-te^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2}te^{i\theta}+\frac{3}{8}t^2e^{2i\theta}+\cdots+ b_nt^ne^{in\theta}\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}te^{i\theta}+\frac{3}{8}t^2e^{2i\theta}+\cdots+b_nt^ne^{-in\theta}+\cdots\right)$$

حيث

$$b_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}$$

وبتعويض هذه المعادلة (20) واستخراج معامل t^n يكون لدينا

$$p_n(\cos\theta) = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}2\cos\theta + \frac{1.1.3\ldots(2n-3)}{2.2.4\ldots(2n-2\,)}\cdot 2\cos(n-2)\theta+\cdots$$

واضح ان هذه المتسلسلة تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = 0$ وجميع دوال الجيب تمام تساوي الواحد، لكن بما ان

$$p_n(\cos\theta) = p_n(1) = 1$$

ينتج ان

$$|p_n(\cos\theta)| \le 1, n = 0,1,2,\ldots$$

وبذلك نكون قد عرفنا الحد الأعلى والادنى للدوال $p_n(\cos\theta)$ ونجد ان أول عدد من هذه الدوال هي

$$p_0(\cos\theta) = 1$$

$$p_1 = (\cos\theta) = \cos\theta$$

$$p_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$$

$$p_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

الفصل الثانـي

خواص متعددات حدود ليجندر

2.1 التعامد لمتعددة حدود ليجندر

التعامد في متعددة حدود ليجندر هو خاصية رياضية مهمة جدًا، خصوصًا في التحليل الرياضي. وفيما يلي توضيح لاشتقاق خاصية التعامد لمتعددات الحدود $p_n(x)$.

بما ان $p_n(x)$ تحقق معادلة ليجندر التفاضلية (1) فأن هذه المعادلة يمكن كتابتها

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)p_n'(x)] + n(n+1)p_n(x) = 0 \qquad (21)$$

إذا ضربنا هذه المعادلة في $p_n(x)$ ونكاملها من -1 الى 1 نحصل على

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)p_n'(x)]dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = 0 \qquad (22)$$

الحد الأول أعلاه يمكن تكامله بطريقة التجزئة كالآتي:

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,p_n'(x)]dx$$

$$= \{p_m(x)[(1-x^2)p'_n(x)]\}_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)p_n'(x)p_m'(x)dx$$

الحد الأول في هذه المعادلة يضمحل عندما $x=\pm 1$ لهذا فأن المعادلة (22) تختزل الى الصيغة

$$-\int_{-1}^{1}(1-x^2)p'_n(x)p'_m(x)dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = 0 \qquad (23)$$

في المعادلة (23) إذا غيرنا n الى m و m الى n نحصل على

$$(24) -\int_{-1}^{1}(1-x^2)p'_m(x)p'_n(x)dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)dx = 0$$

وبطرح المعادلة (24) من (23) نحصل على

$$(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = 0$$

عند $n \neq m$ فأن

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)dx = 0 \tag{25}$$

وهذه الخاصية توضح أن $p_n(x)$ و $p_m(x)$ متعامدان **[2]** في الفترة $(-1,1)$

وعندما $n = m$ فأن المعادلة (25) لا تصلح، فلإيجاد التكامل في هذه الحالة نربع طرفي المعادلة في (15) نحصل على

$$(1-2xt+t^2)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n\right]^2$$

ونكامل الطرفين بالنسبة الى x على الفترة $(-1,1)$ مع الملاحظة أن حدود الضرب في الطرف الأيمن تضمحل بسبب خاصية التعامد (25) لذلك يكون

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}[p_n(x)]^2 dx \tag{26}$$

إذا وضعنا $y = 1-2xt+t^2$ فأن التكامل في الطرف الأيسر له القيمة

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \frac{1}{2t}\int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{1}{y}dy = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

أن مفكوك الدالة اللوغاريتمية في الطرف الأيمن من المعادلة أعلاه بشكل متسلسلة قوى هو

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$$

وبتعويض هذه في (26) ومساواة معامل t^{2n} من الطرفين نحصل على

$$\int_{-1}^{1} [p_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}\ ,\quad n \geq 0 \tag{27}$$

بالإضافة لخاصية التعامد فأنه بالإمكان إيجاد خواص اخر لمتعددة حدود ليجندر منها :

الخاصية الاولى [3] :

فاذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على المجال $[-1,1]$ ، فأن

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot f^{(n)}(x)dx \qquad (28)$$

لاثبات هذه الخاصية : بما ان متعددة حدود ليجندر بصيغة رودريج تعطى بالصيغة:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

فتكون

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)dx = \frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

نجري عملية التكامل بالتجزئة، فننجد ان:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)dx$$

$$= \frac{1}{2^n\cdot n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot dx$$

بالتبديل في حدود التكامل نجد ان الحد الأول يساوي الصفر، وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)\cdot dx = \frac{-1}{2^n\cdot n!}\cdot\int_{-1}^{1} f'(x)\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot dx$$

نجري عملية التكامل مرة أخرى بطريقة التجزئة فيكون:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)$$

$$= \frac{-1}{2^n\cdot n!}\left[f'(x)\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x)\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx$$

الحد الأول يساوي الصفر، واثناء تبديل بحدود التكامل يكون:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n\,(x)dx = \frac{(-1)^2}{2^n\cdot n!}\cdot\int_{-1}^{1} f''(x)\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\,dx$$

وهكذا بإجراء المكاملة n مرة متتالية بطريقة التجزئة، نجد ان:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n\,(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot f^{(n)}(x)dx$$

الخاصية الثانية [3]:

$$\int_{-1}^{1} x^n\cdot p_n(x)dx = \frac{2^{n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!} \qquad (29)$$

الاثبات:

إذا كان $f(x) = x^n$ نجد ان:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^n)dx$$

ولكن $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)\cdot dx = n!$

بالتبديل في العلاقة السابقة يكون:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot p_n(x)\cdot dx = \frac{(-1)^n\cdot n!}{2^n\cdot n!}\cdot\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{2^n}\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

لحساب هذا التكامل نفرض ان:

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\cdot dt$$

وعندما:

$$x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}\ \&\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

عندئذٍ

$$\int_{-1}^{1} x^2\cdot p_n(x)dx = \frac{1}{2^n}\int_{-1}^{1}\cos t^{2n+1}dt = \frac{2}{2^n}\left[\frac{(2^n)^2\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right] = \frac{2^{n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cdot p_n(x)dx = \frac{2^{n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

الخاصية الثالثة [3] :

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n-1} \qquad (30)$$

الاثبات:

نبدل في الخاصية الاولى كل $f(x) = p_n(x)$ ، نجد ان:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \cdot \frac{d^n p_n(x)}{dx^n} dx$$

ولكن

$$\frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]$$

وبملاحظة ان:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!$$

يكون:

$$\frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

بالتبديل عن هذه القيمة في نجد إن:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$$

ولكن:

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{2 \cdot (2^n)^2 \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

يكون بالاختصار:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x) = \frac{2}{2n+1}$$

2.2 الصيغ التكرارية لمتعددة حدود ليجندر

من أهم الخصائص التي تميز متعددات حدود ليجندر هو أنها تحقق علاقات تكرارية تسمح بتوليد حدودها بصورة فعالة دون الحاجة إلى الاشتقاق أو التكامل المباشر. وتُستخدم هذه الصيغ التكرارية في العديد من التطبيقات العددية والتحليلية، كحساب التكاملات التقريبية، وكذلك في تطوير طرق تقريب دوال عامة باستخدام متسلسلات متعددة الحدود ليجندر. وفي ما يلي استعرض لبعض الصيغ التكرار المرتبطة بمتعددات حدود ليجندر **[2]**

- $(٢n+1)\,x\,p_n(x) = (n+1)p_{n+1}(x) + np_{n-1}(x)$

هذه الصيغة التكرارية هي الصيغة الكلاسيكية ثلاثية الحدود.

- $np_n(x) = x\,p_n'(x) - p_{n-1}'(x)$
- $(2n+1)\,p_n(x) = p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x)$
- $(n+1)\,p_n(x) = p_{n+1}'(x) - x\,p_n'(x)$
- $(1-x^2)\,p_n'(x) = n[p_{n-1}(x) - x\,p_n(x)]$
- $(1-x^2)\,p_n'(x) = (n+1)[x\,p_n(x) - p_{n+1}(x)]$

2.3 متعددات حدود ليجندر المرافقة

عند اشتقاق معادلة ليجندر (1) لـ (m) من المرات بالنسبة الى x وفرض ان

$$u = \frac{d^m y}{dx^m}$$

نحصل على المعادلة

$$(31)(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x(m+1)\frac{du}{dx} + (n-m)(n+m+1)u = 0$$

وبما ان $p_n(x)$ هي حل لمعادلة ليجندر (1) فأن المعادلة (31) تتحقق بالدالة

$$u = \frac{d^m}{dx^m}p_n(x)$$

وعند وضع

$$(32)v = u(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$$

في المعادلة (31) نحصل

$$(33)(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2} - 2x\frac{dv}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0$$

ان هذه المعادلة تسمى معادلة ليجندر المرافقة **[2]**

وهي تختلف هن معادلة ليجندر بانها تحتوي على الحد الإضافي الذي يحتوي على m .

من المعادلة (32) نلاحظ أن

$$v = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}p_n(x)$$

أن v يمثل متعددة حدود ليجندر المرافقة ويرمز لها بالرمز $p_n^m(x)$ أي ان

$$p_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}p_n(x) \qquad (34)$$

حيث $0 \le m \le n$ يلاحظ هنا انه إذا كان $m > n$ فأن

$$p_n^m(x) = 0$$

كذلك من (34) عندما $m = 0$ نلاحظ ان

$$p_n^m(x) = p_n(x)$$

إذا جعلنا x تقترب من $-x$ في المعادلة (34) نحصل على

$$p_n^m(-x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} p_n(-x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} [(-1)^n p_n(x)]$$

هنا الاشتقاق m من المرات يعطي العامل $(-1)^m$ وبهذا نحصل على

$$p_n^m(-x) = (-1)^{n+m}(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} p_n(x)$$ أو $$p_n^m(-x) = (-1)^{n+m}$$

الفصل الثالث

التطبيقات الفيزيائية والهندسية لمتعددة حدود ليجندر

3.1 التطبيقات الهندسية والفيزيائية

تعدّ متعددات حدود ليجندر من الأدوات الرياضية الأساسية في مجالات الفيزياء والهندسة، لما تمتاز به من خصائص رياضي تساعد في تبسيط وتحليل العديد من النماذج والمعادلات. تنتمي هذه الدوال إلى عائلة الدوال الخاصة التي تظهر بشكل طبيعي عند حل المعادلات التفاضلية الجزئية، وخصوصًا معادلة لابلاس، في الأنظمة ذات التناظر الكروي أو الأسطواني.

تلعب متعددات حدود ليجندر دورًا محوريًا في وصف الظواهر الفيزيائية مثل المجالات الكهروستاتيكية، والمجالات الجاذبية، وانتشار الموجات الصوتية والضوئية، كما تُستخدم أيضًا في ميكانيكا الكم عند تحليل مستويات الطاقة وتوزيع الدوال الموجية في الذرات. من الجانب الهندسي، تدخل هذه الدوال في حلول مسائل ميكانيكا المواد، وتوزيع الإجهاد والانفعال، وكذلك في تصميم الأنظمة ذات الطبيعة الكروية أو نصف الكروية، كالمستشعرات والمجسات والأنظمة الصوتية.

تتميز هذه الدوال بسهولة دمجها في النمذجة الرياضية، بالإضافة إلى قدرتها على تشكيل حلول تقريبية دقيقة عبر التوسيع في سلاسل، ما يجعلها أداة فعّالة لتحليل الأنظمة المعقدة في الفيزياء والهندسة. بناءً على ذلك، فإن دراسة التطبيقات العملية لمتعددات حدود ليجندر تفتح آفاقًا واسعة لفهم أعمق للنماذج الطبيعية والهندسية وتطوير طرق تحليلية ونظرية دقيقة لها. وفيما يلي اهم التطبيقات الهندسية والفيزيائية:

1. ميكانيكية الكم

تظهر متعددات حدود ليجندر في حل معادلة شرودنغر للإلكترونات في الذرات خاصة عند استخدام الاحداثيات الكروية، يتم استخدام هذه الدوال لوصف دوال الموجة للإلكترونات حول النواة مما يجعلها أساسية في دراسة البنية الذرية والطيف الذري. فعلى سبيل المثال في ذرة الهيدروجين عندما يتم حل معادلة شرودنغر نحصل على حلول تعتمد على التوافقيات الكروية، والتي تعتمد بدورها على متعددات حدود ليجندر.

2. البصريات الميكانيكية الكلاسيكية

في البصريات الهندسية يتم استخدام متعددات حدود ليجندر لتحليل انحراف الموجات الضوئية، مثل التشوهات في العدسات والتلسكوبات، كما انها تستخدم في دراسة التداخل والحيود في البصريات الفيزيائية وفي الميكانيكية الكلاسيكية، تستخدم هذه الدوال لحل معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية مما يجعلها أساسية في تحليل الحقول الكهروستاتيكية والجاذبية.

3. الهندسة الكهربائية ومعالجة الإشارات

تلعب متعددات حدود ليجندر دوراً رئيسياً في

- معالجة الإشارات الرقمية
- تحليل الصور ثلاثية الابعاد
- تقنيات تحسين البيانات في الذكاء الاصطناعي

4. المجال الرياضي

في الرياضيات تلعب متعددات حدود ليجندر دوراً مهمة في العديد من المجالات بما في ذلك حلول المعادلات التفاضلية، التقريب العددي، والتوافقيات الكروية، ومعادلات القيم الحدية، فيما يلي بعض التطبيقات الرياضية الرئيسية لهذه الدوال:

حل المعادلات التفاضلية

تستخدم متعددات حدود ليجندر لحل المعادلات التفاضلية من النوع الخاص مثل معادلة ليجندر نفسها والتي تظهر في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية. فعلى سبيل المثال عند حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية، نحصل على حلول تعتمد على متعددات حدود ليجندر في الحالات التي يكون فيها التناظر الكروي موجوداً.

التوافقيات الكروية وتحليل البيانات

تستخدم متعددات حدود ليجندر في تحليل التوافقيات الكروية وهي دوال تظهر في دراسة انتشار الموجات في المجالات الكروية، هذه التوافقيات تستخدم في:

- الفيزياء الفلكية لدراسة اشعاع الخلفية الكونية
- تصميم الهوائيات الكروية

التحليل الطيفي الرياضي

تستخدم متعددات حدود ليجندر كأساس في طرق التحليل الطيفي لحل المعادلات التفاضلية عددياً، في هذه الطرق يتم اسقاط الحلول التقريبية على مجموعة من الدوال الأساسية المتعامدة مما يسمح بحل المعادلات بدقة أكبر مقارن بالطرق التقليدية مثل طريقة الفروق المحدودة.

امثلة على ذلك:

- طريقة غالركن الطيفية (Spectral Method Galrkin)
- طريقة التمثيل الطيفي (Representation Method Spectral)

التقريب العددي وتوسيع الدوال

تستخدم متعددات حدود ليجندر في التقريب، حيث يمكن تمثيل أي دالة قابلة للتكامل على الفترة كمجموع من متعددات حدود ليجندر كما هو الحال في سلاسل ليجندر.

وفي هذا البند القادم سوف نتطرق لطريقة كاوس– ليجدر لحساب التكامل، والتي تعتبر احدى تطبيقات متعددة حدود ليجندر.

3.2 طريقة كاوس- ليجندر لحساب التكامل

تستعمل متعددات حدود ليجندر لحساب التكامل الدالة $f(x)$ في الفترة $[-1,1]$ بطريقة كاوس ليجندر [4] التي تعطى بالصيغة الاتية:

$$\int_{-1}^{1} f(a)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

فمن العلاقات التكرارية الاتية:

$p_0(x) = 1$,

$p_1(x) = x$

$p_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}[(2n+1)xp_n(x) - kp_{n-1}(x)]$

بقيمة معلومة لـ n نجد متعددة الحدود $p_{n+1}(x)$ ، ومن ثم نجد جذر المعادلة

$p_{n+1}(x) = 0$

والتي نحصل منها على العقد x_i ، ثم نحسب المعاملات a_i

أما إذا كان المطلوب إيجاد الدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ ، فنفرض:

$$x = \frac{(b-a)t + (b+a)}{2}$$

$\int_b^a f(x)dx = \frac{b-2}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right)dt$

اي ان طريقة كاوس ليجندر تكون مناسبة لكل تكامل لدالة على الفترة ما .

مثال: لايجاد قيمة التكامل $\int_0^2 e^{x^2}dx$ باستعمال صيغة كاوس ليجندر عندما $n = 1$

الحل: بما ان $n = 1$ ، نجد متعددة الحدود لجندر بدرجة $n + 1 = 2$ من العلاقات التكرارية

$p_0(x) = 1$,

$p_1(x) = x$

نجد جذور هذه العلاقة $p_2(x) = \frac{1}{2}[3x^2 - 1]$

$p_2(x) = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{2}[3x^2 - 1] = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

اي العقد تمثل $x_o = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ثم نجد المعاملات a_1 , a_0 وذلك باعتبار الخطأ في مساوي للصفر عندما تكون f متعددات حدود بدرجة اقل او تساوي $2n + 1 = 3$ أي $x^3,\ x^2,\ x,\ 1$

$$\int_{-1}^{1} f(a)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

$$\int_{-1}^{1} dx = \sum_{i=0}^{1} a_i \times 1 \Rightarrow \qquad a_0 + a_1 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \sum_{i=0}^{1} a_i \times i \Rightarrow \qquad -\frac{a_0}{\sqrt{3}} + \frac{a_1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_0 \Rightarrow \qquad a_0 = 1\,,\quad a_1 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = a_0 f(x_o) + a_1 f(x_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

نفرض $x = \frac{(2-0)t+(2+0)}{2}$

$$x = t + 1 \Rightarrow dx = dt$$

$$\int_{0}^{2} e^{x^2} dx = \int_{-1}^{1} f(t+1)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{(t+1)^2} dt = exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 = 13.2332$$

مثال: لإيجاد $\int_1^2 \ln(1+x^2)dx$ مستخدماً صيغة كاوس ليجندر عندما $n=2$

الحل: بما ان $n=2$ ، نجد متعددة الحدود ليجندر بدرجة $n+1=3$ من العلاقات التكرارية

$p_o(x) = 1$,

$p_1(x) = x$

$p_2(x) = \frac{1}{2}\ [3x^2 - 1]$

$p_3(x) = \frac{1}{2}[5x^3 - 3x]$

$p_3(x) = 0 \rightarrow$

$x = 0 \quad or \quad 5x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}\ ,\ x_1 = 0\ ,\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

لإيجاد المعاملات a_0, a_1, a_2 اي عندما تكون f متعددات حدود بدرجة اقل او تساوي

$2n+1=5$ أي $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$

$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^2 a_i f(x_i)$

$\int_{-1}^1 dx = \sum_{i=0}^2 a_i f(xi)$

$\int_{-1}^1 dx = \sum_{i=0}^2 a_i \rightarrow \qquad a_0 + a_1 + a_2 = 2$

$\int_{-1}^1 x\ dx = \sum_{i=0}^2 a_i x_i \rightarrow \qquad a_0\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a_2 = 0$

$\int_{-1}^1 x^2 dx = \sum_{i=0}^2 aix_i{}^2 \rightarrow \qquad a_0\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 a_2 = \frac{2}{3}$

$\rightarrow a_0 = \frac{5}{9},\ a_1 = \frac{8}{9}\ \ a_2 = \frac{5}{9}$

الان نفرض

$x = \frac{(2-1)t+(2+1)}{2}$

$$\rightarrow x = \frac{t+3}{2} \rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

فيصبح التكامل

$$\int_1^2 \ln(1+x^2)dx = \int_{-1}^1 \ln\left(1+\left(\frac{t+3}{2}\right)^2\right)\frac{dt}{2}$$

$$f(t) = \ln\left(1+\left(\frac{t+3}{2}\right)^2\right)\frac{dt}{2}$$

$$\int_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{9}\ln\left(1+\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+3}{2}\right)^2\right)+\frac{8}{9}\ln\left(1+\frac{(0+3)^2}{4}\right)+\frac{5}{9}\ln\left(1+\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+3}{2}\right)^2\right)\right]$$

$$= 1.169226563$$

المصادر

[1] الموسوعة التعليمية في الرياضيات الهندسية، المعادلات التفصيلية العددية، أ.د. سعيد جميل احمد، كلية الهندسة/ جامعة الزقازيق، (2012).

[2] طرق في الرياضيات التطبيقية، د. باسل يعقوب يوسف لوقا، قسم الرياضيات/ كلية العلوم–جامعة البصرة، (1989).

[3] تقريب الدوال بكثيرات حدود ليجندر المتعامدة متعددة المتحولات، د. حامد عباس و لينا حمره، جامعة البعث / كلية العلوم–قسم الرياضيات، المجلد ٤٤ العدد ١ ، (2022).

[4] استخدام تربيعة جاوس في إيجاد الحلول العددية للتكاملات المفردة والمتعددة وتطبيقاتها، سليمة محمد خضر ، المجلة العلمية لقسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة مصراتة المجلد ١ العدد ١٢، (2019).