جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية – قسم الرياضيات

عنوان البحث

طريقة الظل القطع الزائدي لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

لمعادلتي KDV وبرغر

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية جامعة ميسان وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في قسم الرياضيات

اعداد

فاطمة نشعان ناجي

بأشراف

أ.م.د. علاء نجم عبدالله

1445هـ

2024م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿وَلَقَدْ آتَيْنَا دَاوُودَ وَسُلَيْمَانَ عِلْمًا وَقَالَا الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي فَضَّلَنَا

عَلَى كَثِيرٍ مِنْ عِبَادِهِ الْمُؤْمِنِينَ﴾

[النمل: 15]

الاهداء

الحمدلله الذي بنعمة تتم الصالحات

أهدي ثمرة تعبي ونجاح السنوات إلى مولاي الأمام الحجة (عجل الله فرجه)

وإلى نفسي التي أمنة بإن هذا هو الأنجاز العظيم التي حصدته بعد تعب سنوات

وبعد سهرًا ليالي في المطالبة بإن أصبح ذات شهادة وأجعل كل من والدي يفتخران

بذلك ها أنا اليوم أكمل الشوط الأكبر في حياتي الدراسية وأكمل جهد السنوات الدراسية

بأفضل نجاح وأحسن حال

وإلى شمعتي المضيئة وسندي وعضدي بالحياة أمي وأبي شكرًا لتعبكم

ومساندتكم الي والوقوف معي بأشد أوقات الدراسة

شكرًا لكم لمنحي هذه النعمة العظيمة وهي نيل الشهادة ، فضلكم علي كثير

وهذا هو حصاد تعبي من سنوات دراستي أضعه بين أيديكم تكريمًا لتعب سنواتكم

ودعمكم الي اطال الله في اعماركم وحفظكم الي

إلى من كانت تفتخر بي وكانت ترى وصولي إلى هذا المكان أنجاز عظيم إلى نجمتي المضيئة

بحياتي والتي وقفت معي ودعمتني وشجعتني أن أكمل في هذا الأختصاص

أختي العظيمة

الشكر والتقدير

بعد رحلة بحث وجهد واجتهاد تكللنا بإنجاز هذا البحث، نحمد الله عز وجل الذي

وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي

والذي ألهمنا الصحة والعافية والعزيمة فالحمد لله حمداً كثيراً...

واهتداء بهدي النبي صلى الله عليه واله وسلم في قوله:

(من لا يشكر الناس لا يشكر الله) صدق رسول الله

كما لا يسعني الا ان أتقدم بجزيل الشكر والامتنان والعرفان لمشرفي

أ.م.د.علاء نجم عبدالله

المشرف على هذه الدراسة والذي اعطاني من وقته وتوجيهاته الكثير كما

أتوجه بالشكر الجزيل الى عمادة

كلية التربية ورئاسة قسم الرياضيات على تعاونهم معنا.

واتوجه لكل من مد لي يد العون، ممن لم تسعفني الذاكرة بذكرهم بالشكر فجزاهم الله

عني خير الجزاء وختاماً اسال

الله العلي القدير ان يكون هذا العمل خالصاً لوجهه،

وان يجعله علماً نافعاً

جدول المحتويات

المقدمة :

المعادلة التفاضلية :

هي معادلة تتخص مشتقات الدوال الغير معروفة تستخدم في العديد من الحالات مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد والعلوم الطبيعة شكيل محام

طريقة الظل الزائدي :

هي تقنية قوية لحساب حلول الموجات المنتقلة بشكل رمزي للموجة غير الخطية احادية البعد ومعادلات التطور على وجه الخصوص

معادلة kdv :

هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية والتي تعمل كنموذج رياضي للموجات على سطح المياة الضحلة ، انه جدير بالملاحظة شكل خاص باعتبارها المثال النموذجي لـ PDF قابلة للتكامل وتعرض العديد من السلوكيات المتوقعة لـ PDE قابلة للتكامل

معادلة برغر :

تعرف على أنها معادلة التوازن بين التطور الزمني والاصلية الغير خطية والانتشار . وهي ابسط معادلة نموذجية غير خطية للموجات المنتشرة في دناميكيات الموائع

تناول هذا البحث ثلاث أفصل

الفصل الأول : المعادلات التفاضلية

الفصل الثاني : طريقة الظل الزائدي لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

الفصل الثالث : باستخدام طريقة الظل الزائدي حل معادلتي kdv وبرغر

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

(1-1) [1] المعادلة التفاضلية differential equation

هي علاقة تربط بين متحول (متغير) مستقل واحد أو أكثر والدالة Function المبحوث عنها التابعة لهذه المتحولات (التي يفترض أنها وحيدة التعيين) ومشتقات هذه الدالة بالنسبة لهذه المتحولات ، التي يفترض أنها متحولات حقيقة وكذلك الدالة .

نأخذ مثال يوضح شكل المعادلة التفاضلية $xy' + 2y = x^2 + 1$ وتربط بين الدالة y ومشتقها y' والمتحول المستقل x .

ظهر مفهوم المعادلات التفاضلية منذ طرح مفهوم التفاضل وبدأ يتعزز على نحو أقوى مع بداية القرن السادس عشر وتطورت موضوعات المعادلات التفاضلية بسرعة لكثرة تطبيقاتها وارتباطها المباشر بعدد من من فروع علم الرياضيات مثل الحساب التفاضلي والتكاملي والمعاملات التكاملية وحساب التغيرات ومسائل التقريب والحلول المثلى والشروط الحدية وكثير من البحوث الفيزيائية والميكانيكية والكيماوية

عندما تكون الدالة متعلقة بمتغير واحد فالمعادلة التفاضلية تمثل معادلة تفاضلية عادية ordinary differentiation equation.

أما عندما تكون المعادلة متعلقة بعدد من المتغيرات فالمعادلة تدعى معادلة تفاضلية جزئية Partial differential

وكما في المعادلات الجبرية فهناك جملة معادلات تفاضلية عادية وكذلك جملة معادلات تفاضلية جزئية.

- مرتبة المعادلة التفاضلية ودرجتها :

مرتبة order المعادلة التفاضلية العادية تحددها اكبر مرتبة مشتق تحوية المعادلة التفاضلية أما الدرجة degree فتحددها أكبر قوة لأعلى المشتقات مرتبة

في حالة دالة وحيدة مجهولة y ومتحول واحد x فإن المعادلة التفاضلية العادية التي تربط بين المتغير x والدالة المجهولة المتعلقة بهذا المتحول $y = y(x)$ ومشتقات هذه الدالة $y', y'', \dots, y^n$

يكون لها الشكل $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ وعندما يمكن كتابة المعادلة التفاضلية السابقة كمعادلة محلولة بالنسبة لاعلى المشتقات مرتبة فيصبح $y^n = \mathrm{f}(x, y)$

$$y', y'', \dots, y^{(n-1)}$$

Linear differential equations المعادلة التفاضلية الخطية [1] (1-3)

مثال (2) : المعادلة $y'' + x^2y' + 2y^2 = x^3$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والدرجة الاولى

عندما يكون للمعادلة السابقة الشكل

$$\sum_{i=0}^{0} g(x) \cdot y^{(n-1)} \qquad (x) = F(x)$$

او

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)y^{n-1}(x) + f(x)$$

حيث $y^{\circ}(x) = y(x)$

فانها تدعى معادلة خطية من المرتبة n والمعادلة

$$y^n = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)y^{(n-1)}(x)$$

تدعى معادلة خطية متجانسة من المرتبة n او يقال انها معادلة تفاضلية من المرتبة n من دون طرف ثاني اما المعادلة التفاضلية

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-1)}(x) + f(x)$$

فتدعى معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n ذات امثال ثابتة والمعادلة

$$y^n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-1)}$$

تدعى معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة n ذات امثال ثانية والمعاملات والثوابت $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي اعداد حقيقية

مثل (3) : المعادلة $y'' - 7y' + 10y = \sin y$ معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات امثال ثابتة

(1-4) [1] حل المعادلة التفاضلية

تكون الدالة $y = g(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية العادية اذا كانت المشتقات المتتالية

$y' = g', y'' = g''(x), y^n = g^n$ موجودة , وتبديلها في المعادلة التفاضلية يحول المعادلة الة مطابقة . وفي بعض الاحيان قد يعطي الحل بشكل دالة ضمنية $F(x, y) = 0$ او بالشكل الوسيطي

$$x = x(t) , y = y(t)$$

وعملية ايجاد الحل لمعادلة تفاضلية تسمى معاملة هذه المعادلة وهي مسألة معاكسة للحساب التفاضلي ولحل العام generl solution للمعادلة التفاضلية من المرتبة n يجب ان يحوي n ثابتاً او اختيارياً وقد يكون هذا الحل من الديكارتي

$$y = g(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$y_x = x(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

او الشكل الوسيطي

$$y = (t, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$F = (x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

ومسألة ايجاد حل للمعادلةالتفاضلية يحقق هو مشتقاته شروطاً اضافية معطاة هي من المسائل المهمه التي تندرج تحت اسم مسألة الشروط الابتدائية initia conditions

او مسألة كوشي Cauchy وعادة هذه الشروط تعطي بالشكل

$$x_\circ = y_\circ , y'(x) = y'_\circ , y_\circ^{(n-1)} = y_\circ^{(n-1)}$$

وهندسياً فأن هذا يعني ايجاد منحن تكاملي $y = y(x)$ يمر من النقطة $M(x_\circ, y_\circ)$ ويحقق الشروط التي ربما ترتبيط بخواص هندسية للحصول على احد منحنيات الاسرة التي تشكل الحل العام . والذي يدعى بالحل الخاص (Special solution) .

ولأيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بأمثال حقيقية ثابتة من المرتبة n ذات الشكل :

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-i)}(x)+F(x)$$

يتم البحث عن جذور المعادلة المميزة لها والتي لها الشكل

$$\lambda^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda^{(n-1)}$$

والتي يتم الحصول عليها بتبديل $y^{(n)}$ بالحد $\lambda^{(n)}$ وللجذور الحالات الاتية :

a) الجذور جميعها حقيقية ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ والحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y=\sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{\lambda_i x}$$

حيث $(1 \le i \le n)$ $y_i = c_i e^{ix}$ حلول خاصة , $c_i(1 \le i \le n)$ ثوابت كيفية .

مثال4/ المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المتجانسة y'' $-y'-2y=0$ هي $\lambda^2-\lambda-2=0$
جذراها $\lambda_1=-1\,, \lambda_2=2$ وحلها العام $y=c_1\, e^{-x}+c_2\, e^{2x}$

b) بعض الجذور حقيقية والحل المرافق لها كما سبق في المثال (4) واخرى عقدية مترافقة $\lambda_m=a_m \pm i\beta_m$ والحل الموافق لجذرين مترافين هو

$$a_{mx}\left(c_{m^{\cos}}\beta_{m^{x}}+c'_{m^{sin}}\beta_{m^{x}}\right)$$

ثابتان كيفيان حقيقيان والحل الخاص للمعادلة هو كل حل يحقق هذا وان الحل العام للمعادلة الخطية الغير متجانسة هو مجموع حلين الاول حل عام لمتجانسها والاخر هو حل خاص لغير متجانسة

(1-5) [1] بعض انواع المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الاولى

a) ان ابسط انواع المعادلات التفاضلية العادية هي ذات الشكل $y = \frac{dy}{dx}$ وحلها

$$y = \int f(x)dx$$

b) ان المعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

تسمى ذات متحولات قابلة للفصل اذا اوحى ردها للشكل $j(x)dx + g(y)dy = 0$ وحلها يعطي بالعلاقة $\int j(x)dx + \int g(y)dy = c$ حيث c ثابت كيفي .

c) المعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

تسمى متجانسة اذا كان تابعاها $M(x,y), N(x,y)$ متجانسين وم رتبة التجانس نفسها اي ان اذا كان $M(t_x, t_y) = t^m M(x,y)\ , N(t_x, t_y) = t^n N(x,y)$

او بشكل اخر اذا امكن كتابتها بالشكل $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = F\left(\frac{y}{x}\right)$

ولحلها يجرى التبديل $y = z_x$ ومنه $dy = z\,dx + x\,dz$ لترد بعد التبديل الى معادلة تفاضلية قابلة للفصل .

d) $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = F\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

حيث (a, b, c, a_1, b_1, c_1) ثوابت ترد لمعادلة متجانسة .

e) المعادلة التفاضلية $y' + p(x)y = q(x)$ تدعى معادلة خطية من المرتبة الاولى وحلها بالشكل

$$y = e^{-}\int p(x)dx\left[c + \int q(x)e\int p(x)dx\right]$$

f) المعادلة التفاضلية $y' + p(x)y = q(x)y''$ تدعى معادلة برنولي *Bernoulli* وهي ترد لمعادلة تفاضلية خطية بالتبديل $z = y^{1-n}, dz = (1-n)y^{-n}$ وتحل عندها معادلة خطية.

g) المعادلة $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

تدعى معادلة ريكاتي *Riccati* ومعرفة حل خاص لها $y = y_1$ يسهل حلها بأجراء التبديل

$$= y_1 + z^{-1} \Rightarrow y' = y_1' + z^{-2}z^1$$

الذي يردها معادلة خطية .

h) المعادلة $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ تكون معادلة تامه اذا حققت العلاقة

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\, N(x,y)}{\partial x}$$

وحلها بالشكل الاتي

$$\int_{x_\circ}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_\circ}^{y} N(x_\circ,y)dx = 0$$

او

$$\int_{x_\circ}^{x} M(x,y_\circ)dx + \int_{y_\circ}^{y} N(x,y)dx = 0$$

(1-2-1) [2] مقدمة الى المعادلات التفاضلية الجزئية :

(1-2-2) [2] الغرض من الدرس :

تبيان المقصود بالمحاولات التفاضلية الجزئية، وكيفية حلولها وعرض موجز عن تصنيفها، ونظرة عامة من عده من الأفكار التي تدرس بالتفصيل لاحقاً إن معظم الظواهر الفيزيائية سواء كانت في حقل سريان الموائع الكهربائية الميكانيك ، البصريات أو سريان الحرارة يمكن أن توصف بصورة عامة بمعادلات تفاضلية جزئية (م . ن . ج) وفي الحقيقة أن معظم الفيزياء الرياضية هي معادلات تفاضلية جزئية ، وعلى الرغم من أن الشيطات تحول المعادلات قيد الدرس إلى معادلات تفاضلية اعتيادية الا أن الوصف الكامل لهذه المنظومات يقع من المجال العام للمعادلات التفاضلية الجزئية.

(1-2-3) [2] ما المعادلات التفاضلية الجزئية ؟

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تحتوي على مشتقات جزئية. وخلافاً للمعادلات التفاضلية الاعتيادية (م.ت. إ) حيث تعتمد الدالة المجهولة على متغير واحد فقط فإن الدالة في المعادلات التفاضلية الجزئية تعتمد على عدد و من المتغيرات (مثل درجة الحرارة) $u(x,t)$ حيث تعتمد على الموضع x والزمن t لندرج الآن بعض المعادلات التفاضلية الجزئية المعروفة وللسهولة نستخدم الرموز :

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}\,, u_x = \frac{\partial u}{\partial \lambda}\,, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \dots$$

(1-2-4) [2] المعادلات التفاضلية مفيدة ولماذا ؟

إن معظم القوانين الطبيعية في الفيزياء مثل معادلات ماكسويل وقوانين نيوتن التبريد ومعاملات نافير - لتوكس ومعادلات نيوتن للحركة ومعادلة شرود تكر في الميكانيك الكمي كلها مكتوبة (أو يمكن كتابتها) بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية ، وبعبارة أخرى فإن هذه القوانين نصف الظواهر الفيزياوية بايجاد العلاقات بين الفضاء والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن ، فالمشتقات الجزئية تظهر في هذه المعادلات لكونها تمثل اشياء طبيعة مثل (السرعة والتعجيل والقوة والاحتكاك والقبض والتيار) ، وعليه نحصل على معادلات تربط بين مشتقات جزئية لكميات مجهوله مراد معرفتها

الغرض من هذا الكتاب تعليم القارئ الشيئين الاثنين :

1- كيفية صياغة المعادلة التفاضلية من المسألة الفيزيائية (بناء النموذج الرياضي)

2- كيفية حل المعادلة التفاضلية (بحيث تتحقق بعض الشروط الابتدائية وبعض الشروط الحدودية)

وهذا ولنبدأ لنمذجية المسألة الفيزيائية بعد قليل من الدراسة أما الآن فنلقي نظرة عامة على كيفية حل المعادلة التفاضلية الجزئية.

(1-2-5) [2] كيف تحل المعادلة التفاضلية الجزئية ؟

هذا السؤال جيد ، هناك طرق كثيرة جداً وطيفة عملياً و أعظمها أهمية تلك الطرق التي با تباعها تتحول المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضلية اعتيادية ، ومنها الطرق العشر الاتية :

1- فصل المتغيرات

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفا ضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستقلة إلى n من المعادلات التفاضلية الاعتيادية

2- التحويلات التكاملية

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية وذات n من المتغيرات المستقلة إلى معادلة تفاضلية جزئية ذات $(n-1)$من المتغيرات المستقلة ومن ثم بهذه الطريقة يمكن تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتغيرين إلى معادلة تفاضلية اعتيادية

3- تبديل المتغيرات

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية أو إلى معادلة تفاضلية جزئية (أسهل) وذلك بتبديل متغيرات المسالة (كالتدوير أو ما شابة ذلك).

4- تحويل المتغير التابع

بهذه الطريقة يتم تحويل المجهول في المسألة إلى مجمول أخر يمكن احتسابة بطريقة أسهل

5- الطرق العددية

تحول المعادلة المعاضلية الجزئية إلى مجموعة من المعادلات الفرقية التي يمكن حلها بعمليات حسابية متكررة بواسطة الحاسبة الالكترونية وفي عدد من الحالات يكون هذا هو الحل الوحيد وإضافة لذلك هناك طرائق لتقريب الحلول يسطوح معادلاتها متعددات حدودية (التقريب الشرائحي)

-6- طرائق الترجاف

تحول المسألة غير الخطية إلى متتابعة من المسائل الخطية والتي تقرب للمسألة الأولى .

7- طريقة الحافز والاستجابة

يجزأ الشروط الابتدائية والشروط الحدودية للمسألة إلى حوافز بسيطة ثم توجد استجابات هذه الحوافز وتجمع هذه الاستجابات البسيطة لحساب الاستجابة الكلية .

8- المعادلات التكاملية

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية الى معادلة تكاملية (معادلة يكون المجهول فيها داخل التكامل) وبعدئذ تحل المعادلة التكاملية بطرق مختلفة.

9- طرائق حساب التغيرات :

يوجد حل للمعادلات التفاضلية الجزئية بأعادة صياغتها كمسأله نهايات صغرى. وعندئذ يتبع أن النهاية الصغرى لمقدارها . (يحتمل ان يمثل المقدار الطاقة الكلية) تكون أيضاً حلاً للمعادلة التفاضلية

10- طريقة الدوال الذاتية :

بهذه الطريقة يتم ايجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية كمجموع عدو لهذه الطريقة يتم غير منته من الدوال الذاتية توجد بحل ما يسمى بمسائل القيم الذاتية المناظرة للمسألة الأصلية .

(1-2-6) [2] حلول بعض المعادلات التفاضلية البسيطة

لكي تتوصل إلى بعض الأفكار التي تخص طبيعة الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية دعونا لدرس الآتي :-

- مسالة للمناقشة :-

استخرج حلولاً للمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x + 12y^2 \qquad \dots (1$$

يعتمد المتغير التابع u في (1) على المتغيرين المستقلين x, y لايجاد الحلول نحاول ان نحدد U بدلالة x, y اي $U(x, y)$ إذا كتبنا (1) بالصيغة

$$\frac{\partial'}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 6x + 12y^2 \qquad \dots (2$$

فإننا نستطيع أن نكامل بالنسبة إلى x مع الاحتفاظ بـy ثابتاً لنجد أن :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 + 12xy^2 + F(y) \qquad \dots (3$$

حيث أضفنا (ثابت) التكامل الاختياري الذي يمكن أن يعتمد على y و لذلك فهو في الواقع دالة اختيارية لـy يرمز لها بـ $F(y)$، ونكامل الآن (3) بالنسبة إلى y مع الاحتفاظ بـx ثابتاً لنجد ان :

$$U = 3x^2 y + 4xy^3 + \int F(x)\, dy + G(x) \qquad \dots (4$$

في هذه المرة اضفنا دالة اختيارية لـ x معطاه بـ $G(x)$ بما ان تكامل دالة اختيارية لـ y هو عبرة عن دالة اختيارية اخرى لـ y فأننا نستطيع ان نكتب (u) بـ :

$$u = 3x^2 y + 4xy^3 + H(y) + G(x) \qquad \dots (5$$

معادلة KDV

Korteweg – Devries equation

(1-3-1) [3] مقدمة:

في الرياضيات معادلة (kdv) في معادلة تفاضلية جزئية (PDE) والتي تعمل كنموذج رياضي الموجات على السطح المياة الفحلة .انة جدير بالملاحظة بشكل خاص يا عتبارة المثال النموذجي

لـ PDE قابل للتكامل ويعرض العديد من السلوكيات المتوقعة لـ PDE قابل للتكامل مثل عدد كبير من الحلول الصريحة على وجه الخصوص حلول سوليتون ، وعدد لا حصر له من الكميات المحفوظة على الرغم من اللأخطية التي عادة ما يجعل PDE مستعصية على الحل . يمكن حل مشكلة kdv بطريقة التشتت العكسي .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

(1-3-2) [3] تاريخ ظهور معادلة KDV

من خلال التجارب التي أجراها سكون راسل في عام 1834 بدأ تاريخ معادلة kdv تليها التحقيقات النظرية التي اجراها اللورد وايلي وجوزيف بوسنيك في Kortewey Devries حوالي عام 1870 وأخير أ عام 1895

لم يتم دراسة معادلة Kruskale و Zabusky كثيراً في عام 1965 حيث أكتشف معادلة kdv عددياً أن حلولها بدت وكأنها تتحلل في اوقات كبيرة موجات انفرادية منفصلة جيداً.

علاوة على الحلول إلى مجموعة من ذلك يبدو أن السوليتونات لا تتاثر تقريباً في الشكل بالمرور عبر بعضها البعض (على الرغم من أن هذا قد يتب في تغير موضعها) كما قاموا fermi, pasta, ulam بالاتصال بالتجارب العددية السابقة بواسطة كانت الحد المتصل لنظام Kdv من خلال اظهار ان المعادلة Fput,Tsingou تم تطوير الحل التحليلي عن طريق تحويل التشتت العكسي في Gardner, Green, Kruskal, Miura عام 1967 بنظر الان الى معادلة kdv مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بواسطة مبدأ Huygens

معادلة برغر

Burgers Equation

(1-4-1) [3] مقدمة:

تعرف على انها معادلة التوازن بين التطور الزمني والأصلية الغير خطية والانتشار، وهي ابسط معادلة نموذجية غير خطية للموجات المنتشرة في ديناميكيات الموائع

(1-4-2) [3] كيف يتم الحصول عليها :

يتم الحصول عليها نتيجة لدمج حركة الموجة غير الخطية مع الانتشار الخطي وهي أبسط نموذج لتحليل التأثير المشترك للسموحة وانتشارها ، ويساعد وجود مصطلح لزج في قمع توقف عن الانكماش في المخزنة وبالتالي تتوقع الحصول على حل جيد وسلس في حد كبير في الحد الأدنى، حيث يصبح مصطلح الانتشار صغيراً للحلول الناعمة اللزجة تتلاقى غير موحد إلى موجه الصدمة المناسبة تؤدي إلى آلية بديلة لتحليل المحافظة العمليات الدنياميكية غير الخطية

(1-4-3) [3] متى طورت

طورها العالم برغر عام 1948 وهذه المعادلة لأول مرة لإلقاء الضوء على الأضطراب الموصوف بالتفاعل بين تأثرين متعاكسين للحمل الحراري والانتشار.

شكل معادلة برغر والتي تم الحصول عليها من طريقة تانه

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

الفصل الثاني

طريقة الظل الزائدي لحل المعادلة التفاضلية الجزئية

The Tank method: A Tool to solve Nonlinear Partial Differential Equations with symbolic software

(2-1-1) [3] طريقة الظل الزائدي: أداة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية باستخدام البرمجيات الرمزية

(2-1-2) [3] مقدمة :

تظهر ظواهر الموجات غير الخطية بشكل متكرر في العديد من مجالات العلوم الطبيعية مثل ديناميكا الموائع والكيمياء والحركية الكيميائية التي تتضمن التفاعلات، وعلم الاحياء الرياضي (الديناميكيات السكانية، وفيزياء الحالة الصلبة والاهتزازات الشبكية ... الخ

ونظراً للأهتمام المتزايد بايجاد حلول دقيقة لتلك المشكلات تتوفر الآن مجموعة كاملة من طرق الحلول التحليلية.

ومن تلك الطرق طريقة الظل الزائدي التي تم تطويرها منذ عدة سنوات . اتضح أن هذه الطريقة مناسبة تماماً للمشاكل التي تلعب فيها تاثيرات التشتت وظواهر انتشار التفاعل والحمل الحراري دوراً مهماً . بالنسبة لمجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية العادية والجزئية غير الخطية (PDES,ODES) يمكن لأي أحد ان يعثر على حلول دقيقة بالإضافة إلى حلول تقريبية بطريقة مباشرة ومنهجية وللإكتمال . يجب ان تذكر أن هذة التقنية تقتصر على البحث من الموجات المعصية المتنقلة . هكذا نحن تتعامل بشكل اساسي مع موجات الصدمة أحادية البعد (نوع العقدة)، وحلول الموجة الانفرادية (نوع التبيض) في اطار مرجعي متحرك بناء على طريقة Tanh وتعميماتها تم تطوير العديد من البرامج الرمزية لايجادححلول دقيقة للموجات .

توفر طريقة الظل اللقطع الزائدي خوارزمية مباشرة لحساب حلول معينة من نوع العق والنبض لفئة كبيرة ن المعادلات PDE غير الخطية ويخص نجاح هذه الطريقة في حقيقة ان المرء يتحايل على التكامل للحصول على حلول ذات شكل مغلق على حساب الجبر .

(2-1-3) [3] الهدف من الطريقة

هدفنا هو تقديم نظرة عامة على الإمكانيات التي توفرها هذة الطريقة بالإضافة إلى بعض الامثلة المختارة.

يجب أن تذكر أن هذة التقنية تقتصر على البحث عن الموجات. الثانية وبالتالي فإننا تتعامل بشكل اساسي مع حلول الصدمة او النوع الانفرادي . علاوة على ذلك فإننا سعيدون يطيعا ببعد واحد (او اتجاه الانتشار) . ومع ذلك فقد تم بالفعل حل العديد من المعادلات بهذه الطريقة وبسبب بعض التعميمات لهذه الطريقة لا يزال هذا العدد في ازدياد

(2-1-4) [3] بصورة عامة يمكن ان تكتب خوارزمية الحل بالخطوات :

1. تحويل المعادلة PDF إلى معادلة ODE غير خطية
2. نحدد درجة متعددة الحدود
3. نحول معادل ODE إلى نظام خلي ثم في حل النظام
4. نشق نظام المعادلات الجبرية غير الخطية

$$a_n \,, n = 0,1, \dots , N$$

وهذه الخطوة تعتبر الخطوة الاصعب

نطبق الان الفروض الاتية :

a. جمع المعلمات التي تظهر في الحساب موجبة بمعنى $a_i > 0$ وفي حالة أحدى المعلمات كانت صفرية نعيد حساب N له مرة أخرى
b. معاملات الحدود ذات القوى (الأس) العالية تكون غير صفرية
c. الرقم الموجب يجب ان يكون موجب
d. تعويض الحلول للمعادلات والمعاملات في المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية

بعد أن قدمنا شرح مفصل عن طريقة تانه وكيفية خوارزمية حلها، سنأخذ الآن مثال وتقوم بحله باستخدام طريقة تانه

تكتب بشكل المعادلات الغير خطية التي نريد العمل عليها بهذه الطريقة

$$u_t = G(u, u_x, u_{xx}, \dots)$$

Or

$$u_{tt} = G(u, u_x, u_{xx}, \dots) \qquad \dots (1$$

- الغاية من هذه الطريقة هي نريد ان نعرف إذا كانت هذه المعادلات تقبل الحلول الدقيقة وكيفية حسابها

الآن أو الخطوة الأولى في دمج المتغيرات المستقلة t, x في متغير جديد $(\varepsilon = k(x - vt$ كل من k و v معلمات غير محددة

سوف نفرض هنا بأن $k > 0$ ونباءً على ذلك سوف يتم استبدال المتغير التابع $u(x,t) \Rightarrow u(\varepsilon)$

لتصبح بهذا الشكل مشتقة اولى

$$-kv\frac{du}{d\varepsilon} = G\left(u, k\frac{du}{d\varepsilon}, k^2\frac{d^2u}{d\varepsilon^2}, \dots\right) \qquad \dots (2$$

نشتقها مشتقة ثانية

$$k^2v^2\frac{d^2u}{d\xi} = G\left(u, k\frac{du}{d\xi}, k^2\frac{d^2u}{d\xi^2}, \dots\right) \qquad \dots (3$$

وبالتالي ، في مايلي ستتعامل ODES بدلاً من PDES هدفنا الرئيسي هو ايجاد حلول دقيقة لتلك المعادلات التفاضلية بطريقة تانه ، واذا كان ذلك مستحيلاً فيمكن ايجاد حلول تقريبية

لدنيا هذا المتغير المستقل $y \Leftarrow$

في معادلة ODE

$$y = \tanh\xi$$

$$\Rightarrow v(\xi) = F(y)$$

من معادلة رقم (2) ومعادلة رقم (3)

$$(1 - y^2)\frac{d}{dy}$$

هنا يتم استخدام متسلسلة القوى في y

$$F(y) = \sum_{n=0}^{N} a_n y^n \qquad \dots (4)$$

الفصل الثالث

حل معادلتي KDV وبرغر

بأستخدام طريقة الظل الزائدي

(3-1-1) [3] حل معادلتي KDV وبرغر بأستخدام طريقة الظل الزائدي

لتوضيح طريقة الظل الزائدي والامكانيات التي توفرها فأننا الان سوف ندرس بالتفصيل بعض الامثلة المعروفة وهي

(3-1-2) [3] معادلة (kdv) :

تعرفنا في الفصل الاول على معادلة (kdv) وذكرنا انها من اشهر المعادلات PDE غير الخطية

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \qquad \dots (5$$

b هو معلمة

$$-kV\frac{du}{d\xi}+ku\frac{du}{d\xi}+bk^3\frac{d^3u}{d\xi^3} \qquad \dots (6)$$

* سنقوم بالاستبدال وذلك بوضع $y=\tanh(\xi)$

$$-kV(1-y^2)\frac{dF(y)}{dy}+kF(y)(1-y^2)\frac{dF(y)}{dy} + bk^3(1-y^2)\frac{d}{dy}\left\{(1-y^2)\frac{dF(y)}{dy}\right\}=0 \qquad \dots (7)$$

$$Let\ F=a_0+a_1y+a_2y^2$$

$$\frac{dF}{dy}=a_1+2a_2y$$

سيظهر y على شكل Y^{2n+1} . في الجزء الثاني و g^{n+3} في المعادلة رقم (7) اذا سوف تؤدي موازنة هذه المعادلتين الى $2N+1=N+3$

$$or \quad N=2$$

وبالتالي يمكن ايجاد حل ممكن بأستخدام المعادلة رقم (4) عند $N=2$ استبدال كثير الحدود هذا في معادلة رقم (7) ليؤدي الى

$$-KV(1-y^2)(a_1+2a_2y)+K(a_0+a_1y+a_2y^2)(1-y^2)2a_2 + bK^3(1-y^2)a_1+2a_2y(1-y^2)+a_1+2a_2y(1-y^2)a_1 + 2a_2y=0$$

وبالتالي بعد الضرب والاشتقاق وحل المعادلة بالنظام الجبر الخطي نحصل على الحلول النهائية

$$F(y) = a_\circ - 12bk^2y^2$$
$$V = a_\circ - 8bk^2 \qquad |\dots(8)$$

بعد تعويض قيمة $a_\circ$ في المعادلتين اعلاه نحصل على

$$F(y) = 12bk^2(1-y^2)$$
$$V = 4bk^2 \qquad |\dots(9)$$

$$u(x,t) = 12bk^2 \sec h^2\, k(x-vt) = 0 \qquad \dots(10$$

(3-1-3)[3] حل معادلة برغر:

بنفس اليه الحل لمعادلة kdv سوف نحل معادلة (Burgers) / برغر ايضاً تعرفنا سابقاً على معادلة برغر في الفصل الاول

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \dots(11$$

$$-kV\,\frac{du}{d\xi} + kU\frac{du}{d\xi} - ak^2\frac{d^2u}{d\xi^2} = 0 \qquad \dots(12$$

$$-\mathrm{kV}(1-y^2)\frac{dF(y)}{dy} + kF(y)(1-y^2)\frac{dF(y)}{dy} - ak^2(1-y^2)\frac{d}{dy}\left[(1-y^2)\frac{dF(y)}{dy}\right] = 0 \qquad \dots(13$$

$$Let \;\Rightarrow F = a_0 + a_1y + a_2y^2$$

$$\frac{dF}{dy} = a_1 + 2a_2y$$

من معادلة رقم (4) ومعادلة رقم (13) بالموازنة على القوى y سنحصل على y^{2N+1} في الحد الثاني و y^{N+2} في الحد الاخير

$$-KV(1-y^2)(a_1+2a_2y) + K(a_0+a_1y+a_2y)(1-y^2)2a_2 + aK^2(1-y^2)a_1 + 2a_2y = 0$$

وبالتالي سنحصل على

$$F(y) = a_\circ + 2aky \quad with \quad V = a_\circ \qquad ...(14$$

حيث k هي معلمة (كما هو الحال بالنسبة لمعادلة kdv) سنحصل على

$$F(y) = 2ak(1-y) \quad with \quad V = 2ak \quad ....(15)$$

سنحصل على الحل النهائي :

$$u(x,t) = 2ak[1 - \tanh k\,(x - vt)] = 0 \quad ...(16)$$

ـ المصادر

1- https://arab-ency.com.sy/ency/details/10037/18

2- المعادلات التفاضلية الجزئية , ترجمة د.مها عواد الكبيسي , منشورات جامعة عمر المختار البيضاء

3- The Tanh Method: A Tool to Solve Nonlinear Partial Differential Equations with Symbolic Software, Willy Hereman Department of Mathematical and Computer Sciences, Colorado School of Mines Golden CO 80401-1887, U.S.A. and Willy Malfliet Department of Physics, University of Antwerp, B-2610 Wilrijk, Belgium.