جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

استقراريه انظمه المعادلات التفاضلية الخطية بطريقه راوث

بحث تقدم به الطالب حازم محمد سليم الى مجلس قسم الرياضيات وهو جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

بأشراف
أ.م علي سامي السوداني

١٤٤٥هـ ٢٠٢٤مـ

بســـــم الله الرحمن الرحيم

وَلَقَدْ بَعَثْنَا فِي كُلِّ أُمَّةٍ رَّسُولًا أَنِ اعْبُدُوا اللَّهَ وَاجْتَنِبُوا الطَّاغُوتَ ۖ فَمِنْهُم مَّنْ هَدَى اللَّهُ وَمِنْهُم مَّنْ حَقَّتْ عَلَيْهِ الضَّلَالَةُ ۚ فَسِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ كَانَ عَاقِبَةُ الْمُكَذِّبِينَ

صدق الله العلي العظيم

(سورة النحل : اية ٣٦)

الاهداء

ما سلكنا البديات إلا بتيسيره وما بلغنا النهايات إلا بتوفيقه وما حققنا الغايات إلا بفضله فالحمد لله حبا وشكرا وامتنانا الحمد لله على البدء والختام

وبكل ما اتيت من مشاعر اهدي بحث تخرجي إلى

إلى من لا ينفصل اسمي عن اسمه ذلك الرجل العظيم رجل علمني الحياه بأجمل شكل وبذل كل ما بوسعه

مأمني الوحيد وفرحتي الدائمة

(والدي الحبيب)

ادامك الله لنا

والى نبراس أيامي ووهج حياتي إلى التي ضلت دعواتها تضم اسمي معلمتي الأولى ودكتورتي الأولى صديقه أيامي

(والدتي الحنونة)

واخيراً من قال أنا لهل نالها وأنا لها وان أ بت رغما عنها اتيت بها ها هو اليوم العضيم هنا اليوم الذي اجريت سنوات دراستي الشاقه حالمه بها

فالحمد لله الذي ما تيقنت به خيرا وأملا إلا وأغرقني سرورآ ينسيني مشقتي

الشكر والتقدير

الحمـــد لله الـــذي لا يحمـــد ســـواه، ولا تصـــمد الحاجـــات إلا إليـــه، الـــذي مّـــن علينـــا بهـــذه النعمـــة وهيـــئ لنـــا أســـبابها، والـــذي أمـــدنا بـــالعون والتوفيـــق، فلـــه المّـــن والفضـــل أولا وأخيـــرا، ظـــاهرا وباطنـــا. أتقـــدم بصـــدق العرفـــان والوفـــاء والتقـــدير إلـــى المشـــرف علـــى هـــذا العمـــل وعلـــى توجيهاتـــه ونصـــائحه القيمـــة منـــذ بدايـــة الاعـــداد فـــي ســـبيل اطـــراء موضـــوع دراســـتنا بمختلـــف جوانبهـــا وأمنيـــاتي لـــه بـــأن يجعـــل الله دعمـــه لـــي مقامـــاً يزيـــد مـــن أجـــره . كما اتقدم بالشكر والامتنان إلى

(**أ.م علي سامي السوداني**)وأعضاء لجنة المناقشة الموقرة الذين شرفونا بقبولهم وحضورهم لمناقشة هذا البحث، واساتذتي الذين كان لهم الفضل الكبير في دراستي ، ولا يسعني الا سوى أن ادعو لهم لان الدعاء أجدى من كل شيء. ويمتد الشكر الى والدي ووالدتي واخواتي وزملائي وزميلاتي وكل من كان يدعوا لي بالتفوق والنجاح وشجعني على إتمام دراستي ودعمني ووقف معي والى كل من رسم الخطوة امامي واشعل شمعة لينير دربي، الشكر اللامتناهي والمتواتر لكم ، وفي الختام سائلة المولى عز وجل ان يحفظكم بحفظه ويسدد خطاكم

المحتويات:

المقدمة

استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة راوث هي موضوع مهم في مجال الرياضيات التطبيقية والهندسية، حيث تسمح لنا بفهم سلوك الأنظمة الديناميكية وتنبؤ تطورها عبر الزمن. يُعتبر تحليل استقراريه هذه الأنظمة جوهريًا لضمان سلامة وثبات النظام وتفادي حدوث الظواهر غير المرغوب فيها مثل الاهتزازات غير المرغوب فيها أو التقارب غير المرغوب فيه بين قيم الحالة.

في مقدمة الدراسة المتعلقة باستقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة راوث، يُمكن تسليط الضوء على الأهمية الكبيرة لهذا الموضوع في عدة مجالات، بما في ذلك الهندسة الكهربائية والهندسة الميكانيكية وعلم التحكم والاقتصاد الرياضي. يُظهر تحليل استقراريه الأنظمة الديناميكية اختيارية استجابتها للاضطرابات والتغييرات الخارجية، ويمكن أن يسهم في تصميم وتطوير أنظمة تحكم فعالة وموثوقة.

بالإضافة إلى ذلك، يمكن أن تشكل دراسة استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية أساسًا هامًا للفهم العميق للظواهر الديناميكية والتفاعلات بين مكونات النظام، وبالتالي تمثل أداة قيمة في تطوير النماذج الرياضية وتحليل سلوك الأنظمة الطبيعية والاصطناعية.

هذه المقدمة تسلط الضوء على أهمية استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة راوث وتمهيد الطريق لفهم الأسس والمفاهيم المرتبطة بهذا الموضوع الشيق والمهم في عالم الرياضيات التطبيقية والهندسية.

تعريف أنظمة المعادلات التفاضلية:

أنظمة المعادلات التفاضلية هي مجموعة من المعادلات التفاضلية التي تصف تطور متعدد المتغيرات مع الزمن. تُستخدم في العديد من المجالات مثل الفيزياء والهندسة وعلم التحكم والاقتصاد.

تصنيف أنظمة المعادلات التفاضلية:

:الانظمة الخطية وغير الخطية إذا كانت جميع المعادلات في النظام خطية بالنسبة للمتغيرات الغير معروفة وتفاضلاتها، يُعتبر النظام خطيًا. إذا كانت أحد المعادلات على الأقل غير خطية، فإن النظام يعتبر غير خطي.

مقدمة:

الانظمة الزمنية والزمانية يعتمد هذا التصنيف على ما إذا كانت معاملات المعادلات تتغير مع الزمن أم لا. في الانظمة الزمنية، تظل معاملات المعادلات ثابتة مع الزمن، بينما في الانظمة الزمانية، تتغير معاملات المعادلات بشكل متغير مع الزمن.

أمثلة على أنظمة المعادلات التفاضلية:

:يُصف هذا النظام تحرك موجات فردية في وسط معين، ويمكن تمثيله بمعادلات تفاضلية خطية. نظام الموجات الفردية

:يصف هذا النظام حركة السوائل في وعاء معين، ويمكن أيضًا تمثيله بمعادلات تفاضلية. نظام الموائع الديناميكي

توفر طرق حل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية أدوات قوية لفهم سلوك النظم المعقدة. تشمل هذه الطرق استخدام النظرية الخطية، مثل الجبر الخطي وتحويلات لابلاس، بالإضافة إلى الطرق العددية مثل طريقة أويلر وطريقة رنج كوتا لحل المشاكل العملية.

استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية هي موضوع مهم في مجال الرياضيات التطبيقية والهندسية، حيث تعتبر أساسية لفهم سلوك الأنظمة الديناميكية وتنبؤ تطورها عبر الزمن. يرتبط مفهوم الاستقراريه بقدرة النظام على العودة إلى حالة التوازن أو النقطة الثابتة بعد تعرضه لاضطراب أو انحراف عنها.

مقدمة حول استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية تتضمن فهم الأسس النظرية والمفاهيم الأساسية لهذا الموضوع. يتمثل التحليل في دراسة سلوك الحلول للمعادلات التفاضلية عبر الزمن، وتحديد ما إذا كانت هذه الحلول تتقارب إلى حالة التوازن أو تتبدد مع مرور الزمن.

تتضمن المقدمة أيضًا استعراضًا للمفاهيم المرتبطة بالاستقراريه، مثل النقطة الثابتة والمعادلات الخطية، بالإضافة إلى الأدوات الرياضية المستخدمة في تحليل استقراريه الأنظمة مثل معادلات ليابونوف ونظرية القيم الخاصة والقيم الذاتية للمصفوفات.

باختصار، تقدم مقدمة حول استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية فرصة لفهم أساسيات هذا الموضوع المهم، وتمهيد الطريق لدراسة التقنيات والأساليب المتقدمة لتحليل وتصنيف استقراريه النظم الديناميكية.

طريقه راوث لقياس استقراريه انضمه المعادلات التفاضليه الاعتياديه . مقدمة

طريقة راوث (أو معايير راوث) هي أداة هامة تُستخدم في تحليل استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية العادية. تعتمد هذه الطريقة على تحليل خصائص الحلول للمعادلات التفاضلية لتقدير الاستقراريه والتصرف في الزمن. يمكن استخدامها في تقدير الاستقراريه لأنظمة متعددة الأبعاد وغير الخطية.

مقدمة حول طريقة راوث:

تعتمد طريقة راوث على فكرة تحليل الحلول للمعادلات التفاضلية في الطيف الترددي (التحويلات اللابلاسية)، حيث يتم تحليل سلوك النظام عند قيم مختلفة لمتغير التردد. تستخدم هذه الطريقة في تقدير الاستقراريه عن طريق فحص الشروط اللازمة والكافية لحدوث استقرار في النظام.

استخدام طريقة راوث:

:يتم تحويل المعادلات التفاضلية العادية إلى معادلات لابلاس لتحليل الاستقراريه في المجال الترددي. تحليل النظام

:تقدير المعايير تستخدم معايير راوث لتقدير عدد الأقطاب الموجبة (أو الأصفر) والأقطاب السالبة (أو الأزرق) في نظام المعادلات التفاضلية.

:بناءً على عدد الأقطاب الموجبة والسالبة، يمكن تقدير استقراريه النظام وفقًا لمعايير راوث. تقدير الاستقراريه

فوائد طريقة راوث:

توفر طريقة راوث تقديرًا سريعًا وفعالًا لاستقراريه النظم.

- تعتمد على تحليل معادلات التفاضلية في المجال الترددي، مما يتيح فهمًا عميقًا لسلوك النظام عبر الزمن.
- تسمح بتقدير استقراريه النظم مع تحديد الشروط اللازمة والكافية لحدوثها.

ختامية:

مقدمة حول طريقة راوث تبرز أهمية هذه الأداة في تحليل استقراريه أنظمة المعادلات التفاضلية العادية. توفر هذه الطريقة نظرة شاملة وفعالة لسلوك النظم عبر الزمن، مما يسهل عملية فهم وتحليل وتصميم الأنظمة الديناميكية في مختلف المجالات الهندسية والعلمية.

الفصل الاول

١) مشكلة البحث

توجد معادلات تفاضلية بأنواع مختلفة واشكال كثيرة فهذا التعدد يشكل غموض في اختيارية تكوينها وطرق حلها والتفريق بين انواعها.

والحل العددي للمعادلات التفاضلية يسهل علينا هذا الغموض.

٢) اهمية البحث

للمعادلات التفاضلية دور هام ورئيسي في ترجمة الواقع الفعلي لكثير من المشكلات الطبيعية التي تحدث في الفيزياء والكيمياء والهندسة والطب والحاسبات وتحويلها الى نماذج رياضية محددة المعالم يمكن دراستها من وجهة رياضية بحته ومن ثم العمل على ايجاد الحلول المناسبة التي تترجم مرة اخرى الى عالم الواقع فتعطي صورة واضحة عن ماهية الحلول الممكنة والخيارات المتاحة.

٣) اهداف البحث

- التعرف على المعادلات التفاضلية وتكوينها وطرق حلها.
- كسب القدرة على حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والرتبة الثانية والرتبة n.
- دراسة اساسيات المعادلات التفاضلية، واعطاء مقدمة واضحة عن هذا الفرع من فروع الرياضيات.
- دراسة معظم الطرق المختلفة المتوافرة لحل بعض المعادلات التفاضلية، اي ايجاد الدالة او والدوال التي تحقق المعادلة التفاضلية .

اعددنا هذا البحث لدراسة الحل العددي للمعادلات التفاضلية بصورة مبسطة وهدفنا هو نمو المفاهيم العلمية ووضع منهجية التفكير العلمي لدى الطلاب.

الفصل الاول

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

Differential equations normal

(١-١) مفاهيم اساسية Basic concepts

تعريف (١-١-١)

١- المعادلة التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differential Equation (O.D.E)

هي معادلة تحتوي على مشتقات او تفاضليات دالة مجهولة او عدة دوال مجهولة تعتمد على متغير مستقل واحد.

مثال، $\frac{dy}{dx} - x\ cosx = y$

٢- المعادلة التفاضلية الجزئية Partial Differential Equation (P.D.E)

هي معادلة تفاضلية تحتوي على دالة مجهولة لأكثر من متغير مستقل واحد مع المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

مثال، $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dy^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0$

(١-٢) تصنيف المعادلة التفاضلية:

تعريف (١-٢-١)

١- رتبة المعادلة التفاضلية (Order): هي أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

٢- درجة المعادلة التفاضلية (Degree): هي أسس أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية بشرط ان تكون جميع المعادلات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.

مثال:

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى $1)\ \frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$

معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى $2)\ y^{(4)} + cosy + x^2yy' = 0$

تعريف (١-٢-١): المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n تأخذ الصورة

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

فأذا كانت الدالة q(x) تساوي صفر فأن المعادلة تكون متجانسة أما اذا اكنت الدالة q(x) لا تساوي صفر فإن المعادلة تكون غير متجانسة.

مثال: المعادلة $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية.

المعادلة $xy' + (sinx)y = x^2(sinx + 2)$

معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الاولى.

المعادلة $y' + x\sqrt{y} = sinx$

معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى.

المعادلة $y''' + x^2y'' + siny = 0$

معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الثالثة.

(١-٣) حل المعادلة التفاضلية:- Solution of D.E

تسمى الدالة y=y(x) حلاً للمعادلة التفاضلية$f(x, y, y'', y''', y^n)$ اذا كانت:

١) قابلة للأشتقاق n من المرات.

٢) تحقق المعادلة التفاضلية أي $f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$

مثال، اثبت ان $y(x) = c\ sinx$حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = o$ حيث C ثابت

الحل/ $y(x) = c\ sinx \qquad y'(x) = c\ cosx \qquad y''(x) = -c\ sinx$

$$y'' + y = -c\ sinx + c\ sinx = 0$$

تعريف (١-٣-١) الحل العام للمعادلة التفاضلية (*General solution*):

هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ويجن ان يحتوي على عدد *n* من الثوابت الاختيارية.

تعريف (١-٣-٢) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (*special solution*):

هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ويستنتج من الحال العام وذلك بأعطاء الثوابت قيم اختيارية.

تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت)

اذا اعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n، نجد ان ذلك الحل يعتمد على *n* من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة:

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \ \rightarrow (1)$$

حيث ان $C_1, C_2, \dots, C_n$ ثوابت اختيارية، وللحصول على المعادلة التفاضلية لحل المعطى نجري *n* من المشتقات للمعادلة (١).

يكون لدينا *n+1* من المعادلات عبارة عن المعادلة (١) بالاضافة الى *n* معادلة من العمليات التفاضلية التي عددها *n* وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة.

مثال/ اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = c\ sinx$

الحل/ $y = c\ sinx \ \rightarrow (1)$

نفاضل مرة واحدة $y' = c\ cosx \ \rightarrow (2)$

نحذف c من المعادلتين (٢)، (١) بقسمة (٢) على (١) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة

$$y' = y\ cotx$$

حل اخر/ يمكن لحذف c من (٢)، (١) نستخدم المصدر:

$$\begin{bmatrix} y & sinx \\ y' & cosx \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow y\ cosx - y' sinx = 0$$

$$\therefore y' = y\ cotx$$

(٤-١) معادلات تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى.

اي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى تكون على الصورة

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = f(x,y)$$

أو

$$M(x,y)dx + N((x,y)dy = 0$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم احدى الطرق التالية المتاحة:

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

تسمى المعادلة التفاضلية الاعتيادية قابلة للفصل اذا امكن كتابتها بالشكل الاتي:-

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \ \rightarrow (4)$$

وبتكامل طرفي المعادلة (٤) نحصل على الحل العام

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} - xy = 0$

الحل/ نضرب المعادلة بـ$(\frac{dx}{y})$

بالمكاملة

$$\frac{dy}{y} - xdx = 0$$

$$Lny - \frac{x^2}{2} = LnC$$

$$Ln\frac{y}{c} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

مثال/ اوجد الحل العام للمعادلة $y' + e^x y = e^x y^2$

$$y' = e^x(y^2 - y)$$

الحل/

$$e^x dx = \frac{1}{y(y-1)} dy$$
$$e^x dx = \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right] dy$$
$$-e^x = Ln[y-1] - Ln[y] + C$$

المعادلات التفاضلية المتجانسة

تكون المعادلة التفاضلية متجانسة اذا كان مجموع أسس المتغيرات (x) و (y) متساوية في كل حد.

قد تكون المعادلة التفاضلية ليست قابلة لفصل المتغيرات فيها ولكن في الوقت نفسه نستطيع تحويلها الى معادلة قابلة للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات ومنها المعادلة المتجانسة وهي المعادلة التي يمكن كتابتها بصورة $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

ولايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة نكتب المعادلة بالصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \rightarrow (1)$$

نفرض $y = vx \rightarrow (2)$ ونشتقها بالنسبة الى x فنحصل على

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \rightarrow (3)$$

ثم نعوض معادلة (٢) و (٣) في معادلة (١) فنحصل على

$$x\frac{dy}{dx} + v = f(v) \rightarrow x\frac{dy}{dx} = f(v) - v$$

وبفصل المتغيرات نحصل على $\frac{dy}{f(v)} - v = \frac{dx}{x}$

ثم عن طريق التكامل نحصل على الحل العام.

مثال/ حل المعادلة التفاضلية $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

الحل/ $x^2 dy = -(y^2 - xy)dx$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - xy}{x^2} \rightarrow (1)$$
$$let \quad y = xv \rightarrow (2)$$
$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \rightarrow (3)$$

نعوض المعادلة (٢) و (٣) في (١)

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{-(x^2v^2-x^2v)}{x^2}$$
$$x\frac{dv}{dx}+v=-v^2+v$$
$$x\frac{dv}{dx}=-v^2$$
$$\int\frac{dv}{-v^2}=\int\frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{v}=Ln|x|+c \ \rightarrow \frac{x}{y}=Ln|x|+c$$

المعادلات التفاضلية الخطية

وهي معادلة تفاضلية اعتيادية بالصيغة:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$

او بالشكل:

$$\frac{dx}{dy}+p(y)x=Q(y)$$

والحل العام لها هو:

$$yu-\int Q(x)udx=C$$
$$\int p(x)dx$$
$$u=e$$

مثال/ اوجد الحل العام للمعادلة $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x}$

الحل/ $u=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{LnX}=x$

$$yx-\int\frac{1}{x}xdx=C$$
$$yx-\int dx=C$$
$$yx-x=C$$

معادلة برنولي التفاضلية الاعتيادية

المعادلة التفاضلية التالية $y' + P(x)y = Q(x).y^n$ حيث ان $p(x)$ و $Q(x)$ دوال للمتغير x.

تدعى بمعادلة برنولي او المعادلة التفاضلية الخطية الموسعة هي معادلة من الرتبة الاولى ولكنها ليست خطية لوجود y^n في الطرف الايمن ويمكن تحويلها الى معادلة خطية كما يلي.

$$Z = y^{1-n} \rightarrow (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}.\frac{dy}{dx}$$ نشتق Z بالنسبة الى x

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{n}{y^n}.\frac{dy}{dx} \qquad * \frac{y^n}{1-n}$$

$$\frac{y^n}{1-n}.\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}.\frac{dz}{dx} \rightarrow (3)$$

نعوض معادلة (٢) و (٣) في معادلة (١)

$$\frac{y^n}{1-n}.\frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x).y^n$$

بضرب الطرفين $\frac{1-\mathrm{n}}{y^n}$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{(1-n)P(x)}{y^n}.y = (1-n)Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{(1-n)P(x)}{y^{n-1}} = (1-n)Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x).Z = (1-n)Q(x)$$

معادلة تفاضلية خطية

وحلها العام هو $Ze^{\int(1-n)P(x)dx} = \int e^{\int(1-n)P(x)dx}.(1-n)Q(x)dx$

ثم نعوض عن Z بالحصول على الحل العام للمعادلة (١)

مثال/ جد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3y^3$

الحل/

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3y^3 \rightarrow (1)$$

$$Z = y^{1-n} = y^{-2} \rightarrow (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{y^3}\,\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{y^3}{-2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} \;\rightarrow (3)$$

نعوض معادلة (٢) و (٣) في معادلة (١)

$$\frac{y^3}{-2}\,.\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}y = x^3\,.\,y^3$$
$$\frac{dz}{dx} + \;-\frac{2}{x}\,.\,y^{-2} = -2x^3$$
$$\frac{dz}{dx} \pm \frac{2}{x}\,.Z = -2x^3$$

معادلة تفاضلية خطية وحلها العام هو

$$Ze^{\int -\frac{2}{x}dx} = \int e^{\int -\frac{2}{x}dx}\,.\,(-2x^3)dx$$
$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2Lnx} = e^{Lnx^{-2}} = x^{-2}$$
$$Z.\,x^{-2} = \int x^{-2}\,.\,(-2x^3)dx$$
$$(Z.\,x^{-2} = -x^2 + C)x^2$$
$$Z = -x^4 + Cx^2 \qquad ,Z = y^{-2}$$
$$y^{-2} = -x^4 + Cx^2$$
$$\frac{1}{y^2} = -x^4 + Cx^2$$
$$y^2 = \frac{1}{\sqrt{Cx^2 - x^4}}$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{Cx^2 - x^4}}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية و C ثابت اختياري

المعادلة التفاضلية التامة

التفاضلية التامة للدالة F(x,y) تكون على الصورة:

$$df(x,y) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

واذا كانت مساوية لصفر فأن:

$$df(x,y) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0 \quad \rightarrow (1)$$

تسمى معادلة تفاضلية تامة ونلاحظ ان:

$df(x,y) = 0$ اي ان حلها يكون $f(x,y) = C$ حيث C ثابت اختياري

فأذا كان لدينا المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$\frac{df}{dx} = M \quad \rightarrow (3)\,, \frac{df}{dy} = N \quad \rightarrow (4)$$

بتفاضل (٣) جزئياً بالنسبة الى بتفاضل (٣) جزئياً بالنسبة الى y ونفاضل (٤) جزئياً بالنسبة الى x نجد ان:

$$\frac{d^2f}{dxdy} = \frac{dm}{dy} \;,\; \frac{d^2f}{dxdy} = \frac{dn}{dx}$$

ومع اعتبار ان المشتقات الجزئية للدالتين N,M متصل فأن الشرط الضروري حتى تكون المعادلة (٢) تامة هو:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

ولحل المعادلة التامة (٢) نفترض دالة F(x,y) تحقق:

$$df(x,y) = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$$

فسيكون حلها $f(x,y) = C$ حيث C ثابت

وتحقق $\frac{df}{dx} = M \rightarrow (3)\;,\quad \frac{df}{dy} = N \rightarrow (4)$

بإجراء التكامل على المعادلة (٣) بالنسبة الى x.

$$f(x,y) = x_{\int M(x,y)dx + Q(y) \rightarrow (5)}$$

حيث نلاحظ ان Q(y) مقدار ثابت بالنسبة الى x ثم بتفاضل طرفي (٥) جزئياً بالنسبة الى x واستخدام المعادلة (٤) ينتج ان:

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}\; x_{\int M(x,y)dx + Q'(y) = N}$$

$$Q'(y) = N - \frac{d}{dy}\; x_{\int M(x,y)dx}$$

وبتكامل طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة الى y، نستنتج شكل الدالة $Q'(y)$ حيث:

$$Q(y)=y_{\int N(x,y)dy}-y_{\int\left[\frac{d}{dy}x_{\int M(x,y)dx}\right]dy}$$

وبالتعويض في معادلة (٥) نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة (٢) ويكون على الصورة

$$\int^{x}M(x,y)dx+\int^{y}N(x,y)dy-\int^{y}\left[\frac{d}{dy}\int^{x}M(x,y)dx\right]dy=C$$

مثال/ اوجد حل المعادلة:

$$(6x^2+4xy+y^2)dx+(2x^2+2xy-3y^2)dy=0$$

الحل/ نفترض ان:

$$M(x,y)=6x^2+4xy+y^2$$
$$N(x,y)=2x^2+2xy-3y^2$$

نوجد

$$\frac{dM}{dy}=4x+2y\quad,\quad\frac{dN}{dx}=4x+2y$$

اي ان $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$

$$f(x,y)=\int^{x}M(x,y)dx+Q(y)$$
$$=2x^3+2x^2y+xy^2+Q(y)\ \to(1)$$
$$\frac{df}{dy}=2x^2+2xy+Q'(y)=N(x,y)$$
$$Q'(y)=2x^2+2xy-3y^2-2x^2-2xy$$
$$Q'(y)=-3y^2$$
$$Q(y)=-y^3$$

نعوض في معادلة (١)

$$2x^3+2x^2y+xy^2-y^3=C$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة.

ملاحظة/ يمكن حل المعادلة التفاضلية التامة باستخدام القانون:

$$\int^{x}Mdx+\int^{y}Ndy-\int^{x}\left[\frac{d}{dx}\int^{y}Ndy\right]dx=C$$

(٥-١) المعادلات التفاضلية الاعتيادية من رتب اعلى

الصيغة العامة لها هي:

$$F(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)})=0$$

وهناك عدة طرق لحل هذا النوع من المعادلات

تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية الاعتيادية

١- في حالة ظهور المتغير x وعدم ظهور المتغير y.

نعوض $P = y', P' = y''$ فتصبح بالشكل الاتي:

$$F(x, P, P') = 0$$

وهي معادلة من الرتبة الاولى يمكن حلها حسب جدول المعادلات من الرتبة الاولى.

$$xy'' = y'$$
$$xP' = P$$
$$x\frac{dP}{dx} = P \ \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{dx}{x} + C$$
$$LnP = Lnx + C$$
$$P = ax \rightarrow y' = ax \rightarrow y = a\frac{x^2}{2} + b$$

٢- في حالة ظهور المتغير y وعدم ظهور المتغير x.

نعوض $P = y', y'' = P\frac{dP}{dy}$ فتصبح بالشكل الاتي:

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{y}, \mathrm{P}, \mathrm{P}\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dy}}\right) = 0$$

وهي معادلة من الرتبة الاولى يمكن حلها حسب جدول المعادلات من الرتبة الاولى.

$$yy'' = y'$$
$$yP\frac{dP}{dy} = P$$
$$y\frac{dP}{dy} = 1 \rightarrow dP = \frac{dy}{y}$$
$$\int dP = \int \frac{dy}{y} + C$$
$$P = Lny + C$$
$$P = ay \rightarrow y' = ay \rightarrow dy = aydx$$
$$\frac{dy}{y} = adx \rightarrow Lny = ax + b$$

مثال/ حل المعادلة التفاضلية الاتية: $xy''' - 2y'' = 0$

الحل/ نفرض $q' = y''', q = y''$ فتصبح المعادلة التفاضلية

$$xq' - 29 = 0$$

وحلها $1 = ax^2$ (طريقة فصل المتغيرات) حيث a ثابت اختياري.

نرجع قيمة $y'' = q$ فينتج $y'' = ax^2$

ومنها $y = \frac{ax^4}{12} + C_1x + C^2$ وهو الحل المطلوب.

ملاحظة/ اذا لم يظهر y' او (x,y) نستخدم الحالة الاولى.

معادلات تفاضلية خطية متجانسة ذات المعاملات الثابتة

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة هي:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت اختيارية.

الحل العام لهذا النوع من المعادلات سوف يكون بالصيغة الاسية اي $e^{\lambda x}$ حيث λ جذر المعادلة المميزة:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

وتوجد هناك عدة حالات لحل جذور هذه المعادلة وهي:

١) اذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ (اعداداً حقيقية)

فأن الحل العام $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$

٢) اذا كانت جميع الجذور الحقيقية وأحد الجذور مكرر k من المرات $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots =$

$\lambda_k, \lambda_k \neq \cdots \neq \lambda_n$ فأن الحل العام يكون

$$y = [C_1 + C_2 + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1}] e^{\lambda \mathrm{x}} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \cdots + C_n x^{\lambda_n x}$$

٣) اذا كانت الجذور

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a + iB$$

فإنه يوجد

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mathrm{a} - \mathrm{iB}$$

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$y = e^{ax}[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos Bx\,(C_4 + C_5 x + C_6 x^2)\sin Bx]$$

مثال/ اوجد الحل العام للمعادلة $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحل/ نضع المعادلة على صورة $(D^2 - 4D + 4)y = 0$

$\therefore$ المعادلة المساعدة $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

ويكون جذراها $\lambda = 2,2$

اي ان الحل العام $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

مثال/ اوجد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\,\frac{d^2y}{dx^2}-3\,\frac{dy}{dx}=0 \quad , \qquad y(0)=4\,,y'(0)=8\,,y''(0)=-4$$

الحل/ نضع المعادلة على الصورة $(D^3+2D^2-3D)y=0$

المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3+2\lambda^2-3\lambda=0$$
$$\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$
$$\lambda=0\ ,1\,,-3$$

ويكون الحل

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-3x}\ \rightarrow(1)$$

ولأيجاد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية، نوجد

$$y'=C_2e^x-3C_3e^{-3x}\rightarrow(2)$$

$$y''=C_1e^x+9C_2e^{-3x}\ \rightarrow(3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية في المعادلات (٣)، (٢)، (١)

$$4=C_1+C_2+C_3+\cdots\ \rightarrow(4) \qquad \Leftarrow(1)\quad y(0)=4$$
$$8=C_2-3C_3\rightarrow(5) \qquad \Leftarrow(2)\quad y'(0)=2$$
$$C_2+9C_3\rightarrow(6) \qquad \Leftarrow(3)\quad y''(0)=-4$$

بحل المعادلات (٦)، (٥)، (٤)

$$C_1=0\,,C_2=5\,,C_3=-1$$

ويكون الحل على الصورة $y=5e^x-e^{-3x}$

مثال/ اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D-2)^3(D+3)^2(D-4)y=0$$

تكون المعادلة المساعدة

$$(\lambda-2)^3(\lambda+3)^2(\lambda-4)=0$$

ويكون الحل العام

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{2x}+(C_4+C_5x)e^{-3x}+C_6e^{2x}$$

مثال/ جد الحل العام للمعادلة $(D-1)(D^2+2D+2)y=0$

الحل/

تكون المعادلة المساعدة

$$(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2)=0$$

$$\lambda_1=1 \quad , \qquad \lambda_2=-1+i \qquad , \qquad \lambda_3=-1-i$$

ويكون الحل العام

$$y = C_1 e^{x} + e^{-x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$$

معادلات تفاضلية خطية غير متجانسة ذات المعادلات الثابتة (٣-٥-٢)

تكون المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة n بالصورة

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \ \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \rightarrow (1)$$

او بالصورة

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

حيث ان a_0, a_1, a_{n-1}, a_n ثوابت و $a_0 \neq 0$.

لحل هذه المعادلة المتجانسة نوجد اولاً حل المعادلة المتجانسة التي سبق ذكرها ويسمى هذه المعادلة المتجانسة نوجد اولاً حل المعادلة المتجانسة التي سبق ذكرها ويسمى $y=yc$ ثم نوجد ثانياً الحل الخاص $y = y_p$ ويكون الحل العام لها على الصورة $y = y_c + y_p$.

طريقة ايجاد الحل الخاص (y_p) عن طريق المؤثر التفاضلي العكسي

اذا كان

$$Q(D) = (\lambda_{a_0}^{n} + \lambda_{a_1}^{n-1} + \cdots + a_n$$

فأن

$$y_p = \frac{1}{Q(D)} \, . f(x)$$

حيث $\frac{1}{Q(D)}$ هو المؤثر التفاضلي العكسي.

وينطبق عليه كل القوانين الخاصة بعملية التكامل

وعلى حسب نوع الدالة F(x) يكون الحل الخاص:-

الحالة الاولى

اذا كانت F(x) متعددة الحدود اي ان

$$f(x) = C_1 X^n + o_2 x^{n-1} + C_k x^k + \cdots$$

نفرض ان الحل الخاص يكون بالشكل $y_p = a x^n + b x^{n-1} + C x^k$

وتكون الفرضية حسب درجة متعددة الحدود وبعد الفرضية نشتق حسب رتبة المعادلة المعطاة ونعوض في المعادلة الأصلية ومن ثم نساوي معاملات قوى x الموجودة في الطرفين الايمن والايسر لأيجاد قيم الثوابت a, b, c, …,… ثم نعوض هذه الثوابت في الفرضية الموجودة.

الحالة الثانية

اذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = e^{ax}$

يكون الحل الخاص

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{\phi(a)}$$

الحالة الثالثة

$$f(x) = \begin{cases} \sin ax \\ \cos ax \end{cases}$$

فأن

$$y_p = \frac{1}{\phi(D)} \begin{cases} \sin ax \\ \cos ax \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{\phi(D^2)} \begin{cases} \sin ax \\ \cos ax \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{\phi(-a^2)} \begin{cases} \sin ax \\ \cos ax \end{cases}$$

الحالة الرابعة

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{ax} . V(x)$$

$$\phi(a) = 0 \qquad \text{أو}$$

فأن $y_p = \frac{e^{ax}}{\phi(D+A)} . V(x)$

مثال/ جد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' = x^2 - 1$

الحل/ $y_c = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

$$y_p = aX^2 + bx + C$$

$$y' = 2ax + b \qquad , \qquad y'' = 2a$$

$$2a + 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + C) = x^2 - 1$$

$$2a + 4ax + 2b + 2ax^2 + 2bx + 2C = x^2 - 1$$
$$2ax^2 + (4a + 2b)x + 2a + 2b + 2c = x^2 - 1$$
$$2a = 1 \;\Rightarrow\; a\frac{1}{2}$$
$$4a + 2b = 0 \;\Rightarrow\; 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2b = 0 \;\Rightarrow\; b = -1$$
$$2a + 2b + 2C = -1 \;\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2(-1) + 2C = -1$$
$$C = 0$$
$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - x$$
$$y = y_c + y_p$$
$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}\, x^2 - x$$

مثال/ اوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$(D^2 + 2D - 3)y = 42\, e^{4x}$$
$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$
$$y_p = \frac{1}{\phi(D)}\, .\, f(x)$$
$$y_p = \frac{1}{\phi(D)}\, .\, 42e^{4x}$$
$$y_p = \frac{1}{(D+3)(D-1)}\, .\, 42e^{4x}$$
$$y_p = \frac{42e^{4x}}{(4+3)(4-1)}$$
$$y_p = 2e^{4x}$$
$$y = y_c + y_p$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 2e^{4x}$$

الفصل الثاني

٢-١ جمل المعادلات التفاضلية العادية الاعتيادية

(Normal systems of ordinary differential equations)

إذا كانت $x_1, x_2, ..., x_n$ توابع للمتحول المستقل t فإن نظام المعادلات:

$$\left.\begin{array}{l} F_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, ..., \dfrac{dx_n}{dt}\right) = 0 \\ F_2\left(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, ..., \dfrac{dx_n}{dt}\right) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ F_n\left(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt_{\ 2}}, ..., \dfrac{dx_n}{dt}\right) = 0 \end{array}\right\} (١,٢)$$

تسمى نظام معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الأولى.

إذا كانت المعادلات المشكلة للنظام (2.1) قابلة للحل بالنسبة للمشتقات، أي إذا أمكن كتابة نظام بالشكل:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}\right\} (٢,٢)$$

عندئذٍ تسمى نظام المعادلات التفاضلية (2.2) نظام معادلات تفاضلية الاعتيادية.

إن رتبة نظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية تساوي عدد المعادلات المشكلة لها.

حل نظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية هو مجموعة التوابع القابلة للاشتقاق $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ التي إذا عُوضت في معادلات نظام حولت جميع المعادلات إلى مطابقات. الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية هو الحل الذي يحوي ثوابت اختيارية عددها يساوي رتبة نظام . حل نظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية الذي ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً عددية يسمى حلاً خاصاً للنظام . وأي حل للنظام لا يمكن الحصول عليه من الحل العام يسمى حلاً شاذاً.

2-١-١ طريقة حل جمل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

(Method of solution normal systems)

لتكن لدينا نظام المعادلات التفاضلية الاعتيادية التي تحوي n معادلة:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}\right\} (٢-٣)$$

لتعيين حل هذه نظام نشتق إحدى معادلاتها ولتكن الأولى مثلاً $(n-1)$ مرة متتالية وفي كل مرة نعوض عن $\dfrac{dx_i}{dt}$ من أجل $(i=2,3,...,n)$ بعبارتها من باقي معادلات نظام (4.3) فنحصل على نظام المكافئة التالية:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=g_1(t,x_1,x_2,...,x_n)\\&\frac{d^2x_1}{dt^2}=g_2(t,x_1,x_2,...,x_n)\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&\frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{n-1}}=g_{n-1}(t,x_1,x_2,...,x_n)\\&\frac{d^{(n)}x_1}{dt^n}=g_n(t,x_1,x_2,...,x_n)\end{aligned}\right\}(٤-٢)$$

بتعيين عبارة كل من $x_2,x_3,...,x_n$ من الـ$(n-1)$ معادلة الأولى في نظام الناتجة (6.4) وتعويضها في المعادلة الأخيرة من هذه نظام نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة n بالنسبة للتابع $x_1(t)$ ولتكن:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}=F\left(t,x_1,\frac{dx_1}{dt},...,\frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{n-1}}\right)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على عبارة $x_1(t)$ ومن ثم نحصل على باقي المتغيرات المجهولة في نظام $x_2(t),x_3(t),...,x_n(t)$.

مثال (٦-١-٢): عيّن، الحل العام لنظام المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+y\\\dfrac{dy}{dt}=-x+ay\end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ t فنحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$$

بالتعويض عن $\dfrac{dy}{dt}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a\frac{dx}{dt}-x+ay$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئ التالية:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+y\\\dfrac{d^2x}{dt^2}=a\dfrac{dx}{dt}-x+ay\end{cases}$$

نعيّن عبارة y من المعادلة الأولى حيث أن:

$$y=\frac{dx}{dt}-ax$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2a\frac{dx}{dt}+(1+a^2)x=0$$

الحل العام لهذه المعادلة هو:

$$x(t)=e^{at}(c_1\cos t+c_2\sin t)$$

بتعويض هذا الحل في عبارة y نحصل على:

$$y(t)=\frac{dx}{dt}-ax=e^{at}(-c_1\sin t+c_2\cos t)$$

لاحظ وجود ثابتين كيفيين في حل نظام .

مثال (٦-١-٢): عيّن الحل العام لنظام المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y^2+\sin t\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{2y}\end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ t فنحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2y\frac{dy}{dt}+\cos t$$

بالتعويض عن $\dfrac{dy}{dt}$ من المعادلة الثانية في نظام تصبح المعادلة الجديدة:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2y\frac{x}{2y}+\cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة، حلها العام هو:

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$$

نعين عبارة $y(t)$ من المعادلة الأولى للنظام الأصلية:

$$y^2(t)=\frac{dx}{dt}-\sin t$$

$$=c_1e^t-c_2e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t$$

ملاحظة (٦-١-٢): وجدنا في الفقرة السابقة أنه لتعيين معادلة تفاضلية بالنسبة للمجهول x_1 نشتق المعادلة الأولى $(n-1)$ مرة ثم نعيّن عبارة كل من $x_2, x_3, ..., x_n$ من الـ$(n-1)$ معادلة الأولى في نظام (6.4) ونعوضها في المعادلة الأخيرة من هذه نظام ، إلا أنه يكون بالإمكان أحياناً إيجاد معادلة تفاضلية عادية من رتبة أقل من $(n-1)$ باشتقاق إحدى المعادلات عدد من المرات أقل من $(n-1)$، وبحل المعادلة الناتجة نحصل على أحد التوابع المجهولة في نظام .

مثال (٦-١-٣): عيّن حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+z\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=x+y\end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة ونبدل $\dfrac{dy}{dt}$ و $\dfrac{dz}{dt}$ بعبارتهما من المعادلتين الثانية والثالثة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$
$$= (x+z) + (x+y)$$
$$= 2x + y + z$$

نعين عبارة y من المعادلة الأولى:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$
$$= 2x + \left(\frac{dx}{dt} - z\right) + z$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة، حلها العام هو:

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$$

لتعيين عبارة $y(t)$ لدينا من المعادلة الأولى (مثلاً):

$$y = \frac{dx}{dt} - z$$
$$= -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} - z$$

نعوض في المعادلة الثالثة من نظام المعطاة فنحصل على:

$$\frac{dz}{dt} + z = 3c_2e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى حلها العام هو:

$$z(t) = c_3e^{-t} + c_2e^{2t}$$

وبالتالي:

$$y(t) = -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2e^{2t}$$

٦–٢ جمل المعادلات التفاضلية المتماثلة
(Symmetric systems of differential equations)

تسمى نظام المعادلات التفاضلية متماثلة إذا كانت من الشكل:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \quad (6.5)$$

يمكن اعتبار أي من التوابع $x_1, x_2, ..., x_n$ متحولاً مستقلاً والبقية توابع له. لذا نستطيع القول إن هذه نظام المعادلات التفاضلية المتماثلة (6.5) تكافئ نظام معادلات تفاضلية الاعتيادية مؤلفة من $(n-1)$ معادلة. فمثلاً إذا اعتبرنا أن x_1 متحول مستقل فمن النسبتين الأولى والثانية نحصل على المعادلة:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)}{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

ومن النسبتين الأولى والثالثة نحصل على المعادلة:

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{f_3(x_1, x_2, ..., x_n)}{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

وهكذا...

ومن النسبتين الأولى والأخيرة نحصل على المعادلة:

$$\frac{dx_n}{dx_1}=\frac{f_n(x_1,x_2,...,x_n)}{f_1(x_1,x_2,...,x_n)}$$

لذا يمكن استخدام الطريقة الآنفة الذكر في حل نظام المعادلات التفاضلية المتماثلة، إلا أن هذه الطريقة تكون معقدة في أغلب الأحيان.

يمكن حل نظام معادلات تفاضلية متماثلة بشكل مختلف. بما أن نظام المعادلات التفاضلية المتماثلة (6.5) تكافئ نظام معادلات تفاضلية الاعتيادية عادية مؤلفة من $(n-1)$ معادلة، فإن حلها العام يتألف من $(n-1)$ علاقة بين متحولات نظام $(x_1,x_2,...,x_n)$ و $(n-1)$ ثابت كيفي، تسمى هذه العلاقات تكاملات أولية. يتعين كل تكامل أولي من خلال إيجاد نسبتين من نظام بحيث يمكن حل المعادلة التفاضلية الناتجة عنهما مباشرة أو بعد حذف العوامل المشتركة بينهما.

ملاحظة (٦-٢-١): يمكن تعيين عدد غير منته من النسب المساعدة لتعيين التكاملات الأولية بالاعتماد على الخاصة الأساسية التالية للتناسب والتي تنص على أنه إذا كان:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

فمن أجل أي $k_1,k_2,...k_n$ (ثوابت أو متحولات) يكون:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1\,a_1+k_2\,a_2+\cdots+k_n\,a_n}{k_1\,b_1+k_2\,b_2+\cdots+k_n\,b_n}$$

حيث أنه يمكن تطبيق هذه الخاصة على جميع النسب أو على بعضها. وإذا حصلنا نتيجة لتطبيق هذه الخاصة على نسبة مقامها صفر نضع بسط النسبة مساوياً الصفر.

مثال (٦-٢-١): عيّن الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{2z-y}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

الحل: من النسبتين الثانية والثالثة لدينا:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

نعين تكاملاً أولياً أول للنظام وذلك بالمكاملة المباشرة وهو:

$$\frac{y}{z}=c_1 \Leftrightarrow y=c_1z$$

بضرب بسط النسبة الثالثة ومقامها بـ/ 2 / وبسط النسبة الثانية ومقامها بـ/-1/ والجمع نحصل على:

$$\frac{dx}{2z-y}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{2dz-dy}{2z-y}$$

فنجد من النسبتين الأولى والأخيرة:

$$\frac{dx}{2z-y}=\frac{2dz-dy}{2z-y}$$

من تساوي مقامي النسبتين المتساويتين ينتج تساوي بسطي النسبتين:

$$dx=2dz-dy$$

$$x=2z-y+c_2$$

$$x+y-2z=c_2$$

وهو التكامل الأولي الثاني للنظام . أي أن الحل العام ممثل بالمعادلتين:

$$\begin{cases} y=c_1z \\ x+y-2z=c_2 \end{cases}$$

مثال (٦-٢-٢): عيّن الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{y^2-x^2-z^2}=\frac{dz}{2yz}$$

الحل: من النسبتين الأولى والثالثة لدينا:

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dz}{2yz}$$

بعد الاختصار على العامل المشترك $(2y)$ بين النسبتين نحصل على تكامل أولي أول:

$$x=c_1z$$

بضرب بسط النسب السابقة ومقامها وعلى الترتيب بـ $2x,2y,2z$ والجمع، وأخذ النسبة الناتجة مع النسبة الثالثة نحصل على:

$$\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{2y(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dz}{2yz}$$

وبعد الاختصار على $2y$ نحصل على:

$$\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z}$$

بمكاملة هذه المعادلة نحصل على تكامل أولي ثانٍ:

$$x^2+y^2+z^2=c_2z$$

أي أن الحل العام ممثل بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x=c_1z \\ x^2+y^2+z^2=c_2z \end{cases}$$

مثال (٦-٢-٣): عيّن الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

الحل: لا توجد نسبتان يمكن تعيين تكامل أولي منهما مباشرة، لذا نشكل نسبة مساعدة:

$$\frac{dx+dy}{x(y-z)+y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\frac{d(x+y)}{z(y-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

وبالتالي نحصل على تكامل أولي أول هو:

$$x+y+z=c_1$$

نشكل نسبة مساعدة أخرى:

$$\frac{ydx+xdy}{xy(y-z)+xy(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\frac{d(x\cdot y)}{x\cdot y}=-\frac{dz}{z}$$

وبالتالي نحصل على تكامل أولي ثانٍ هو:

$$x\cdot y\cdot z=c_2$$

الحل العام للنظام معطى بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x+y+z=c_1 \\ x\cdot y\cdot z=c_2 \end{cases}$$

٦-٣ جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابت

(System of linear differential equations with constant coefficients)

الشكل العام لنظام المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة هو:

$$(6.6)\left.\begin{array}{l} a_{11}\dfrac{d^{k_1}y_1}{dx^{k_1}}+\cdots+a_{1n}\dfrac{d^{k_n}y_n}{dx^{k_n}}+b_{11}y_1+\cdots+b_{1n}y_n=h_1(x) \\ a_{21}\dfrac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}+\cdots+a_{2n}\dfrac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}+b_{21}y_1+\cdots+b_{2n}y_n=h_2(x) \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}\dfrac{d^{s_1}y_1}{dx^{s_1}}+\cdots+a_{nn}\dfrac{d^{s_n}y_n}{dx^{s_n}}+b_{n1}y_1+\cdots+b_{nn}y_n=h_n(x) \end{array}\right\}$$

حيث أن $a_{11},a_{12},...a_{nn},...,b_{nn}$ أعداد ثابتة (هل هذه نظام الاعتيادية؟).

تحل جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة بأكثر من طريقة.

بما أن دراسة نظام مؤلفة من n معادلة هي تعميم لدراسة نظام مؤلفة من معادلتين فإننا نقصر دراستنا على نظام مؤلفة من معادلتين ونترك التعميم للقارئ.

٦-٣-١ طريقة الحذف (Canceling method)

لتكن لدينا نظام المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة التالية:

$$(6.7)\left.\begin{array}{l} a_1\dfrac{d^{n_1}x}{dt^{n_1}}+b_1\dfrac{d^{m_1}y}{dt^{m_1}}+c_1x+d_1y=h_1(t) \\ a_2\dfrac{d^{n_2}x}{dt^{n_2}}+b_2\dfrac{d^{m_2}y}{dt^{m_2}}+c_2x+d_2y=h_2(t) \end{array}\right\}$$

حيث أن التابعين المجهولين هما $x(t)$ و $y(t)$ والمتحول المستقل هو t. إذا وضعنا $D\equiv\dfrac{d}{dt}$ في نظام نحصل على نظام من الشكل:

$$(6.8)\left.\begin{array}{l} f_1(D)x+g_1(D)y=h_1(t) \\ f_2(D)x+g_2(D)y=h_2(t) \end{array}\right\}$$

وبالاعتماد على طريقة الحذف نحصل على معادلة تفاضلية بمجهول واحد. نحل المعادلة التفاضلية الناتجة ثم نستفيد من حلها في تعيين التابع المجهول الآخر للنظام علماً أن عدد الثوابت الاختيارية في الحل العام يساوي لدرجة كثيرة الحدود الناتجة عن محدد مصفوفة الأمثال التالي:

$$F(D)=\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$$

وإذا نتج عدد من الثوابت أكثر من ذلك فإنه يوجد ارتباط بين بعض الثوابت أو كلها. يتعيّن الارتباط بين الثوابت بتعويض الحل العام في بعض معادلات نظام أو كلها.

مثال (٦-٣-١): حل نظام التالية:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-x=2t+1$$

$$2\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}+x=t$$

الحل: نكتب نظام بدلالة المؤثر التفاضلي، $D \equiv \frac{d}{dt}$ فنحصل على:

$$(D-1)x + Dy = 2t+1$$
$$(2D+1)x + 2Dy = t$$

بضرب المعادلة الأولى بـ (-2) وجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة الثانية نحصل على المعادلة:

$$-2(D-1)x + (2D+1)x = -3t-2$$

التي ينتج عنها:

$$3x = -3t-2 \Rightarrow x = -t - \frac{2}{3}$$

نعوض في المعادلة الثانية من نظام المعطاة فنحصل على:

$$2(-1) + 2\frac{dy}{dt} - t - \frac{2}{3} = t \Rightarrow 2\frac{dy}{dt} = 2t + \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t + \frac{4}{3} \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + c$$

لا حظ أن حل نظام يحوي ثابتاً كيفياً واحداً وهو درجة $D \equiv \frac{d}{dt}$ نفسها في منشور المحدد:

$$\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix} = -3D$$

مثال (٦-٣-٢): حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 3x + 4y = 2\sin t$$
$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x - y = \cos t$$

الحل: نكتب نظام المعطاة بدلالة المؤثر التفاضلي $D \equiv \frac{d}{dt}$ فنحصل على:

$$(D-3)x + 2(D+2)y = 2\sin t$$
$$2(D+1)x + (D-1)y = \cos t$$

نؤثر على المعادلة الأولى بـ $(D-1)$ ونؤثر على الثانية بـ $(2D+4)$ فنحصل على:

$$\begin{cases} (D-1)(D-3)x + 2(D-1)(D+2)y = 2\cos t - 2\sin t \\ 4(D+2)(D+1)x + 2(D+2)(D-1)y = -2\sin t + 4\cos t \end{cases}$$

لأن:

$$2(D+2)\cos t = -2\sin t + 4\cos t \quad \text{و} \quad (D-1)(2\sin t) = 2\cos t - 2\sin t$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية في هذه نظام نحصل على المعادلة:

$$-(D^2-4D+3)x + 4(D^2+3D+2)x = 2\cos t$$

التي تكتب بالشكل:

$$3\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 5x = 2\cos t$$

لتعيين حل المعادلة الناتجة نعين أولاً x_h . المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة هي:

$$3k^2 + 16k + 5 = 0$$

ولها جذران حقيقيان هما $k_1 = -5$ و $k_2 = -\frac{1}{3}$ وبالتالي:

$$x_h(t) = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1e^{-5t} + c_2e^{-\frac{1}{3}t}$$

لتعيين حل خاص $x_p(t)$ للمعادلة غير المتجانسة لدينا:

$$x_p(t) = \frac{1}{3D^2 + 16D + 5}(2\cos t)$$
$$= \frac{1}{3(-1) + 16D + 5}(2\cos t)$$
$$= \frac{1}{8D+1}(\cos t)$$
$$= \frac{8D-1}{64D^2 - 1}(\cos t)$$
$$= \frac{8(\cos t)' - \cos t}{64(-1) - 1}$$
$$= \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t)$$

وبالتالي:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$
$$= c_1e^{-5t} + c_2e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t)$$

نعين عبارة $y(t)$ من إحدى معادلتي نظام ، فمن المعادلة الثانية مثلاً لدينا:

$$\frac{dy}{dt} - y = \cos t - 2\frac{dx}{dt} - 2x$$

$$\frac{dy}{dt} - y = \cos t - 2\left(-5c_1e^{-5t} - \frac{1}{3}c_2e^{\frac{-1}{3}t} + \frac{8}{65}\cos t - \frac{1}{65}\sin t\right)$$
$$-2c_1e^{-5t} - 2c_2e^{-\frac{1}{3}t} - \frac{2}{65}(8\sin t + \cos t)$$

أي أن:

$$\frac{dy}{dt} - y = 8c_1e^{-5t} - \frac{4}{3}c_2e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{47}{65}\cos t - \frac{14}{65}\sin t$$

وهذه معادلة خطية من الرتبة الأولى حلها العام هو:

$$y(t) = e^t\left[\int e^{-t}\left(8c_1e^{-5t} - \frac{4}{3}c_2e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{47}{65}\cos t - \frac{14}{65}\sin t\right)dt + c_3\right]$$

أي أن:

$$y(t) = 8c_1e^t\int e^{-6t}dt - \frac{4}{3}c_2e^t\int e^{-\frac{4}{3}t}dt + \frac{47}{65}e^t\int e^{-t}\cos t dt$$
$$-\frac{14}{65}e^t\int e^{-t}\sin t dt + c_3e^t$$

وبإنجاز التكاملات نحصل على:

$$y(t)=8c_1e^t\left(\frac{-e^{-6t}}{6}\right)-\frac{4}{3}c_2e^t\left[\frac{-3e^{-\frac{4}{3}t}}{4}\right]+\frac{47}{65}e^t\left[\frac{e^{-t}}{2}(-\cos t+\sin t)\right]$$
$$-\frac{14}{65}e^t\left[\frac{1}{2}e^{-t}(-\sin t-\cos t)\right]+c_3e^t$$
$$=-\frac{4}{3}c_1e^{-5t}+c_2e^{-\frac{1}{3}t}-\frac{33}{130}\cos t+\frac{61}{130}\sin t+c_3e^t$$

وبما أن محدد مصفوفة أمثال نظام هو:

$$\begin{vmatrix} D-3 & D+2 \\ 2D+4 & D-1 \end{vmatrix}=-3D^2-16D-5$$

ومرتبته $/2/$ فإن الحل العام يجب يحوي ثابتين كيفيين فقط، بتعويض عبارتي $x(t)$ و $y(t)$ في إحدى معادلتي نظام نجد أن $c_3=0$ ومنه:

$$y(t)=-\frac{4}{3}c_1e^{-5t}+c_2e^{-\frac{1}{3}t}-\frac{33}{130}\cos t+\frac{61}{130}\sin t$$

٦-٣-٢ طريقة كرامر (Crammer's method)

لتكن لدينا نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} f_1(D)x+g_1(D)y=h_1(t) \\ f_2(D)x+g_2(D)y=h_2(t) \end{cases}$$

فإن محدد مصفوفة أمثال هذه نظام هو:

$$F(D)=\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$$

بتطبيق قاعدة كرامر المعروفة لنظام المعادلات الجبرية الخطية على نظام المعادلات الخطية المعطاة نحصل على المعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$F(D)x=\begin{vmatrix} h_1(t) & g_1(D) \\ h_2(t) & g_2(D) \end{vmatrix}=g_2(D)(h_1(t))-g_1(D)(h_2(t)) \quad (6.9)$$
$$F(D)y=\begin{vmatrix} f_1(D) & h_1(t) \\ f_2(D) & h_2(t) \end{vmatrix}=f_1(D)(h_2(t))-f_2(D)(h_1(t)) \quad (6.10)$$

بعد تطبيق المؤثرات على التوابع في الأطراف اليمنى من المعادلتين (6.8) و(6.9) والاختصار، يمكن كتابة هاتين المعادلتين بالشكل:

$$F(D)x=\varphi(t) \quad (6.11)$$
$$F(D)y=\psi(t) \quad (6.12)$$

لكلا المعادلتين (6.11) و (6.12) المعادلة المميزة نفسها ودرجتها درجة كثيرة الحدود $F(D)$ نفسها.

نوجد الحل العام لكل معادلة المعادلتين (6.11) و (6.12) فنحصل على عدد من الثوابت الاختيارية يفوق درجة كثيرة الحدود $F(D)$. بتعويض الحل في بعض أو كل معادلات نظام الأصلية نوجد الارتباط بين الثوابت الاختيارية الناتجة.

مثال (٦-٣-٣): أوجد الحل العام لنظام المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 5\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}+4x-y=e^{-t} \\ \frac{dx}{dt}+8x-3y=5e^{-x} \end{cases}$$

الحل: نكتب نظام بالشكل:

$$\begin{cases}(5D+4)x-(2D+1)y=e^{-t}\\(D+8)x-3y=5e^{-t}\end{cases}$$

محدد مصفوفة أمثال نظام الناتجة هو:

$$F(D)=\begin{vmatrix}5D+4 & -2D-1\\ D+8 & -3\end{vmatrix}=2(D^2+D-2)$$

أي أن الحل العام يجب أن يحوي ثابتين كيفيين فقط.

من قاعدة كرامر لدينا:

$$F(D)x=\begin{vmatrix}e^{-t} & -2D-1\\ 5e^{-t} & -3\end{vmatrix}=-3e^{-t}-10e^{-t}+5e^{-t}=-8e^{-t}$$

$$(D^2+D-2)x=-4e^{-t}$$

المعادلة التفاضلية الناتجة خطية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة، حلها العام هو:

$$x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}+2e^{-t}$$

حيث أن c_1 , c_2 ثابتان كيفيان.

ومن قاعدة كرامر لدينا أيضاً:

$$F(D)y=\begin{vmatrix}5D+4 & e^{-t}\\ D+8 & 5e^{-t}\end{vmatrix}=-25e^{-t}+20e^{-t}+e^{-t}-8e^{-t}=-12e^{-t}$$

$$(D^2+D-2)y=-6e^{-t}$$

المعادلة التفاضلية الناتجة خطية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة، حلها العام هو:

$$y(t)=c_3e^{-2t}+c_4e^{t}+3e^{-t}$$

حيث أن c_3 , c_4 ثابتان كيفيان.

لإيجاد العلاقة بين الثوابت الاختيارية نعوض عبارتي $x(t)$ و $y(t)$ في المعادلة الثانية من نظام فنحصل على:

$$-2c_1e^{-2t}+c_2e^{t}-2e^{-t}+8c_1e^{-2t}+8c_2e^{t}$$
$$+16e^{-t}-3c_3e^{-2t}-3c_4e^{t}-9e^{-t}\equiv 5e^{-t}$$

$$(6c_1-3c_3)e^{-2t}+(9c_2-3c_4)e^{t}\equiv 0$$

وبالتالي:

$$\left.\begin{matrix}6c_1-3c_3=0\\9c_2-3c_4=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow c_3=2c_1\ ,\ c_4=3c_2$$

أي أن الحل العام للنظام هو:

$$x(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}+2e^{-t}$$
$$y(t)=2c_1e^{-2t}+3c_2e^{t}+3e^{-t}$$

توجد طرائق أخرى لحل جمل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة لن نأتي على ذكرها هنا.

تمارين محلولة

١) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}z'+2z+y=0\\y'+z+2y=0\end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$$

بالتعويض عن $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}-z-2y=0$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}+2z+y=0\\ \dfrac{d^2z}{dx^2}+2\dfrac{dz}{dx}-z-2y=0\end{cases}$$

نعيّن عبارة y من المعادلة الأولى حيث أن:

$$y=-\frac{dz}{dx}-2z$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}-z-2\left(-\frac{dz}{dx}-2z\right)=0$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+4\frac{dz}{dx}+3z=0$$

الحل العام للمعادلة الناتجة هو:

$$z(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}$$

بتعويض هذا الحل في عبارة y نحصل على:

$$\begin{aligned}y(x)&=-\frac{dz}{dx}-2z\\&=3c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}-2(c_1e^{-3x}+c_2e^{-x})\\&=c_1e^{-3x}-c_2e^{-x}\end{aligned}$$

٢) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}z'+z+5y=0\\ 2z'-y'+12y=0\end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+5\frac{dy}{dx}=0$$

بالتعويض عن $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+10\frac{dz}{dx}+60y=0$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx}+z+5y=0 \\ \dfrac{d^2z}{dx^2}+11\dfrac{dz}{dx}+60y=0 \end{cases}$$

نعيّن عبارة y من المعادلة الأولى حيث أن:

$$y=\frac{-\dfrac{dz}{dx}-z}{5}$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+11\frac{dz}{dx}+12\left(-\frac{dz}{dx}-z\right)=0$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}-12z=0$$

الحل العام للمعادلة الناتجة هو:

$$z(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{4x}$$

بتعويض هذا الحل في عبارة y نحصل على:

$$y(x)=\frac{-\dfrac{dz}{dx}-z}{5}$$

$$=-\frac{-3c_1e^{-3x}+4c_2e^{-x}+(c_1e^{-3x}+c_2e^{4x})}{5}$$

$$=\frac{2}{5}c_1e^{-3x}-c_2e^{4x}$$

٣) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x \\ \dfrac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x \end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=\cos x$$

بالتعويض عن $\dfrac{dz}{dx}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4y+2z+\cos x=\cos x$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+4y+2z=0 \end{cases}$$

نعيّن عبارة z من المعادلة الأولى حيث أن:

$$z = -\frac{dy}{dx} - 2y + \sin x$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y - 2\frac{dy}{dx} - 4y + 2\sin x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\sin x$$

الحل العام للمعادلة الناتجة هو:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + 2\sin x$$

بتعويض هذا الحل في عبارة z نحصل على:

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{dy}{dx} - 2y + \sin x \\ &= -c_2 - 2\cos x - 2c_1 - 2c_2 x - 4\sin x + \sin x \\ &= -2c_1 - c_2 - 2c_2 x - 3\sin x - 2\cos x \end{aligned}$$

٤) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ t فنحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} = 0$$

بالتعويض عن $\frac{dy}{dt}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 8x + 2y = 0$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x - 2y = 0 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 8x + 2y = 0 \end{cases}$$

نعيِّن عبارة y من المعادلة الأولى حيث أن:

$$y = \frac{\dfrac{dx}{dt} - 5x}{2}$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 8x + \left(\frac{dx}{dt} - 5x\right) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

الحل العام للمعادلة الناتجة هو:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{t}$$

بتعويض هذا الحل في عبارة y نحصل على:

$$y(t) = \frac{\frac{dx}{dt} - 5x}{2}$$

$$= \frac{3c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} - 5(c_1 e^{3t} + c_2 t e^{t})}{2}$$

$$= -c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{t}$$

٥) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z + 1 \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 1 \end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dz}{dx} = 0$$

بالتعويض عن $\frac{dz}{dx}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 1$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - z = 1 \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} - y = 1 \end{cases}$$

الحل العام للمعادلة الثانية هو:

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 1$$

بتعويض هذا الحل في المعادلة الأولى نحصل على:

$$z(x) = \frac{dy}{dx} - 1 = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} - 1$$

٦) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 3x - y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - y + x = 0 \end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة واحدة بالنسبة لـ t فنحصل على:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0$$

بالتعويض عن $\frac{dy}{dt}$ من المعادلة الثانية تأخذ المعادلة الجديدة الشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}-(y-x)=0$$

أي أننا حصلنا على نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-3x-y=0\\[2mm] \dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+x-y=0\end{cases}$$

نعيِّن عبارة y من المعادلة الأولى حيث أن:

$$y=\frac{dx}{dt}-3x$$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+x-\left(\frac{dx}{dt}-3x\right)=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=0$$

الحل العام للمعادلة الناتجة هو:

$$x(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$$

بتعويض هذا الحل في عبارة y نحصل على:

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{dx}{dt}-3x\\&=2c_1e^{2t}+c_2e^{2t}+2c_2te^{2t}-3c_1e^{2t}-3c_2te^{2t}\\&=(-c_1+c_2)e^{2t}-c_2te^{2t}\end{aligned}$$

٧) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y+2\sin t-3\cos t\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-6x+4y+7\sin t-20\cos t\end{cases}$$

الحل: باشتقاق طرفي المعادلة الأولى بالنسبة لـ t والتعويض عن $\frac{dy}{dt}$ في المعادلة الناتجة بعبارتها من المعادلة الثانية نحصل على

نظام المكافئة التالية:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y+2\sin t-3\cos t\\[2mm] \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{dx}{dt}-6x+4y+10\sin t-18\cos t\end{cases}$$

نعيِّن عبارة y من المعادلة الأولى:

$$y=\frac{dx}{dt}+x-2\sin t+3\cos t$$

بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=2\sin t-6\cos t$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

لتعيين حل خاص للمعادلة غير المتجانسة لدينا:

$$x_p(t) = \frac{1}{D^2 - 3D + 2}(2\sin t) - \frac{1}{D^2 - 3D + 2}(6\cos t)$$

$$= 2\frac{1}{-1-3D+2}(\sin t) - 6\frac{1}{-1-3D+2}(\cos t)$$

$$= 2\frac{1}{1-3D}(\sin t) - 6\frac{1}{1-3D}(\cos t)$$

$$= 2\frac{1+3D}{1-9D^2}(\sin t) - 6\frac{1+3D}{1-9D^2}(\cos t)$$

$$= \frac{2}{10}(\sin t + 3\cos t) - \frac{6}{10}(\cos t - 3\sin t)$$

$$= 2\sin t$$

وبالتالي:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 2\sin t$$

بالتعويض في عبارة y نحصل على:

$$y(t) = 2c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} + 5\cos t$$

٨) حل نظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + 3y - 2z \end{cases}$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى مرة أولى بالنسبة لـ t فنحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt}$$

باستبدال $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ بعباراتها من نظام نحصل على:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2(\underbrace{2x + y - z}_{\frac{dx}{dt}}) + (\underbrace{x + 2y - z}_{\frac{dy}{dt}}) - (\underbrace{3x + 3y - 2z}_{\frac{dz}{dt}})$$

بعد تجميع الحدود نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y - z$$

أي أننا حصلنا على المعادلة التفاضلية الخطية التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = 0$$

وحلها العام:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^t$$

من المعادلة الأولى في نظام لدينا:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x + z$$
$$= -2c_1 - c_2e^t + z$$

بالتعويض في المعادلة الثالثة نحصل على:

$$\frac{dz}{dx} = 3c_1 + 3c_2e^t - 6c_1 - 3c_2e^t + 3z - 2z$$
$$\frac{dz}{dx} - z = -3c_1$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية حلها العام:

$$z(t) = e^{\int dt}\left[\int -3c_1e^{-\int dt}dt + c_3\right]$$
$$= e^t\left[(3c_1)e^{-t} + c_3\right]$$
$$= 3c_1 + c_3e^t$$

بالتعويض في عبارة $y(t)$ نحصل على:

$$y(t) = -2c_1 - c_2e^t + c_3e^t + 3c_1$$
$$= c_1 - c_2e^t + c_3e^t$$

٩) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{y}$$

الحل: من النسبتين الأولى والثالثة نجد أن:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{y}$$
$$\frac{dx}{x} = dz$$
$$\ln x = z + c$$
$$x = c_1e^z$$

ومن النسبتين الثانية والثالثة نحصل على:

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{y}$$
$$\frac{dy}{z} = dz$$
$$dy = zdz$$
$$y = \frac{z^2}{2} + c_2$$

أي أن الحل العام للنظام يعطى بالتكاملين الأوليين التاليين:

$$\begin{cases} x = c_1e^z \\ y = \frac{z^2}{2} + c_2 \end{cases}$$

١٠) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$$

الحل: اعتماداً على خواص التناسب نشكل النسبتين المساعدتين التاليتين:

$$\frac{dx-dy}{(y+z)-(z+x)}=\frac{dy-dz}{(x+z)-(x+y)}$$

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y}$$

أي أن:

$$\frac{d(x-y)}{-(x-y)}=\frac{d(y-z)}{-(y-z)}$$

من هاتين النسبتين نحصل على:

$$\ln|x-y|=\ln|y-z|+\ln c_1$$

$$\frac{x-y}{y-z}=c_1$$

يمكن الحصول على تكامل أولي ثانٍ كما يلي:

$$\frac{dx+dy+dz}{(y+z)+(x+z)+(x+y)}=\frac{dy-dz}{(x+z)-(x+y)}$$

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=\frac{d(y-z)}{-(y-z)}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{2}\ln|x+y+z|+\ln|y-z|=\frac{1}{2}\ln c_2$$

$$(x+y+z)(y-z)^2=c_2$$

أي أن الحل العام للنظام يعطى بالتكاملين الأوليين التاليين:

$$\begin{cases}\dfrac{x-y}{y-z}=c_1\\(x+y+z)(y-z)^2=c_2\end{cases}$$

١١) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x-y}$$

الحل: اعتماداً على خواص التناسب نشكل النسبتين المساعدتين التاليتين:

$$\frac{dx-dy}{(y+z)-(x+z)}=\frac{dx-dz}{(y+z)-(x-y)}$$

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx-dz}{z-x}$$

$$\frac{d(x-y)}{-(x-y)}=\frac{d(x-z)}{-(x-z)}$$

من هاتين النسبتين نحصل على:

$$\ln|x-y| = \ln|x-z| + \ln c_1$$
$$\frac{x-y}{x-z} = c_1$$

يمكن الحصول على تكامل أولي ثانٍ من النسبة $\frac{dz}{x-y}$ والنسبة المساعدة $\frac{dx-dy}{y-x}$ نحصل على:

$$\frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dz}{x-y}$$
$$\frac{dx-dy+dz}{y-x+x-y} = \frac{dx-dy+dz}{0}$$
$$dx-dy+dz = 0$$

وبالتالي:

$$x-y+z = c_2$$

أي أن الحل العام للنظام يعطى بالتكاملين الأوليين التاليين:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{y-z} = c_1 \\ x-y+z = c_2 \end{cases}$$

١٢) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{3y+3z} = \frac{dy}{2z-3x} = \frac{dz}{-3x-2y}$$

الحل: نشكل نسبة مساعدة بضرب النسبة الأولى (من اليسار) بـ $/2/$ والنسبة الثانية بـ $/-3/$ والنسبة الثالثة بـ $/3/$ فنحصل على:

$$\frac{dx}{3y+3z} = \frac{dy}{2z-3x} = \frac{dz}{-3x-2y} = \frac{2dx-3dy+3dz}{0}$$

ومنه:

$$2dx-3dy+3dz = 0$$
$$2x-3y+3z = c_1$$

نشكل نسبة مساعدة ثانية بضرب النسبة الأولى (من اليسار) بـ $/x/$ والنسبة الثانية بـ $/y/$ والنسبة الثالثة بـ $/z/$ فنحصل على:

$$\frac{dx}{3y+3z} = \frac{dy}{2z-3x} = \frac{dz}{-3x-2y} = \frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

ومنه:

$$xdx+ydy+zdz = 0$$
$$x^2+y^2+z^2 = c_2$$

أي أن الحل العام للنظام يعطى بالتكاملين الأوليين التاليين:

$$\begin{cases} 2x-3y+3z = c_1 \\ x^2+y^2+z^2 = c_2 \end{cases}$$

١٣) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3x + 4y = 2\sin t \\ 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + x - y = \cos t \end{cases}$$

الحل: تكتب نظام بدلالة المؤثر التفاضلي كما يلي:

$$\begin{cases}(D-3)x+(D+4)y=2\sin t\\(2D+1)x+(D-1)y=\cos t\end{cases}$$

بالتأثير على المعادلة الأولى بـ $(D-1)$ والتأثير على المعادلة الثانية بـ $(D+4)$ وطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية نحصل على:

$$(D+4)(2D+1)x-(D-1)(D-3)x=(D+4)\cos t-(D-1)(2\sin t)$$

$$(D^2+13D+1)x=\sin t+2\cos t$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة من هذه المعادلة هو:

$$x_h(t)=c_1e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t}+c_2e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t}$$

لتعيين حل خاص لها لدينا:

$$\begin{aligned}x_p(t)&=\frac{1}{D^2+13D+1}(\sin t+2\cos t)\\&=\frac{1}{13D}(2\cos t+\sin t)\\&=\frac{2}{13}\int\cos t\,dt+\frac{1}{13}\int\sin t\,dt\\&=\frac{2}{13}\sin t-\frac{1}{13}\cos t\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$x(t)=c_1e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t}+c_2e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t}+\frac{2}{13}\sin t-\frac{1}{13}\cos t$$

بالتعويض في المعادلة الأولى من نظام نحصل على:

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dt}+4y+\left(\frac{-13+\sqrt{165}}{2}\right)c_1e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t}+\left(\frac{-13-\sqrt{165}}{2}\right)c_2e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t}\\&+\frac{2}{13}\cos t+\frac{1}{13}\sin t-3c_1e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t}-3c_2e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t}\\&-\frac{6}{13}\sin t+\frac{3}{13}\cos t=2\sin t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}+4y=\frac{19-\sqrt{165}}{2}c_1e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t}+\frac{19+\sqrt{165}}{2}c_2e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t}\\+\frac{31}{13}\sin t-\frac{5}{13}\cos t\end{aligned}$$

هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى، حلها العام هو:

$$y=e^{-\int 4dt}\left\{\int\left[\left(\begin{aligned}&\frac{19-\sqrt{165}}{2}c_1e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t}\\&+\frac{19+\sqrt{165}}{2}c_2e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t}+\frac{31}{13}\sin t-\frac{5}{13}\cos t\end{aligned}\right)e^{\int 4dt}dt\right]+c_3\right\}$$

$$= e^{-4t}\left[\begin{array}{r}\displaystyle\int \frac{19-\sqrt{165}}{2}c_1 e^{\frac{-5+\sqrt{165}}{2}t}dt + \int \frac{19+\sqrt{165}}{2}c_2 e^{\frac{-5-\sqrt{165}}{2}t}dt \\ \displaystyle + \frac{31}{13}\int e^{4t}\sin t dt - \frac{5}{13}\int e^{4t}\cos t dt\end{array}\right] + c_3 e^{-4t}$$

$$y(t) = e^{-4t}\left(\begin{array}{r}\displaystyle\frac{19-\sqrt{165}}{-5+\sqrt{165}}c_1 e^{\frac{-5+\sqrt{165}}{2}t} + \frac{19+\sqrt{165}}{-5-\sqrt{165}}c_2 e^{\frac{-5-\sqrt{165}}{2}t} \\ \displaystyle + \frac{7}{13}e^{4t}\sin t - \frac{3}{13}e^{4t}\cos t\end{array}\right) + c_3 e^{-4t}$$

$$= \frac{19-\sqrt{165}}{-5+\sqrt{165}}c_1 e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t} + \frac{19+\sqrt{165}}{-5-\sqrt{165}}c_2 e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t} + \frac{7}{13}\sin t - \frac{3}{13}\cos t + c_3 e^{-4t}$$

بما أن محدد مصفوفة أمثال نظام هو:

$$\begin{vmatrix} D-3 & D+4 \\ 2D+1 & D-1 \end{vmatrix} = -D^2 - 13D - 1$$

ومرتبته $/2/$ فإن الحل العام يجب أن يحوي ثابتين كيفيين فقط. بتعويض عبارة $x(t)$ وعبارة $y(t)$ في المعادلة الأولى نجد أن:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x + 4y = 8c_3 e^{4t} + 2\sin t \equiv 0$$

وبالتالي $c_3 = 0$. أي أن:

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t} + c_2 e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t} + \frac{2}{13}\sin t - \frac{1}{13}\cos t$$

$$y(t) = \frac{19-\sqrt{165}}{-5+\sqrt{165}}c_1 e^{\frac{-13+\sqrt{165}}{2}t} + \frac{19+\sqrt{165}}{-5-\sqrt{165}}c_2 e^{\frac{-13-\sqrt{165}}{2}t} + \frac{7}{13}\sin t - \frac{3}{13}\cos t$$

١٤) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}(D+2)z + (D+1)y = x^2 \\ (D+3)y + 5z = e^x\end{cases}$$

الحل: بضرب المعادلة الأولى بـ (-5) والتأثير على المعادلة الثانية بـ $(D+2)$ وجمع المعادلتين نحصل على:

$$(D+3)(D+2)y - 5(D+1)y = (D+2)e^x - 5x^2$$

$$(D^2+1)y = 3e^x - 5x^2$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة من هذه المعادلة هو:

$$y_h(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$$

لتعيين حل خاص لها لدينا:

$$y_p(x) = \frac{1}{D^2+1}(3e^x - 5x^2)$$

$$= \frac{1}{D^2+1}(3e^x) - \left[\left(1-D^2\right)\left(5x^2\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}e^x - 5x^2 + 10$$

وبالتالي:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{3}{2}e^x-5x^2+10$$

بالتعويض في المعادلة الثانية من نظام نحصل على:

$$z(x)=\frac{1}{5}\left(e^x-\frac{dy(x)}{dx}-3y(x)\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\begin{array}{r}e^x+c_1\sin x-c_2\cos x-\frac{3}{2}e^x+10x-3c_1\cos x\\ -3c_2\sin x-\frac{9}{2}e^x+15x^2-30\end{array}\right)$$

$$=-e^x+\frac{1}{5}c_1\sin(x)-\frac{3}{5}c_2\sin x-\frac{3}{5}c_1\cos x-\frac{c_2}{5}\cos x+3x^2+2x-6$$

بما أن محدد مصفوفة أمثال نظام هو:

$$\begin{vmatrix}D+1 & D+2\\ D+3 & 5\end{vmatrix}=-D^2-1$$

ومرتبته $/2/$ فإن الحل العام يجب أن يحوي ثابتين كيفيين.

١٥) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases}(D-1)z+(D+1)y=e^{2x}\\ D^2z+Dy=3e^{2x}\end{cases}$$

الحل: بالتأثير على المعادلة الأولى بـ (D^2) والتأثير على المعادلة الثانية بـ $(D-1)$ وطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نحصل على:

$$(D^2)(D+1)y-(D)(D-1)y=(D^2)e^{2x}-3(D-1)e^{2x}$$

$$(D^3+D)y=e^{2x}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة من هذه المعادلة هو:

$$y_h(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$$

لتعيين حل خاص لها لدينا:

$$y_p(x)=\frac{1}{D^3+D}\left(e^{2x}\right)=\frac{1}{10}e^{2x}$$

وبالتالي:

$$y(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{10}e^{2x}$$

بالتعويض في المعادلة الثانية من نظام الأصلية نحصل على:

$$D^2z-c_2\sin x+c_3\cos x+\frac{1}{5}e^{2x}=3e^{2x}$$

$$D^2z=c_2\sin x-c_3\cos x+\frac{14}{5}e^{2x}$$

$$Dz=-c_2\cos x-c_3\sin x+\frac{7}{5}e^{2x}+c_4$$

$$z(x)=-c_2\sin x+c_3\cos x+\frac{7}{10}e^{2x}+c_4x+c_5$$

بما أن محدد مصفوفة أمثال نظام هو:

$$\begin{vmatrix} D-1 & D+1 \\ D^2 & D \end{vmatrix} = -D^3 - D$$

ومرتبته /3/ فإن الحل العام يجب أن يحوي ثلاثة ثوابت اختيارية فقط أي أنه يوجد ارتباط بين بعض أو كل هذه الثوابت. لتعيين الارتباط نعوض عبارة $y(x)$ وعبارة $z(x)$ في المعادلة الثانية فنحصل على:

$$c_2 \sin x - c_3 \cos x + \frac{14}{5} e^{2x} - c_2 \sin x + c_3 \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \equiv 3e^{2x}$$

وهذه المعادلة محققة دوماً، أي لا ينتج عنها أي ارتباط. نعوض عبارة $y(x)$ وعبارة $z(x)$ في المعادلة الأولى فنحصل على:

$$\left(-c_2 \cos x - c_3 \sin x - \frac{7}{5} e^{2x} + c_4\right) -$$

$$-\left(-c_2 \sin x + c_3 \cos x + \frac{7}{10} e^{2x} + c_4 x + c_5\right)$$

$$+\left(-c_2 \sin x + c_3 \cos x + \frac{2}{5} e^{2x}\right)$$

$$+\left(c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{10} e^{2x}\right) \equiv e^{2x}$$

$$c_4 - c_4 x - c_5 + c_1 \equiv 0$$

أي أن:

$$c_4 = 0$$

$$c_1 = c_5$$

وبالتالي، فإن الحل العام للنظام الأصلية هو:

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{10} e^{2x}$$

$$z(x) = c_1 - c_2 \sin x + c_3 \cos x + \frac{7}{10} e^{2x}$$

١٦) أوجد الحل العام لنظام المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} + 5z + \dfrac{dy}{dx} + 7y = 8 \\ 2\dfrac{dz}{dx} + z + 3\dfrac{dy}{dx} + y = \cos x \end{cases}$$

الحل: تكتب نظام بدلالة المؤثر التفاضلي كما يلي:

$$\begin{cases} (D+5)z + (D+7)y = 8 \\ (2D+1)z + (3D+1)y = \cos x \end{cases}$$

بالتأثير على المعادلة الأولى بـ $(2D+1)$ والتأثير على المعادلة الثانية بـ $(D+5)$ وطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية نحصل على:

$$(3D+1)(D+5)y - (2D+1)(D+7)y = (D+5)\cos x - (2D+1)(8)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 5\cos x - \sin x - 8$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة من هذه المعادلة هو:

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

لتعيين حل خاص لها لدينا:

$$x_p(t)=\frac{1}{D^2+D-2}(5\cos x-\sin x-8)$$
$$=\frac{1}{D-3}(5\cos x-\sin x)+\frac{8}{2}$$
$$=-\frac{1}{10}(D+3)(5\cos x-\sin x)+4$$
$$=-\frac{1}{10}\left[-5\sin x+15\cos x-\cos x-3\sin x\right]+4$$
$$=\frac{4}{5}\sin x-\frac{7}{5}\cos x+4$$

وبالتالي:

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+\frac{4}{5}\sin x-\frac{7}{5}\cos x+4$$

بالتعويض في المعادلة الأولى من نظام نحصل على:

$$\frac{dz}{dx}+5z-2c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+\frac{4}{5}\cos x+\frac{7}{5}\sin x+7c_1e^{-2x}$$
$$+7c_2e^{x}+\frac{28}{5}\sin x-\frac{49}{5}\cos x+28=8$$

$$\frac{dz}{dx}+5z=-5c_1e^{-2x}-8c_2e^{x}+9\cos x-7\sin x-20$$

هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى، حلها العام هو:

$$z(x)=e^{-\int 5dx}\left\{\int\left[\left(-5c_1e^{-2x}-8c_2e^{x}+9\cos x-7\sin x-20\right)e^{\int 5dx}dx\right]+c_3\right\}$$
$$=e^{-5x}\left[\begin{array}{l}-5\int c_1e^{3x}dx-8\int c_2e^{6x}dx+9\int e^{5x}\cos x\,dx\\ \qquad\qquad -7\int e^{5x}\sin x\,dx-20\int e^{5x}dx\end{array}\right]+c_3e^{-5x}$$
$$z(x)=e^{-5x}\left(-\frac{5}{3}c_1e^{3x}-\frac{4}{3}c_2e^{6x}+2e^{5x}\cos x-e^{5x}\sin x-4e^{5x}\right)+c_3e^{-5x}$$
$$=-\frac{5}{3}c_1e^{-2x}-\frac{4}{3}c_2e^{x}+2\cos x-\sin x-4+c_3e^{-5x}$$

بما أن محدد مصفوفة أمثال نظام هو:

$$\begin{vmatrix}D+5 & D+7\\ 2D+1 & 3D+1\end{vmatrix}=D^2+D-2$$

ومرتبته /2/ فإن الحل العام يجب أن يحوي ثابتين كيفيين فقط. بتعويض عبارة $y(x)$ وعبارة $z(x)$ في المعادلة الثانية نجد أن:

$$2\frac{dz}{dx}+z+3\frac{dy}{dx}+y=\cos x-9c_3e^{-5x}\equiv\cos x$$

وبالتالي $c_3=0$. أي أن:

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+\frac{4}{5}\sin x-\frac{7}{5}\cos x+4$$
$$z(x)=-\frac{5}{3}c_1e^{-2x}-\frac{4}{3}c_2e^{x}+2\cos x-\sin x-4$$

تمارين غير محلولة

١) حل جمل المعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\begin{cases} y' - z - 3y = 0 \\ z' - z + y = 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} y' = 2y + x + 2e^{t} \\ x' = y + 2x - 3e^{4t} \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 4z' - y' + 3z = \sin x \\ z' + y = \cos x \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} 4z' - y' + 3z = \sin x \\ z' + y = \cos x \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} z' + 5z + y' + 7y = 8 \\ 2z' + z - 3y' + y = \cos x \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} z' + y' + y = -e^{x} \\ y' + z - y = e^{2x} \end{cases}$$

$$7)\begin{cases} z' + y' + 2z + y = x \\ y' + 5z + 3y = x^{2} \end{cases}$$

$$8)\begin{cases} z' + y' - z + 3y = e^{-x} - 1 \\ z' + y' + 2z + y = e^{2x} + x \end{cases}$$

$$9)\begin{cases} z' + 2y' + z + 7y = 2 + e^{x} \\ y' - 2z + 3y = e^{x} - 1 \end{cases}$$

$$10)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

٢) أوجد الحل العام للجمل الآتية:

$$1)\ \frac{dx}{1-x} = \frac{dy}{1-y} = \frac{dz}{z}$$

$$2)\ \frac{2xdx}{y^{2}} = \frac{2ydy}{x^{2}} = \frac{dz}{z}$$

$$3)\ \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

$$4)\ \frac{xdx}{y^{3}z} = \frac{dy}{x^{2}z} = \frac{dz}{y^{3}}$$

$$5)\ \frac{2dx}{x^{2} - y^{2} - z^{2}} = \frac{-dy}{xy} = \frac{dz}{xz}$$

$$6)\ \frac{dx}{3y - 2x} = \frac{dy}{z - 3x} = \frac{dz}{2x - y}$$

٣) أوجد الحل العام لجمل المعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\begin{cases}(5D+4)y-(2D+1)z=e^{x}\\(D+8)y-3z=5e^{x}\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}z''-y'-8z=8x\\z'+2y'-3y=0\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}y''+y'+6z=e^{x}\\y'+z'=x^{2}\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{dy}{dx}-z+y=e^{2x}\\[2mm]\dfrac{d^2z}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=3e^{x}\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}y'+2z'-3y+4z=2\sin x\\2y'+z'+y-z=\cos x\end{cases}$$

$$6)\begin{cases}z'+y'+2z+y=x\\y'+3y+5z=e^{x}\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-x+2y=1+e^{t}\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+2y+z=2+e^{t}\\[2mm]\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dz}{dt}-x+z=3+e^{t}\end{cases}$$

الفصل الثالث :

طريقه راوث لقياس استقراريه انظمه المعادلات التفاضلية الاعتيادية

سوف نتناول هنا دراسة استقرار أنظمة التحكم ذات التغذية الخلفية باستخدام طريقة راوث هيرتز .Routh Hurwitz Criteria

تعريف استقرار الانظمة System Stability:

بفرض أن $y(t)$ هى الاستجابة الزمنية للنظام الشارة الخطوة وكان:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = L$$

فان النظام يكون مستقرا إذا كان L ذو قيمة محددة.

وكما درسنا سابقاً أن الاستجابة الزمنية لنظم الرتبة الأولى والثانية تكون على الصورة:

$$y(t) = A_1 + A_2\, e^{r_i t}$$

حيث r_i هى جذور المعادلة المميزة للنظام، ومن خصائص الدالة الأسية:

$$\lim_{t \to \infty} A\, e^{r t} = \begin{cases} A & r = 0 \\ 0 & r < 0 \\ \infty & r > 0 \end{cases}$$

فانه يمكن القول بأن النظام يكون مستقراً (Stable) إذا كانت جذور المعادلة المميزة للنظام سالبة، أى أن جميع جذور هذا المعادلة تقع في النصف الأيسر مان مستوى الإحداثيات المركب
.Left Hand Side of S-plane (RHS)

ويكفى أن يكون جذراً واحداً موجباً ليكون النظام غير مستقر ويقع هاذا الجذر فى النصف الايمن من مستوى الإحداثيات المركب .Right Hand Side of S-plane (RHS)

ولكن فى حالة الأنظمة ذات الرتب العليا، فان عملية حساب جذور المعادلة المميزة للنظاام تكون معقدة. وطريقة راوث لدراسة استقرار الأنظمة فهى طريقة جبرية تعطي معلومات عن استقرار
النظم دون الحاجة الى حساب جذور المعادلة المميزة للنظام.

جدول راوث:

لتكن المعادلة التفاضلية الزمنية للنظام على الشكل التالي:

$$a_n\; y^{(n)}(t) + a_{n-1}\; y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2\; y''(t) + a_1\; y'(t) + a_0\; y(t) = u(t) \qquad (1)$$

حيث:

$y'(t)$ هى المشتقة الأولى للمتغير $y(t)$

$y''(t)$ هى المشتقة الثانية للمتغير $y(t)$

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (١)
للنظام على الشكل التالي:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \square\square + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

من المعادلة المميزة للنظام، يتم بناء جدول راوث كالتالي:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots\cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots\cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots\cdots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

حيث:

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n (a_{n-3})}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-4}) - a_n (a_{n-5})}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{(b_{n-1})(a_{n-3}) - (a_{n-1})(b_{n-3})}{b_{n-1}}$$

$$_{n-1} = \frac{(b_{n-1})(a_{n-5}) - (a_{n-1})(b_{n-5})}{b_{n-1}} \quad \square\square$$

معيار راوث الستقرار النظم:

يكون النظام مستقراً إذا كانت كل عناصر العمود الأول فى جدول راوث لها نفس الإشارة.

وإذا كان هناك تغيراً فى إشارات العمود الأول من جدول راوث، فان النظام يكون غير مستقر ويوجد بعض الجذور فى النصف الأيمن من مستوى الإحداثيات المركب (RHS) يساوى عددها عدد التغيرات فى إشارة عناصر العمود الأول من جدول راوث.

مثال1:
ليكن لدينا النظام التالي:

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 3\,y(t) = 5\,u(t)$$

اختبر استقرار النظام(ب)اكتب المعادلة المميزة للنظام

الحـــل:

$$y''(t)+2y'(t)+3y(t)=5u(t)$$

(١) بأخذ تحويل لابلاس لهذه المعادلة مع إهمال الشروط الابتدائية:

$$s^2 Y(s)+2s\,Y(s)+3Y(s)=5U(s)$$

$$\Rightarrow \quad (s^2+2s+3)\,Y(s)=5U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{5}{s^2+2s+3}$$

المعادلة المميزة للنظام هى:

$$s^2+2s+3=0$$

(ب) اختبار استقرار النظام:

جدول راوث للنظام هو:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 3 \\ s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 3 & 0 \end{array}$$

حيث انه ال يوجد تغيير فى إشارات عناصر العمود الأول من جدول راوث، فان النظام مستقر.

مثال2:

ليكن لدينا النظام التالي:

$$y'''(t)+2y''(t)+2y'(t)+10y(t)=u(t)$$

(أ) اكتب المعادلة المميزة للنظام

(ب) اختبر استقرار النظام

الحـــل:

$$y'''(t)+2y''(t)+2y'(t)+10y(t)=u(t)$$

(١) بأخذ تحويل الابلاس لهذه المعادلة مع إهمال الشروط الابتدائية:

$$s^3 Y(s)+2s^2\,Y(s)+2s\,Y(s)+10\,Y(s)=U(s)$$

$$\Rightarrow \quad (s^3+2s^2+2s+10)\,Y(s)=U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{5}{s^3+2s^2+2s+10}$$

المعادلة المميزة للنظام هى:

$$s^3+2s^2+2s+10=0$$

(ب) اختبار استقرار النظام:

جدول راوث للنظام هو:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 2 & 10 \\ s & (-3) & 0 \\ s^0 & 10 & 0 \end{array}$$

يوجد تغييرين فى إشارات عناصر العمود الأول من جدول راوث، لذلك فان النظام يكون غير مستقر ويوجد جذرين من جذور المعادلة المميزة للنظام فى النصف الأيمن من مستوى الإحداثيات المركب (RHS).

مثال3:

اختبر استقرار النظام التالي:

$$s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10 = 0$$

الحـــل:

جدول راوث للنظام هو:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 16 \\ s^4 & 1 & 9 & 10 \\ s^3 & \langle -6 \rangle & 6 & 0 \\ s^2 & 10 & 10 & 0 \\ s^1 & 12 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

يوجد تغيرين فى الإشارة عناصر العمود الأول، وبالتالي فان النظام غير مستقر ويوجد جذرين فى نصف المستوى المركب الأيمن RHP

حالات خاصة لحدوث راوث هيرتز:

الحالة الأولى: ظهور "صفر" فى العمود الأول:

مثال:

اختبر استقرار النظام التالي:

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} s^4 & 1 & 2 & s^0 & 3 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & & & 0 \\ s^2 & \in & 3 & & & 0 \\ s^1 & a & 0 & & & 0 \end{array}$$

$a =$

حيث أن $\in \to 0$ فان $\lim_{\in \to 0} a = \dfrac{0-3}{0} = -\infty$

∴ يوجد تغيرين فى الإشارة فى العمود الأول وبالتالي فان النظام غير مستقر ويوجد جذرين في نصف المستوى المركب الأيمن.

الحالة الثانية: ظهور صف كله "أصفار":

وجود صف كله أصفار في جداول راوث يعني وجود جذور على المحور التخيلي للمستوى المركب أ,,(RHS).

مثال:

اختبر استقرار النظام التالي:

$$s^4 + 2s^3 + 9s^2 + 4s + 14 = 0$$

الحــــل:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 9 & 14 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 7 & 14 & 0 \\ s^1 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & - & - & - \end{array}$$

النظام يكون على حدود الاستقرار. المعادلة المساعدة هى:

$$A(s) = 7s^2 + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{2}$$

ويوجد جذرين على المحور التخيلي للمستوى المركب.

مثال:

اختبر استقرار النظام التالي:

$$s^6 + s^5 + 5s^4 + s^3 + 2s^2 - 2s - 8 = 0$$

الحــــل:

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 1 & 5 & 2 & -8 \\ s^5 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ s^4 & 4 & 4 & -8 & 0 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & - & - & - & - \\ s^1 & - & - & - & - \\ s^0 & - & - & - & - \end{array}$$

النظام غير مستقر ألن المعادلة المميزة بها معاملات سالبة.

وجود صف كله أصفار معناه وجود جذور على المحور التخيلى للمستوى المركب يمكن إيجادها كالاتي:

المعادلة المساعدة هى:

$$A(s) = 4s^4 + 4s^2 - 8 = 0$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 16s^3 + 8s$$

بإعادة كتابة الجدول السابق كالآتي:

s^6	1	5	2	-8
s^5	1	1	-2	0
s^4	4	4	-8	0
s^3	16	8	0	0
s^2	2	-8	0	0
s^1	72	0	0	0
s^0	-8	0	0	0

∴ يوجد تغير واحد فى الإشارة فى العمود الأول

وبالتالي فان النظام غير مستقر ويوجد جذر واحد فى نصف المستوى المركب الأيمن.

الحالة الثالثة: النظم القابلة للضبط:

لتكن المعادلة المميزة هى:

$$D(s) = 1 + K\,G(s)\,H(s) = 0$$

ماهى قيمة معامل الكسب **K** التى تجعل هذه النظام مستقرا؟

مثال:

أوجد قيمة معامل الكسب **K** التى تجعل جذور للمعادلة الآتية في النصف الأيسر من مستوى الإحداثيات المركب (أى تجعل النظام مستقراً)

$$s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + K = 0$$

الحـــل:

جدول راوث لهذه المعادلة هو:

s^4	1	4	K
s^3	2	2	0
s^2	3	K	0
s^1	a	0	0
s^0	K	0	0

$$a = \frac{6 - 2K}{3}$$

كى يكون النظام مستقراً يجب أن يكون $a \geq 0$

$$\therefore \ \frac{6-2K}{3} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 6-2K \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -2K \geq 6$$
$$\Rightarrow \quad 2K \leq 6 \quad \Rightarrow \quad K \leq 3$$

لكن K تظهر بمفردها فى العمود الأول، لذلك يجب أن يكون:

$$K \geq 0$$

∴ قيمة K التي تجعل جذور المعادلة السابقة فى النصف الأيسر من مستوى الإحداثيات المركبة (أى التي تجعل النظام مستقراً) هى:

$$\boxed{0 < K < 3}$$

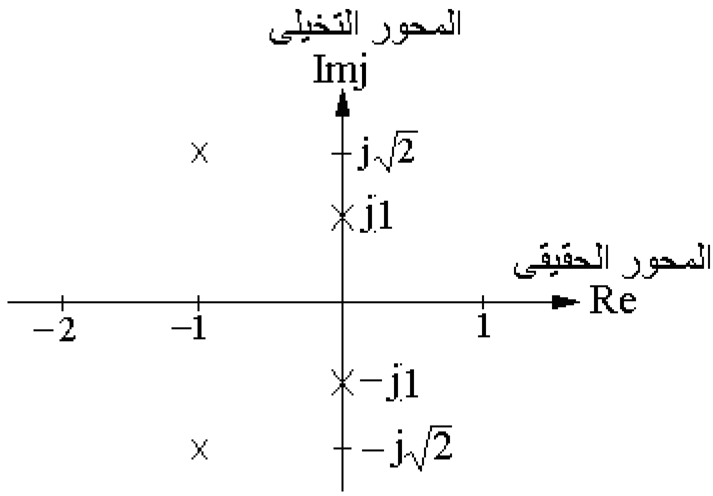
عند القيمة K = 2 نحصل على صف كله أصفار وبالتالي فان المعادلة المساعدة هى:

$$A(s) = 3s^2 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad 3s^2 + 3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad s^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j$$

وبقسمة **المعادلة المميزة** على المعادلة المساعدة نحصل على:

$$\begin{array}{r|l}
 & s^2 + 2s + 3 \\ \hline
s^2 + 1 & s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 3 \\
 & s^4 \qquad\quad + s^2 \\ \hline
 & \qquad 2s^3 + 3s^2 + 2s \\
 & \qquad 2s^3 \qquad\quad + 2s \\ \hline
 & \qquad\qquad 3s^3 \qquad + 3 \\
 & \qquad\qquad 3s^3 \qquad + 3 \\ \hline
 & \qquad\qquad\ 0 \qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\therefore \ s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 3 = (s^2+1)\,(s^2+2s+3)$$
$$= (s+j)\,(s-j)\,(s+1+j\sqrt{2})\,(s+1-j\sqrt{2})$$



مستوى الاحداثيات المركب

تمارين

(١) باستخدام طريقة راوث هيرتز، اختبر استقرار النظم التالية:

(a) $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1$ (b) $s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$

(c) $s^4 + s^3 + 2s^2 + 6s + 8$ (d) $s^4 + 3s^2 + 4$

(e) $s^4 + 2s^3 + 5s^2 - 4s - 14$ (f) $s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 4s + 2$

(g) $3s^5 + 2s^3 + s$ (h) $2s^5 + 4s^4 + s^3 + 2s^2 + 3s + 6$

(i) $5s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5$ (i) $2s^4 + 2s^3 + s^2 + s - 3$

فى جميع الحالة، أوجد عدد الجذور (أن وجدت) التي تقع فى النصف الأيمن للمستوى المركب. (٢) المعادلة المميزة

لمجموعة نظم تحكم ذات تغذية خلفية معطاة أسفله. أوجد قيمة **K** التي تجعل

التي تجعل النظام مستقراً فى كل حالة.

(a) $s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K$ (b) $s^3 + (2 + K)\, s^2 + (8 + 16K)s + 6$

(c) $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 4 + K$ (d) $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + K$

(٣) أوجد مدى معامل الكسب K اللازم الاستقرار نظام تحكم ذو تغذية خلفية، الدالة الناقلة للحلقة المفتوحة له معطاة كالتالي:

(a) $G(s) = \dfrac{K}{s\,(s+1)\,(s+2)}$ (b) $G(s) = \dfrac{K}{s\,(s^3 + 6s^2 + 1)\,(s+6)}$

(٤) نظام تحكم ذو تغذية خلفية، المعادلة المميزة له هى:

$$s^3 + (4 + K)\, s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$$

التى يمكن افتراضها لهذا النظام قبل أن يصبح

الكسب K أوجد القيمة القصوى الموجبة لمعامل

النظام غير مستقر.

المصادر

١- مقدمة في المعادلات التفاضلية، الدكتور روحي ابراهيم الخطيب.

٢- طرق حل المعادلات التفاضلية، للصفوف الثانية في كليتي العلوم والتربية، تأليف: أ.م خالد احمد السامرائي/ أ.م يحيى عبد سعيد.

٣- المعادلات التفاضلية التطبيقية، تأليف: موري آرشبيجل، ترجمة الدكتور محمد دخيل الاسدي/ الدكتور علي يوسف عبدالله.

٤- المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات، اعداد الدكتور اسماعيل بوقفة/ الدكتور عايش الهنداوي.

٥- المعادلات التفاضلية، الجزء الاول، تأليف: الاستاذ الدكتور حسن مصطفى العويضي/ الدكتور عبدالوهاب عباس رجب/ الدكتورة سناء علي زارع.

٦- المعادلات التفاضلية، الجزء الثاني، تأليف: الاستاذ الدكتور حسن مصطفى العويضي/ الدكتور عبدالوهاب عباس رجب/ الدكتورة سناء علي زارع.

٧- محاضرات معادلات تفاضلية، قسم الرياضيات، اعداد الاستاذة عذراء مذكور محمد.

١. "Linear Systems and Signals"لـ B.P. Lathi و Roger Green. هذا الكتاب يشرح العديد من المفاهيم المتعلقة بالأنظمة الخطية والإشارات بشكل مبسط وواضح.

٢. "Control Systems Engineering"لـ Norman S. Nise. يغطي هذا الكتاب مجموعة واسعة من الموضوعات المتعلقة بالأنظمة الخطية والتحكم، بما في ذلك استقرارية الأنظمة.

٣. "Modern Control Engineering"لـ Ogata Katsuhiko. يقدم هذا الكتاب نظرة شاملة عن مواضيع الهندسة التحكم الحديثة بما في ذلك المعادلات التفاضلية الخطية واستقراريتها.

٤. "Feedback Control of Dynamic Systems"لـ Gene F. Franklin و J. Da Powell و Abbas Emami-Naeini. يركز هذا الكتاب على التحكم في الأنظمة الديناميكية ويغطي موضوع الاستقرارية بشكل مفصل.

٥. المقالات العلمية والمراجع الأكاديمية في مجال الهندسة الكهربائية والهندسة الميكانيكية وعلوم الحاسوب التي تتناول الأنظمة الديناميكية والتحكم.

باستخدام هذه المصادر، يمكنك فهم الأساسيات والمفاهيم المتقدمة لاستقرارية أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة راوث وتطبيقها في مختلف المجالات.

بالتأكيد، إليك بعض المصادر الإضافية التي يمكن أن تساعدك في فهم استقرارية أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة راوث:

٦. "Applied Linear Algebra and Optimization Using MATLAB"لـ Loren Shure. يوفر هذا الكتاب مقدمة شاملة للجبر الخطي وتطبيقاته باستخدامMATLAB ، ويمكن استخدامه في فهم كيفية تطبيق مفاهيم الجبر الخطي في حل المعادلات التفاضلية الخطية.

٧. "Numerical Methods for Ordinary Differential Equations"لـ J. C. Butcher. يركز هذا الكتاب على الأساليب العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية، ويمكن أن يكون مفيدًا في فهم كيفية تقدير الاستقرارية للأنظمة الخطية.

٨. "Stability Theory of Differential Equations"لـ Richard Bellman. يعتبر هذا الكتاب مرجعًا هامًا في نظرية الاستقرار للمعادلات التفاضلية، ويمكن أن يوفر رؤية عميقة في هذا المجال.

٩. "Differential Equations and Their Applications"لـ Martin Braun. يعرض هذا الكتاب مفاهيم المعادلات التفاضلية بطريقة تطبيقية، ويمكن أن يكون مفيدًا في فهم كيفية استخدام المعادلات التفاضلية في تحليل الأنظمة وتحديد استقراريتها.

١٠. المقالات والأبحاث المنشورة في المجلات العلمية المتخصصة في مجالات الهندسة والرياضيات التطبيقية، والتي تركز على مواضيع الاستقرارية والأنظمة الديناميكية.