جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ميسان/ كلية التربية

قسم الرياضيات

"""المعادلات الديفونتية الخاصة"""

بحث مقدم الى مجلس كلية التربية – قسم الرياضيات

كجزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس في الرياضيات

مقدم من قبل الطالبة

الاء سعدون راضي

بأشراف

م. تغريد عبد الكريم حاتم

1445هـ 2024م

بسم الله الرحمن الرحيم

يا أيها الذين آمنوا
اتقوا الله وابتغوا إليه الوسيلة
وجاهدوا في سبيله
لعلكم تفلحون

صدق الله العظيم

سورة المائدة
آية **٣٥**

الاهداء

قال تعالى:(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك..

ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ... ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك الله ﷻ

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا محمد ﷺ

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار ... إلى من أحمل أسمه بكل افتخار والدي العزيز

إلى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان والتفاني .. إلى بسمة الحياة وسر الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب أمي الحبيبة

إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة .. أساتذتنا الأفاضل

الشكر والتقدير

الحمد والشكر الله أولا وأخرا...

أقدم شكري وامتناني إلى جميع من أعانوني وساعدوني في إخراج هذا البحث بفضلهم وجهدهم على الآراء القيمة التي أبدوها لي وخصوصاً مشرفتي تغريد عبد الكريم حاتم وإلى جميع الاساتذة في القسم عموماً ، وراجياً من الله أن أكون قد أصبت أكثر مما أخطأت وأن يستفاد مما بذلت من جهود أملاً أن أكون قد أعطيت الموضوع بعض حقه ، وأسأل الله أن يعلمنا ما ينفعنا، وينفعنا بما علمنا

المحتويات...

الملخص

يتناول هذا البحث موضوع المعادلات الديفونتية الخاصة حيث تم التعارف على مفهومها، مع ذكر بعض العلماء الذين ساهموا في تطوير المعادلات الديفونتية لتصل الى شكلها الحالي كما تعرفنا في البحث على بعض المعادلات الاعتيادية مع ذكر عدة امثلة والتي تم اثبت دورها ومساهماتها في مجال الرياضيات، كما ان للمبرهنات المعادلات الخطية اهمية كبيرة حيث تم ذكر بعض الامثلة عليها وطرق حلها، وفي نهاية البحث تم ذكر بعض الطرق التي تستخدم في حالة المعادلات الديفونتية، وابرز الطرق هي طريقة (mod) والتي تعتبر من اكثر اطرق استخدما ليتوصل البحث الى نتيجة مفادها ان للمعادلات الديفونتية دور كبير في حل العديد من المسائل، كما ان هناك العديد من الطرق التي يتم فيها حل المعادلات الديفونتية.

المقدمة...

المقدمة:

لقد نالت المعادلات الديفونتية الخاصة الكثير من الاهتمام وشغلت بال العديد من العلماء على مدار سنوات وانطلاقا من هذه الاهمية جاء هذا البحث تحت عنوان " المعادلات الديفونتية الخاصة" وكان على ثلاث فصل، تناول الفصل الاول مفهوم المعادلات والعماء الين سعوا في تطويرها وكذلك تم ذكر بعض الامثلة على المعادلات الديفونتية، اما الفصل الثاني فقد تحدث عن المعادلات الديفونتية الخطية، حيث تم الاشارة في بداية الفصل الى المبرهنات المهمة المستخدمة في حل المعادلات الديفونتية الخطية لينتهي ببعض الامثلة والمعادلات الديفونتية الخطية، اما الفصل الثالث فقد تحدث عن بعض الطرق المستخدمة في حل المعادلات الديفونتية لينتهي في الخاتمة التي اوصلتنا الى اهمية المعادلات الديفونتية ومدى تأثيرها في مجال الرياضيات ليكون شكل البحث النهائي بهذه الصورة:

(1) مفهوم المعادلات الديفونتية الخاصة
(2) المعادلات الديفونتية الخطية
(3) الطرق المستخدمة في حل المعادلات الديفونتية الخاصة

وتم الاعتماد في كتابة البحث على عدة مصادر ساهمت وبشكل فعال في تبلور افكار البحث حيث تم الاشارة اليها في المصادر في نهاية البحث.

الفصل الاول

مفهوم المعادلات الديفونتية الخاصة

الفصل الاول..

اولاً: المقدمة

يأتي اسم المعادلات الديفونتية من اسم العالم الذي درسها وهو العالم ديوفانتس الإسكندري ، وذلك في فترة بين القرن الثالث الرابع قبل الميلاد في كتابه " العددية Arithmatica "، وتعتبر المعادلات الديفونتية من المجالات النشيطة في الرياضيات باعتبارها مجالا مهما، حيث اختلاف العلماء عللى بداية انطلاقها ، فقد حل العالم فيثاغورس لعض المعادلات وذلك قبل العالم الاسكندري بحوالي قرنين من الزمن، كما ان هناك من يعتقد بأن العالم الهندي أريابهاتا وذلك في (476ق.م)هو اول من وضع طرق عامة للتعامل وحل المعادلات الديفونتية[3].

ثانيا: تعرف المعادلات الديفونتية:

هي المعادلات يقل عددها عن عدد المجاهيل الواردة فيها، وبالتالي قد يكون لها عدد كبير من الحلول الممكنة (وهي حلول عددية صحيحة)[1].

ثالثا: انواع المعادلات الديفونتية العامة (المعادلات الاعتيادية):

1. المعادلات التي لا تحتوي على متغير.
2. المعادلات ذات الحلول الصغيرة.
3. المعادلات في متغير واحد.
4. المعادلات المكافئة.
5. المعادلات التي ليس لها حلول حقيقية.
6. المعادلات التي لا تحل بطريقة الـ(mod)
7. المعادلات التي يمكن اختصرها الى معادلات اصغر[5].

رابعا: العلماء الذين درسوا المعادلات الديفونتية[4]:

1. الخوارزمي: لقد تطرق الخوارزمي في الجزاء الاخير من كتابة (الجبر و المقابلة) وهو الجزء المخصص لمسائل التركة و القسمة الى بعض المسائل غير المحدودة إلا ان لا شيء يدل على اهتمامه بالمعادلات الديوفنتية

2. بو كامل شجاع بن اسلم المصري: قد بين ابو كامل في كتابة (الطريف في الحساب) ان بعض المسائل تبقي وحيدة الحل و بعضها له عدة حلول بإعداد صحيحة وهي المسائل السيالة او الديوفنتية ،و بعضها له عدة حلول بإعداد ليست صحيحة ،وقد اورد العديد من الامثلة و حلها بطريقة تختلف عن الاسلوب الهندي. اما في كتابة(كتاب في الجبر و المقابلة) الذي كتبه في 880م عالج فيه ثمانية و ثلاثون مسالة ديوفنتية من الدرجة الثانية، واربعة انظمة معادلات خطية غير محددة ، و مجموعة من مسائل تعود إلى متواليات حسابية.

3. ابو بكر محمد بن الحسين الكرجي :تناول الو بكر الكرجي في كتابة(البديع في الحساب) نظام خطي يحتوي خمسة مجاهيل و هو

$$x+\frac{1}{3}(y+z+u)=s \quad , \qquad y+\frac{1}{4}(x+z+u)=s$$

$$z+\frac{1}{5}(x+y+u)=s \quad , \qquad u+\frac{1}{6}(x+y+z)=s$$

و معادلات من النوع

$$ax^{2n}\mp bx^{2n-1}=y^2 \;\;,\;\; ax^{2n}\mp bx^{2n-2}=y^2$$

$$ax^2\mp bx+c=y^2 \;\;,\;\; ax^2+c=y^2 \;\;,\;\; ax^2-c=y^2$$

ثم درس انظمة المعادلات من الشكل

$$x^2-b=y^2 \;\;,\;\; x^2-a=y^2$$

4. السموال ابن يحيى ابن عباس المغربي :درس السموال المغربي في كتابة(الباهر في الجبر) معادلات من شكل

$$y^3=ax^2+bx \;\;,\;\; y^3=ax+b$$

5. ابي جعفر الخازن : يعتبر ابي جعفر من العلماء المسلمين الذين درسوا المثلثات العددية القائمة الزاوية حيث اثبت في بحثه انه:

اذا كانتϵZ x, y, z ، $(x, y) = 1$ ، وكان x عدداً زوجياً ، فان الشروط الأتية متكافئة.

1) $x^2 + y^2 = z^2$
2) توجد اعداد صحيحه موجبة m,n ، $(m, n) = 1$ و احدهما فردي و الاخر زوجي بحيث ان $z = m^2 + n^2$ ، $y = m^2 - n^2$ ، $x = 2mn$.

ثم يثبت قضايا اخرى ، و يحل المعادله $x^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ، و يدرس المعادلتين

$$x^4 + y^2 = z^2 \ , \quad x^2 + y^2 = z^4$$

وبحث ايضاً في القران العاشر للميلاد مسالة تحليل العدد الطبيعي الى مجموع مربعات اعداد طبيعية.

6. أبي الجود بن الليث: وهو ثاني العلماء المسلمين بعد ابي جعفر حيث تطرق في بحثه عن المثلثات العددية القائمة الزاوية، الى الشروط اللازمة لتكوين المثلثات البدائية، وانشى جداول لتسجيل اضلاع المثلثات ومساحتها، ونسبة هذه المساحات الى المحيطات وانطلاقا من ثنائيات اعداد صحيحة:

$$k = 1,2,3, \ldots , (P, P + k)$$

7. محمد باقر اليزدي : كتب اليزدي بحثاً صغيراً لحل المعادلة الديوفنتية

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

خامسا: بعض المعادلات الديفونتية[5].

1. المعادلتين $x^3 + y^3 = z^3 \ , \quad x^4 + y^4 = z^4$ ،و التي تم بحثها من قبل كل من الكرجي و الخجندي و الخازن و ابن سينا و الخيام و البيروني و ابن الخوام البغدادي و كمال الدين الفارسي مؤكدين عدم وجود اعداد صحيحة تحقق اياً منهما
2. $x^n + y^n = z^n$ ، $n \geq 3$ ، درست هذا المعادلة من قبل فيرما مؤكداً عدم وجود اعداد صحيحة تحقق تلك المعادلة بشرط ان $x, y, z \ \neq 0$ ، و اثبت صحة ذلك من قبل الإنجليزي اندرو وايلس سنة 1994م و منح عليه ميدالية فيلد في الرياضيات .
3. $x^2 - dy^2 = 1$ ، حيث ان d ليست مربعاً كاملاً و التي تنسب الى الإنجليزي جون بل بدلاً من فيرماً الذي وضعها سنة 1657م مخمناً و جود حل واحد على الاقل لتلك المعادلة يختلف عن $x = \mp 1 \ , y = 0$ ، فمثلاً اقل قيم إلى(x , y) تحقق المعادلة $x^2 - 5y^2 = 1$ هي

4. $x = \pm 9\ , y = \mp 4$. اما اقل قيم إلى (x , y) تحقق المعادلة $x^2 - 43y^2 = 1$ فهي $x = \mp 3482\ , y = \mp 531$

و قد اثبت تخمين فيرما من قبل الفرنسي لاجرانج سنة 1768م و نشر الالماني ديركلي سنة 1837م طريقة لحساب اقل الاعداد التي تحقق المعادلة $x^2 - dy^2 = 1$ استخدم فيها الدوال المثلثية ، و اعطى الالماني كرونكر سنة 1863م طريقة اخرى لحساب اقل الاعداد التي تحقق تلك المعادلة بإستخدام الدوال الناقصية

5. $x^P - y^q = 1$ ، التي وضعها كاتلان سنة 1844م و خمن بانه إذا كان $P, q, x, y \in Z$ ، فان الحل الوحيد لهذه المعادلة هو $P = y = 2\ , q = x = 3$ ، وقد اثبت ميهيلسكو سنة 2003م صحة ذلك التخمين .
6. $n! + 1 = x^2$ ، يعود تاريخ هذه المعادلة إلى سنة 1885م عندما خمن بروجارد بان الحلول الوحيدة لها في Z هي $4! + 1 = 5^2, 5! + 1 = 11^2, 7! + 1 = 71^2$ ، و في سنة 1895م كتب الهندي رامنجين نفس التخمين ، وقد اثبت كرايجك صحة ذلك التخمين لكل $n \leq 5000$
7. $y^2 = x^3 + k$ ، و التي تسمى معادلة موردل المكتشفة سنة 1922م من قبل الإنجليزي موردل و التي تمثل منحياً ناقصاً في المستوى الاسقاطي الحقيقي ، فان وجود او عدم وجود اعداد صحيحة تحقق المعادلة يعتمد على قيمة k. فاذا كانت $k = 1$ ، فان الحلول الوحيدة في Z للمعادلة $y^2 = x^3 + 1$ ، هي $(0, \mp 1), (-1, 0), (2, \mp 3)$. اما اذا كان $k = -5$ ، فليس للمعادلة $y^2 = x^5 - 5$ حل في Z ، و إذا كان $k = -28$ ، فان الحلول الوحيدة في Z هي , $(4, \mp 6), (8, \mp 22), (37, \mp 225)$.

الفصل الثاني

المعادلات الديفونتية الخطية

اولا: المبرهنات المستخدمة في حل المعادلات الديوفنتية الخطية:

المبرهنة الاولى [6]:

إذا كان $a, b, c \in Z$ ، فإن

أ- $a = \mp 1 \Leftrightarrow a \setminus \mp 1$

ب- $(b \setminus a \wedge c \setminus b) \Rightarrow c \setminus a$

ت- $(b \setminus a) \wedge (a \setminus b) \Leftrightarrow a = \mp b$

ث- $(b \setminus a) \wedge c \neq 0 \Rightarrow bc \setminus ac$

ج- $c \setminus a \wedge c \setminus b \Rightarrow c \setminus ax + by \;\; \forall x, y \in Z$

البرهان:

سنثبت (ا)،(ت)،(ج)

(أ)نفرض أن $a \setminus \mp 1$ ، إذاً يوجد $b \in Z$ بحيث أن $ab = \mp 1$ ، وعلية فإن

$|ab| = |a||b| = 1$. لكن كلاً من b, a لا يساوي صفراً. إذاً $|a| \geq 1$ و $|b| \geq 1$ فإذا كانت $|a| > 1$ أو $|b| > 1$ ، فإن $|ab| > 1$ ، إذاً $|a| = |b| = 1$ و منه ينتج أن $a = \mp 1$ ، $b = \mp 1$. وإذا كان $a = \mp 1$ فمن الواضح ان $a \setminus \mp 1$.

(ت) إذا كان $a = \mp b$ فمن الواضح أن $b \setminus a$ و $a \setminus b$. ولإثبات العكس نفرض أن $b \setminus a$ و $a \setminus b$. إذاً $a = mb$, $b = na$ حيث $m, n \in Z$ ، وعلية فإن $a = mna$ ومنه ينتج $mn = 1$. إذاً $m = n = \mp 1$ حسب (أ)، وعلية فإن $a = \mp b$

(ج) بما أن $c \setminus a$ و $c \setminus b$ بالفرض ، إذاً $a = mc$, $b = nc$ حيث $m, n \in Z$

$ax = mcx = (mx)c$ لكل $x \in Z$ و $by = (nc)y = (ny)$ لكل $y \in Z$ ، إذاً

$ax + by = (mx + ny)c$ لكن $mx + ny \in Z$. إذاً $c \setminus ax + by$

المبرهنة الثانية[4]:

أ- إذا كان واحد على الأقل من العددين $a,b \in Z$ لا يساوي صفراً ، فيوجد لهما قاسم مشترك أعظم وحيد d ، كما يوجد $m,n \in Z$ بحيث أن $d = am + bn$.

ب- إذا كان كل من a, b عدد صحيح غير صفري ، وكان $a = bm + r$ ، $0 \le r \le m$ ، فإن $(a,b) = (b,r)$.

البرهان:

(أ)لتكن $S = \{ax + by | x,y \in Z\}$.إذاً إذا كان $b = 0$ فإن $0 < ax + by = |a| \in S$ عندما $x = 1\ , a > 0$ أو $x = -1\ , a < 0$ ، وإذا كان $a = 0$ فإن $0 < ax + by = |b| \in S$ عندما $y = 1\ , b > 0\ , y = -1\ , b < 0$ ، وإذا كان $a \neq 0\ , b \neq 0$ ، فإن $0 < a^2 + b^2 \in S$ عندما $x = a\ , y = b$، إذا S مجموعة جزئية غير خالية N. و بالتالي فإن S تحوي عنصر أول (أصغر) وليكن d إذا يوجد $m,n \in Z$ بحيث أن $d = am + bn$

ولكي نثبت أن $d = g,c,d(a,b)$ ، لاحظ أنه باستخدام القسمة الخوارزمية يمكننا إيجاد $r,t \in Z$ بحيث $a = dt + r$، $0 \le r < |b|$. إذاً $r = a - dt$، لكن $d = am + bn$ ، $r = a(1 - mt) + b(-nt)$ ، وعلية فإن $r \in S\ , r < d$ وهذا يناقض كون d عنصر أول في S ، إذاً $r = 0$ ، وعلية فان $d \setminus a$. و بنفس الطريقة يمكن أن نبرهن على أن $d \setminus b$ إذاً d قاسم مشترك للعددين a,b وإذا كان $c \in Z\ ,\ c \setminus a\ ,\ c \setminus b$ فإن $c \setminus (am + bn)$ حسب المبرهنة الاولى، وعلية فإن $c \setminus d$ إذاً d قاسم مشترك أعظم للعددين a,b. ولإثبات وحدانية d ، نفرض أن $e \in Z$ قاسم مشترك أعظم اخر للعددين a,b . $d \setminus e\ ,\ e \setminus d$ وعلية فأن $e = d$

(ب) نفرض أن $d = (a,b)$. إذاً $d \setminus a$ و $d \setminus b$ ، وعلية فإن $d \setminus a - mb$ وهذا يعني أن $d \setminus r$ ، وبالتالي فإن d قاسم مشترك لكل من r, b. والأن ليكن $c \in N$ و $c \setminus b\ ,\ c \setminus r$. إذاً $c \setminus bm + r$ ، وعلية فإن $c \setminus a$ ، وبالتالي فإن c قاسم مشترك للعددين a,b. إذاً $c \setminus d$ ، وعلية فإن $d = (b,r)$.

النتيجة: إذا كان$a,b,c \in Z$ ، $c > 0$ ، فإن $(ac,bc) = c(a,b)$

البرهان:

إذاً يوجد $m,n \in Z$ بحيث أن $d = am + bn$ حسب المبرهنة الثانية لكن $d \setminus a$ و $d \setminus b$ ، إذاً $dc \setminus ac$ و $dc \setminus bc$ ، وعلية فإن dc قاسم مشترك للعددين ac,bc.
والأن لنفرض أن $e \setminus ac$, $e \setminus bc$ ، إذاً $e \setminus acx + bcy$ لكل $x,y \in Z$ حسب المبرهنة الاولى ، وعلية فإن $e \setminus acm + bcn$ وهذا يعني أن $e \setminus (am + bn)c$ ، وعلية فإن $e \setminus dc$. إذاً $(ac,bc) = dc = c(a,b)$.

المبرهنة الثالثة[4]:

إذا كان $a,b, \in Z$ فإن a,b أوليان نسبياً إذاً و إذاً فقط وجد $m,n \in Z$ بحيث أن $am + bn = 1$

البرهان:

نفرض إن a,b اوليان نسبياً ، إذاً $(a,b) = 1$، وعلية يوجد $m,n \in Z$ بحيث أن $am + bn = 1$ حسب المبرهنة الثانية

و لإثبات العكس نفرض وجود $m,n \in Z$ بحيث أن $am + bn = 1$ ولنفرض $d = (a,b)$. إذاً $d \setminus a$ و $d \setminus b$ لكن $d \setminus am + bn$ حسب المبرهنة الاولى . إذاً $d \setminus 1$ لكن $d \in N$ إذاً $d = 1$، وعلية فإن a,b أوليان نسياً

النتيجة الاولى:

إذا كان $a,b, \in Z$ و $d = (a,b)$ فإن $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = 1$

البرهان:

بما أن $d = (a,b)$ ، إذاً يوجد $m,n \in Z$ بحيث أن $d = am + bn$ حسب المبرهنة الثانية ، وعلية فإن $\frac{a}{d}m + \frac{b}{d}n = 1$، وبالتالي فإن $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = 1$ حسب المبرهنة الثالثة

النتيجة الثانية:

إذا كان $a, b, c \in Z$ وكان $b \setminus a$ و $c \setminus a$ و$(b, c) = 1$ فإن $bc \setminus a$

البرهان:

بما أن $b \setminus a$ و $c \setminus a$ إذاً يوجد $r, s \in Z$ بحيث أن $a = br = cs$. لكن $(b, c) = 1$. إذاً يوجد $m, n \in Z$ بحيث أن $bm + cn = 1$ حسب المبرهنة الثانية ، وعلية فإن $a = abm + acn = bcsm + bcrn = bc(sm + rn)$، وبالتالي فإن $bc \setminus a$.

المبرهنة الرابعة[4]:

لتكن $a, b, c \in Z$

أ- إذا كان (a, b) و $(a, c) = 1$, فإن $(a, bc) = 1$
ب- إذا كان $c \setminus ab$, $(b, c) = 1$ فإن $c \setminus a$

البرهان :

(أ) بما أن $(a, b) = 1$ $(a, c) = 1$ بالفرض. إذاً يوجد $m, n \in Z$ بحيث $am + bn = 1$ ، و يوجد $r, s \in Z$ بحيث أن $ar + cs = 1$ حسب المبرهنة الثانية وعلية فإن $am + bn(ar + cs) = 1$، ومنه ينتج أن $a(m + bnr) + bc(ns) = 1$ ، وعلية فإن $(a, bc) = 1$ حسب المبرهنة الثالثة
(ب) بما أن $(b, c) = 1$ بالفرض. إذاً يوجد $m, n \in Z$ بحيث أن $bm + cn = 1$ حسب المبرهنة الثانية ، وعلية فإن $abm + acn = a$. لكن $c \setminus ab$ بالفرض و $c \setminus ac$. إذاً $c \setminus abm + acn$ حسب المبرهنة الاولى وعلية فإن $c \setminus a$.

مبرهنة الخامسة[5]:

- يوجد حل للمعادلة $ax + by = c$ ، اذاً و اذا فقط كان $d \setminus c$ ، حيث $d = (a, b)$
- إذا كان x_1, y_1 حلاً للمعادلة $ax + by = c$ ، فإن اي حل اخر لهذه المعادلة يكون على الشكل

$t \in Z$ حيث , $x = x_1 + (b/d)t$, $y = y_0 - (a/d)t$

البرهان:

- نفرض ان x_1, y_1 حل للمعادلة $ax + by = c$ ، إذاً $ax_1 + by_1 = c$.
لكن $d = (a,b)$. إذاً $d \setminus a$ و $d \setminus b$ ، و عليه فإن $d \setminus (ax_1 + by_1)$ حسب المبرهنة الاولى وبالتالي فإن $d \setminus c$.
ولإاثبات العكس نفرض ان $d \setminus c$. اذاً يوجد $r \in Z$ ، بحيث ان $c = dr$.
لكن $d = (a,b)$ اذا يوجد $m, n \in Z$ بحيث $d = am + bn$ حسب المبرهنة الثانية.
اذاً $c = rd = arn + brm$ ، وعلية فإن $x = rm$ ، $y = rn$ حل للمعادلة $ax + by = c$.
- بما أن x_1, y_1 حل للمعادلة $ax + by = c$ ، إذاً $ax_1 + by_1 = c$. والأن فنفرض أن u, w حل اخر للمعادلة $ax + by = c$. إذاً $au + bw = 1$ ، وعلية

1. $a(u - x_1) = b(y_1 - w) \Leftrightarrow ax_1 + by_1 = au + bm$ ، لكن $d = (a,b)$.
إذاً يوجد $r, s \in Z$ ، بحيث أن $(r,s) = 1$
2. $a = dr , b = ds$ حسب النتيجة الاولى للمبرهنة الثالثة
و من (1)،(2) ينتج أن
3. $r\left(u - x_1\right) = s(y_1 - w)$، وعلية فإن $s \setminus r\left(u - x_1\right)$ لكن، $(r,s) = 1$
إذاً $s \setminus \left(u - x_1\right)$، وعلية فإن
4. $u - x_1 = st$, $t \in Z$ ، إذاً $u = x_1 + st = x_1 + (b/d)t$،

ومن (3)،(4) ينتج $y_1 - w = rt$، وعلية فإن $w = y_1 - rt = y_1 - (a/d)t$

لكن

$$ax + by = a[x_1 + (b/d)t] + b[y_1 - (a/d)t] = ax_1 + by_1 = c$$

وعلية فإن $x = x_1 + (b/d)t$, $y = y_1 - (a/d)t$ حل للمعادلة $ax + by = c$

النتيجة:

إذا كان $(a,b)=1$ ، وكان x_1, y_1 حلاً للمعادلة $ax+by=c$ ، فإن أي حل اخر لهذه المعادلة يكون على الصورة $x=x_1+bt$،$y=y_1-at$، $t\in Z$ يسمى x_1, y_1 الحل الخاص للمعادلة $ax+by=c$

ثانيا: المعادلات الديفونتية الخطية:

المعادلة الاولى[2]:

المعادلة $ax+by=c$ ذات المجهولين x و y في Z و اليكن اسم المعادلة E

لتكن a,b,c اعداد من Z

- بين ان للمعادلة E حل في Z^2 $\Leftrightarrow$ $a\wedge b$ يقسم c.
- بين انه اذا كان الزوج (x_0, y_0) حلا للمعادلة E في مجموعة حلول المعادلة E تكتب على الشكل

$$S=\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b}, y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle| k\in Z\right\}$$

- باستعمال خوارزمية اقليدس ، احسب $54\wedge 21$
- حدد $(x_0,y_0)\in Z^2$ بحيث : $54x_0+21y_0=54\wedge 21$
- حل في Z^2 المعادلة: $54x_0+21y_0=906$ (E)

1. الاتجاه $\Rightarrow$

نفترض ان $a\wedge b$ يقسم c .

نضع $d=a\wedge b$

إذن يوجد k من Z بحيث $c=kd$

ولدينا حسب مبرهنة Bézout :

$$\exists(u,v)\in Z^2 : d = au + bv$$

و بالتالي

$$c = kd = a(ku) + b(kv)$$

نضع

$$(x_0, y_0) = (ku, kv)$$

و بالتالي لدينا المعادلة $ax + by = c$ تقبل حلول .

2. الاتجاه ⇐

نفترض الان ان المعادلة $ax + by = c$ تقبل حلولاً في Z^2 وليكن (x_0, y_0) احدها .

لدينا $ax_0 + by_0 = c$

نضع $d = a \wedge b$

بما ان $d|a$ و $d|b$ فإن : $d|ax_0 + by_0 = c$

اذن $d|c$

وبالتالي E تقبل حلول في Z^2 ⇔ $a \wedge b$ يقسم c

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $ax + by = c$ E .

وليكن (x_0, y_0) حلاً خاصاً للمعادلة E

لنبين ان

$$S=\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle|k\in Z\right\}$$

الفصل الثاني...

a. لنبين ان $\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle|k\in Z\right\}\subset S$

من اجل $\begin{cases}x=x_0+\frac{kb}{a\wedge b}\\ y=y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\end{cases}$ بحيث $k\in Z$. لدينا:

$$ax+by=ax_0+\frac{abk}{a\wedge b}+by_0-\frac{abk}{a\wedge b}$$

$$=ax_0+by_0$$

$$=c$$

و منه فإن الزوج $\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)$ بحيث $k\in Z$ حل للمعادلة E

إذن:

$$\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle|k\in Z\right\}\subset S$$

b. لتبين ان

$$S\subset\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle|k\in Z\right\}$$

لدينا:

$$(x,y)\in S\Leftrightarrow ax+by=c=ax_0+by_0$$

إذن: $a(x-x_0)=-b(y-y_0)$ ......(*)

ولدينا

$$d=a\wedge b\Leftrightarrow\begin{cases}\exists(\alpha,\beta)\in Z^2:a=\alpha d\,,b=\beta d\\ \alpha\wedge\beta=1\end{cases}$$

نعوض في *

$$\alpha d(x-x_0)=-\beta d(y-y_0)$$

اذن:

$$\alpha(x-x_0)=-\beta(y-y_0)$$

لدينا $\beta|\alpha(x-x_0)$ و $\alpha\wedge\beta=1$ إذن حسب مبرهنة Gauss :

$$\exists k\in Z\ \ k\beta=x-x_0$$

$$\alpha k\beta=\alpha(x-x_0)=-\beta(y-y_0)$$

إذن $\alpha k=y_0-y$ و $\beta k=x-x_0$

وبالتالي

$$(x,y)\in S\Rightarrow\exists k\in Z\begin{cases}x=x_0+k\beta\\ y=y_0-k\alpha\end{cases}$$

إذن

$$(x,y)\in S\Rightarrow\exists k\in Z\begin{cases}x=x_0+k\dfrac{b}{a\wedge b}\\ y=y_0-k\dfrac{a}{a\wedge b}\end{cases}$$

إذن

$$S\subset\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle|k\in Z\right\}$$

الخلاصة:

$$S\subset\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b},y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)\middle|k\in Z\right\}$$

لنحدد $54\wedge21$ باستعمال خوارزمية اقليدس:

$$54=21\times2+12$$

$$21 = 12 \times 1 + 9$$

$$12 = 9 \times 1 + 3$$

$$9 = 3 \times 3 + 0$$

وبالتالي

$$54 \wedge 21 = 3$$

نضع $a = 21\ ,\ b = 54$

من خلال السؤال السابق لدينا:

$$\rightarrow 12 = b - 2a$$

$$\rightarrow 9 = a - 12$$

$$= a - (b - 2a)$$

$$= 3a - b$$

$$\rightarrow 3 = 12 - 9$$

$$= (b - 2a) - (3a - b)$$

$$= 2b - 5a$$

إذن $2b - 5a = 3$

وبالتالي لدينا:

$$54 \times 2 + 21 \times (-5) = 3$$

نعتبر المعادلة $54x + 21y = 906$ (E)

لدينا $3 = 21\ \wedge 54$ ولدينا 3 تقسم 906 .

اذن المعادلة (E) تقبل حلولاً في Z^2

حسب السؤال السابق لدينا : $54 \times 2 + 21 \times (-5) = 3$

الفصل الثاني..

بما ان $302 \times 3 = 906$ ، نقوم بالضرب في 302 :

$$54 \times 604 + 21 \times (-1510) = 906$$

إذن الزوج $(x_0, y_0) = (604, -1510)$ حل خاص للمعادلة (E)

و مجموعة الحلول للمعادلة (E)

$$S = \{(604 + 7k, -1510 - 18k) | k \in Z\}$$

المعادلة الثانية[4]**:**

$$24x + 68y = 36 \dots\dots\dots.. (2)$$

الحل:

بما أن $d = (24,68) = 4$ و $4\backslash 36$. إذاً يوجد حل للمعادلة (1) حسب المبرهنة الخامسة و لإيجاد الحل . لاحظ أنه باستخدام القسمة الخوارزمية ، نجد أن $d = 4 = 3(24) + 68(-1)$ ، وعلية فإن $36 = 9d = 9 \times 3 \times 24 + 9 \times 68(-1) = 27 \times 24 + 68(-9)$ ، وبالتالي فإن $x = 27, y = -9$ ، وعلية فإن

$$x = 27 + \frac{68}{4} \times t = 27 + 17t, y = -9 - \frac{24}{4} \times t = -9 - 6t ، t \in Z$$

حل للمعادلة (1)

المعادلة الثالثة[4]**:**

$$5x + 13y = 28 \dots\dots\dots. (3)$$

الحل :

بما أن $(5,13) = 1$،إذاً يوجد حل للمعادلة (2) حسب المبرهنة الخامسة و لإيجاد ذلك الحل ، لاحظ أن $1 = 5(-5) + 13(2)$، إذاً

$28 = 28(5)(-5) + 28(13)(2) = 5(-140) + 13(56)$، وعلية فإن $y = 56$
$x = -140$ حل خاص للمعادلة (2) . أما الحل العام هو $y = y_1 - at = 56 - 5t$
، $x = x_1 + bt = -140 + 13t$ حيث $t \in Z$

ملاحظة:

قد يكون من المفيد إيجاد الحلول الموجبة للمعادلة $ax + by = c$. ولإيجادها يجب أن يكون $x = x_1 + (b/d)t > 0$ ، $y = y_1 - (a/d)t > 0$.

المعادلة الرابعة[4]**:**

أوجد الحلول الموجبة للمعادلة

$$499x - 49y = 300 \dots\dots\dots (4)$$

الحل :

بما أن $(499,49) = 1$،إذاً يوجد حل للمعادلة (3) حسب المبرهنة الخامسة و لإيجاد ذلك الحل ،لاحظ أن

$$499x - 49y = 300 \Rightarrow 499x = 300(mod49) \wedge -49y = 300(mod499)$$

وبحل التطابق $499x = 300(mod49)$ ، نجد أن $9x = 6(mod49)$ ، وعلية فإن $3x = 2(mod49)$، وبالتالي فإن $49z = -2(mod3)$ ،ونجد أن$z = -2 = 1(mod3)$، وعلية فإن $z = 1 + 3t$، $t \in Z$ ، لكن $x = \frac{nz+b}{a}$ ، إذاً

$$x = \frac{49(1+3t)+2}{3} = 17 + 49t \, , \, y = \frac{499(17+49t) - 300}{49} = 167 + 499t$$

ومن الواضح أن$x > 0 \, , \, y > 0$ لكل $t \in Z$ ، وعلية يوجد عدد غير منتهي من الحلول الموجبة إلى المعادلة (3)

المعادلة الخامسة[4]:

حدد الحلول الموجبة (أن وجدت) للمعادلة

$$472x + 531y = 1121 \dots\dots\dots (5)$$

الحل:

بما أن $(472,531) = 59$ و $59 \backslash 1121$. إذاً حل للمعادلة (8) حسب المبرهنة الخامسة و لإيجاد هذا الحل ، لاحظ أن $59 = 472(-1) + 531$

إذاً$1121 = 19(59) = 472(-19) + 531(19)$، وعلية فإن $x_1 = -19 , y_1 = 19$. إما الحل العام فهو

$$x = x_1 + (b/d)t = -19 + \frac{531}{59}t = -19 + 9t$$

$$y = y_1 - (a/d)t = 19 - \frac{472}{59}t = 19 - 8t \quad \text{لكل } t \in Z$$

لكن $x > 0$, $y > 0$ يعني أن $t > \frac{19}{9}$, $t < \frac{19}{8}$. وعلية $\frac{19}{9} < t < \frac{19}{8}$ ، ولكن لا يوجد عدد صحيح بين $\frac{19}{8}, \frac{19}{9}$. إذاً لا يوجد حل صحيح موجب للمعادلة (4)

المعادلة السادسة[4]:

أوجد الحلول الموجبة للمعادلة

$$44x + 20y = 600 \dots\dots\dots (6)$$

الحل:

بما أن $4 = (44,20) = d$ و $4 = 44 + 20(2)$. إذاً
$x_1 = 150 , y_1 = -300$ وعلية فإن $600 = 150(4) = 44(150) + 20(-300)$
ويكون الحل العام هو $x_1 = 150 + 5t \ , y_1 = -300 - 11t \ , t \in Z$ لكن $x > 0$ يعني

الفصل الثاني..

أن $t > -30$ ، أما $y > 0$ فيعني أن $t < \frac{-300}{11} = -27.27$، إذاً $-30 < t < -27.27$
و $t \in Z$ ، يعني أن $t = -29, -28$ وعلية فإن الحلول الموجبة للمعادلة (5) هي

$$x = 150 - 145 = 5 \quad , \quad y = -300 + 319 = 19$$

$$x = 150 - 140 = 10 \quad , \quad y = -300 + 308 = 8$$

المعادلة السابعة[4]**:**

دفع إليك مائة درهم ، فقيل لك ابتع مائة طائر من حمام وبط و دجاج. فإذا كانت البطة بدرهمين ، والحمام كل ثلاثة بدرهم ، والدجاج كل اثنين بدرهم .فكم تشتري من كل نوع

الحل : نفرض أن الحمام=x ، عدد الدجاج=y ، عدد البط=z . إذاً

1. $x + y + z = 100$
2. $\frac{x}{3} + \frac{y}{z} + 2z = 100$

ومن (1) نجد أن $z = 100 - (x + y)$ ، وبالتعويض في (2) ينتج أن

3. $10x + 9y = 600$

لكن $1 = (10,9)$, $1 = 10 - 9$، إذاً $600 = 10(600) + 9(-600)$ ، وعلية فإن
$x_1 = 600 , y_1 = -600 \ , z_1 = 600$ ، وبالتالي فإن

$$x = x_1 + bt = 600 + 9t , y = y_1 - at = -600 - 10t$$

$$z = 100 - (600 + 9t - 600 - 10t) = 100 + t > 0 , \forall t \in N$$

$$x > 0 \Rightarrow t > -\frac{200}{3} = 66.66 \ , \qquad y > 0 \Rightarrow t < -60$$

إذاً $-60 > t > -66.66$ ، وعلية فإن

الفصل الثاني...

$$t = -66 , -65 , 64 , -63 , -62 , -61$$

$$x = 6 \quad , \quad y = 60 \quad , \quad z = 40$$

$$x = 15 \quad , \quad y = 50 \quad , \quad z = 35$$

$$x = 24 \quad , \quad y = 40 \quad , \quad z = 36$$

$$x = 33 \quad , \quad y = 30 \quad , \quad z = 37$$

$$x = 42 \quad , \quad y = 20 \quad , \quad z = 38$$

$$x = 51 \quad , \quad y = 10 \quad , \quad z = 39$$

الفصل الثالث

الطرق المستخدمة في حل المعادلات الديفونتية الخاصة

الطرق المستخدمة في حل المعادلات الديفونتية:

اولاً: حساب المعياري و التكافؤ(*mod*) [4]:

هذه هي واحدة من أكثر التقنيات فائدة، تساعد الاعتبارات الحسابية المعيارية البسيطة (مثل التكافؤ) على تقليل نطاق الحلول الممكنة بشكل كبير. هذه التقنية هي الاكثر نجاحاً في اثبات أن معادلة الديوفنتية معينة غير قابلة للحل.

مثال: أوجد جميع الحلول المنطقية ل

$$x^2 + y^2 = 3$$

الحل:

نظراً لأن x , y أعداد منطقية ، يمكننا كتابتها على النحو التال $x = \frac{X}{Z} \quad , \quad y = \frac{Y}{Z}$ بحيث $X , Y, Z \ \in \mathbb{Z}$ ، $Z \neq 0 \ , \ (X , Y , Z) = 1$، وبالتالي يمكننا اعادة صياغة المثال على النحو التالي :

أوجد جميع الحلول الصحيحة غير الصفرية ل$X^2 + Y^2 = 3Z^2$ بحيث $(X , Y , Z) = 1$ ونحن نعلم أن اي مربع كامل ينتج عنه *1* او 0 (*modulo 3*)،لتكن (X_0, Y_0, Z_0) حلاً لهذه المعادلة بحيث تكون (X_0, Y_0, Z_0)، وهكذا في *modulo 3* :

$$\Rightarrow X_0^2 + Y_0^2 = 3Z_0^2 \qquad (mod3)$$

$$\Rightarrow X_0^2 + Y_0^2 = 0 \qquad (mod3)$$

$$\Rightarrow X_0^2 = 0 \qquad (mod3) \ \ \& \ \Rightarrow Y_0^2 = 0 \qquad (mod3)$$

$$\Rightarrow X_0 = 0 \qquad (mod3) \ \ \& \ \Rightarrow Y_0 = 0 \qquad (mod3) \ldots\ldots..(1)$$

$$\Rightarrow X_0^2 = 0 \qquad (mod9) \ \ \& \ \Rightarrow Y_0^2 = 0 \qquad (mod9)$$

$$\Rightarrow X_0^2 + Y_0^2 = 0 \qquad (mod9)$$

$$\Rightarrow 3Z_0^2 = 0 \qquad (mod9)$$

$$\Rightarrow Z_0^2 = 0 \qquad (mod3)$$

$$\Rightarrow Z_0 = 0 \qquad (mod3) \qquad \ldots\ldots..(2)$$

من (1)و(2) نحصل $(X_0, Y_0, Z_0) = 3$، تناقض مع افتراضنا أن $(X_0, Y_0, Z_0) = 1$. ومن ثم فإن المعادلة المعطاة ليس لها حل في الأعداد النسبية.

ملاحظة: و بالمثل يمكن إثبات أن $x^3 + y^3 + 4z^3 = 9w^3$، ليس لها حل، لأن المكعبات المثالية =0 , ±1 *(mod 9)* .

ثانياً: المتراجحات[7]**:**

في بعض الأحيان نكون قادرين على تحديد الفترات التي يجب أن نبحث فيها عن حلول باستخدام المتراجحات المناسبة

مثال 1: أوجد جميع الحلول الصحيحة ل

$$x^3 + y^3 = (x, y)^2$$

الحل: المعادلة المعطاة تساوي

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

وبالتالي $x, y \in [0,2]$ ، ومن ثم فإن الحلول $(2,2), (2,1), (1,2), (1,0), (0,1)$

مثال 2:أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة ل$n, k_1, k_2 \ldots k_n$ ، بحيث

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 5n - 4 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} = 1$$

الحل: بواسطة المتراجحة الحسابية التوافقية

$$(k_1+k_2+\cdots+k_n)\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n}\right)\geq n^2$$

وبالتالي يجب ان يكون لدينا $5n-4\geq n^2$،لذلك $n^2\leq 4$ ، دون فقدان العمومية، لذلك نفرض أن $k_1\leq\cdots\leq k_n$

اذا كان $n=1$، فيجب أن يكون لدينا $k_1=1$ ، وفيما يلي لا يمكننا الحصول على $k_1=1$

اذا كان $n=2$، بالتالي $(k_1,k_2)\in\{(2,4),(3,3)\}$، لا يعمل أي منهما

اذا كان $n=3$،بالتالي $k_1+k_2+k_3=11$، لذا $2\leq k_1\leq 3$، وبالتالي

$$(k_1+k_2+k_3)\in\{(2,2,7),(2,3,6),(2,4,5),(3,3,5),(3,4,4)\}$$

و فقط $(2,3,6)$ هي التي تعمل

اذا كان $n=4$، يجب ان يكون مساواة في المتراجحه الحسابية التوافقية والتي تحدث فقط عندما

$$k_1=k_2=k_3=k_4=4$$

ومن ثم فإن الحلول هي :

$$\begin{cases} n=1 \quad \text{و} \quad k_1 \\ n=3 \quad \text{و} \quad (k_1,k_2,k_3) \qquad \text{بالتقليب بين القيم} \ (2,3,6) \\ n=4 \quad \text{و} \quad (k_1,k_2,k_3,k_4)=4 \end{cases}$$

ثالثاً: طريقة النسب النهائية[7]:

لتكنP خاصيه تتعلق بالأعداد الصحيحة غير السالبة ، ولتكن $\{P(n)\}_{n\geq 1}$ هي تسلسل الفرضيات

إذن :

P(n) نعني أن *n* تحقق الخاصية *P*

يمكن استخدام الطرق التالية لأثبات أن فرضية *P(n)* خاطئ لكل*n*الكبيرة

1. طريقة النسب المحددة

لتكن*k* عدد صحيح موجب لنفرض أن :

- *P(K)* غير صحيحة
- متى تكون *P(m)* صحيحة لكل عدد صحيح *m>k* ، و بالتالي يجب أن يكون هناك عدد صحيح أصغر *j*،$m > j > k$، يكون *P(j)* صحيحاً وبالتالي *P(n)* غير صحيحة لكل $n \geq k$

ملاحظة: هذه الطريقة تتعارض مع مبدأ الاستقراء الرياضي (صيغة قوية)

2. طريقة النسب اللانهائية

لتكن*k* عدد صحيح موجب لنفرض أن :

- متى تكون *P(m)* لكل عدد صحيح *m>k* ، وبالتالي يجب أن يكون هناك عدد صحيح أصغر *j*، $m > j > k$ ، يكون *P(j)* صحيحاً وبالتالي *P(n)* غير صحيحة لكل $n > k$

تتضمن طريقة النسب اللانهائية حالتين سنستخدمهما في حل المعادلات الديوفانتينية:

I.ليس هناك اي سلسلة من النسب اللانهائية للأعداد الصحيحة غير السالبة ،
إذا كان n_0 أصغر عدد صحيح موجب يحقق *P(n)* ، بالتالي فإن *P(n)* خاطئ لكل $n < n_0$

II.أذا كانت سلسلة الأعداد الصحيحة $(n_i)_{i\geq 1}$ تحقق المتراجحات $n_1 \geq n_2 \geq \ldots$ ،وهناك i_0.وبالتالي $n_{i_0} = n_{i_0+1} = \ldots$

نطبق هذه الطريقة عند وجود جل للمعادلة الديوفانتينية المعطاة و نريد اثبات ان هذا هو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة

مثال1: حل المعادلة في الأعداد الصحيحة غير السالبة

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3$$

الحل: يمكننا ملاحظة أن $(0,0,0)$ هو حل المعادلة المعطاة ، سنتحقق من أنه لا يوجد أي حلول أخرى. لنحاول التحقق من صحة *(I)* لهذه الحالة .

لتكن(x_1, x_2, x_3) حلول غير بسيطة *(non-trivial)*

$$\Rightarrow\ x_1^3 + 2y_1^3 = 4z_1^3$$

سنطبق برهان التكافؤ، بما أن الطرف الايمن زوجي ، فيجب ان يكون الطرف اليسر زوجي ايضاً، وبالتالي x_1^3 زوجي ، هذا يعني أن $2|x_1$ ، وبالتالي $x_1 = 2x_2$ ، للبعض $x_1 > x_2$

الأن نستبدل هذا في المعادلة اعلاه للحصول على :

$$\Rightarrow\ 4x_2^3 + y_1^3 = 2z_1^3$$

مجدداً نطبق برهان التكافؤ $z_1 = 2z_2$ ، للبعض $z_1 > z_2$.نستبدل هذا في المعادلة اعلاه للحصول على

$$\Rightarrow\ x_2^3 + 2y_2^3 = 4z_2^3$$

و بذلك نكون قد انشأنا حلاً جديداً (x_2, y_2, z_2) وهو أصغر من الحل السابق، وبالتالي من خلال تكرار الطريقة اعلاه يمكننا أنشا تسلسل تناقصي لانهائي $..< x_1 > x_2$ بحيث يكون $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq 1}$ هو حل للمعادلة المعطاة .

لكن x_n عدد صحيح غير سالب ، وبالتالي هذا يتناقض مع (I) وبالتالي فإن (0,0,0) هو الحل غير السلبي الوحيد للمعادلة المعطاة.

المثال2:اوجد جميع ازواج الأعداد الصحيحة الموجبة (a, b) بحيث $ab + a + b$ يقسم $a^2 + b^2 + 1$

الحل: يمكن كتابة شرط القسمة على النحو التالي

$$k(a, b, ab) = a^2 + b^2 + 1$$

لبعض الأعداد الصحيحة الإيجابية k، ومن ثم بطريقة التجربة والخطأ نجد أن تبادل $(a, b) = (1,1), (1,4), (4,9), (9,16)$ تحقق هذه المعادلة الديوفانتينية ، و بناءً على ذلك نفترض أن ما $a = b = 1$ او a و b عبارة عن مربعات متتالية هي الحلول الممكنة "فقط" ، إذا كان $k = 1$ فإن معادلتنا الديوفانتينية تساوي

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$$

والتي نحصل منها على متباينات مناسبة $a = b = 1$. إذا كانت $k=2$ ، وبالتالي فإن معادلتنا الديوفانتينية تساوي

$$4a = (a - b - 1)^2$$

نجعل a مربعاً لذا نقول $a = d^2$. وبالتالي $b - d^2 - 1 = \pm 2d$، إذن $b = (d \pm 1)^2$

aوb مربعات متتالية

وهكذا أثبتنا أن تخميننا نصف صحيح ، والأن ما يتبقى هو إثبات أن هذه هي الحلول الوحيدة .
الأن افتراض أن هناك حلاً مع $k \geq 3$ ، و لتكن (a, b) هو الحل مع كونه "ادنى" و $a \leq b$ ، نكتب معادلتنا الديوفانتينية في صورة معادلة تربيعية في b :

$$b^2 - k(a+1)b + (a^2 - ka + 1) = 0$$

نظراً لأن أحد الجذرين ،b،هو عدد صحيح، فإن الجذر الأخر، الذي نسميه r ، هو ايضاً عدد صحيح. بما أن معادلتنا الديوفانتينية يجب أن تكون صحيحة مع r بدلاً من b ،فإننا نستنتج $r > 0$.
لأن $a \geq b$ و حاصل ضرب الجذور، $a^2 - ka + 1 < a^2$ ، يجب ان يكون لدينا $r < a$.
لكن (r, a) هو حل لمعادلة ديوفانتينية معينة، مما يتعارض مع الحد الأدنى لـa، وبالتالي فإن $k \geq 3$ لا يوجد حل لمعادلتنا الديوفانتينية. وبالتالي كان تخميننا صحيحاً وحيث أن$a = b = 1$ او a و b عباره عن مربعات متتالية توفر جميع أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة (a, b) بحيث $ab + a + b$ يقسم $a^2 + b^2 + 1$.

رابعاً: طريقة اويلر[4]:

وتعتمد هذه الطريقة على كون مجموع أو فرق بين عددين صحيحين يكون عدداً صحيحاً، ونوضح هذه الطريقة بمثالين.

مثال 1: حل المعادلة

$$5x + 10y + 6z = 61 \ldots \ldots \ldots . (1)$$

الحل:

نختار المجهول الذي قيمة معاملة المطلقة هي الصغرى فنجد أنه 6 ثم نقسم طرفي المعادلة على ذلك المعامل ،فنجد أن

$$\frac{5}{2}x+\frac{5}{3}y+z=\frac{61}{6}$$

ومنها نجد أن

$$z=\frac{61}{6}-\frac{5}{2}x-\frac{5}{3}=10+\frac{1}{6}-2x-\frac{1}{2}x-y\frac{2}{3}y\ \ldots\ldots\ldots..(2)$$

نأخذ الجزء الكسري ونفرض أنه t،إذاً

$$t_1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\ \ldots\ldots\ldots..(3)$$

ومنها نجد أن $6t_1=1-3x-4y$، وعليه فإن

$$y=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}t_1=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-t_1-\frac{1}{2}t_1\ \ldots\ldots\ldots..(4)$$

نأخذ الجزء الكسري ونفرضه t_2، إذاً $t_2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}t_1$، وعليه فإن $4t_2=1-3x-2t_1$، ومنها نجد أن

$$x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t_1-\frac{4}{3}t_2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t_1-t_2-\frac{1}{3}t_2\ \ldots\ldots..(5)$$

وعليه فإن $t_3=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t_1-\frac{1}{3}t_2$ ، ومنها نجد أن $3t_3=1-2t_1-t_2$

وعليه فإن

$$t_2=1-2t_1-3t_3\ \ldots\ldots\ldots..(6)$$

نتوقف هنا لأن معامل أحد المتغيرات أصبح واحد وهو معامل t_2، ومن (5) و (6) نجد أن

$$x=2t_1+4t_3-1\quad,\quad t_1,t_3\epsilon Z\ \ldots\ldots...(7)$$

ومن (4)و(7) نجد أن

$$y=1-3t_1-3t_3\ \ldots\ldots\ldots(8)$$

من (7)و(8)و(2) نجد أن

$$z = 11 - 5t_3$$

وعندما $t_1 = 2 , t_3 = 0$، نجد أن $x = 3 \;,\; y = -5 \;,\; z = 11$

وعندما $t_1 = -9 , t_3 = 6$، نجد أن $x = 5 \;,\; y = 10 \;,\; z = 19$

وعندما $t_1 = -5 , t_3 = 4$، نجد أن $x = 5 \;,\; y = 4 \;,\; z = -99$

مثال2: حل المعادلة

$$15x + 12y + 30z = 24 \dots\dots(1)$$

الحل:

بما أن $(15,12,30) = 3$ و $3/24$. إذاً يوجد حب للمعادلة (1) و لإيجاد ذلك الحل نقسم طرفي المعادلة على معامل y، فنجد أن

$$\frac{5}{4}x + y + \frac{5}{2}z = 2 \dots\dots(2)$$

ومنها نجد أن

$$y = 2 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{2}z = 2 - x - \frac{1}{4}x - 2z - \frac{1}{2}z \dots\dots(3)$$

و عليه فإن

$$t_1 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}z \dots\dots(4)$$

وعليه فإن $4t_1 = -x - 2z$ ، وبالتالي فإن $x + 2z + 4t_1 = 5$، ونتوقف هنا لأن أصغر معامل هو واحد. وعليه فإن

$$x = -2z - 4t_1 \dots\dots(5)$$

ومن(3)و(5) ينتج أن $y = 2 + 5t_1$ ، و بوضع $z = t_2$ يكون الحل العام هو
$x = -2t_2 - 4t_1\ , y = 2 + 5t_1\ , z = t_2$، حيث $t_1, t_2 \in Z$.

وعندما $t_1 = t_2 = 1$، نجد أن $x = -6\ ,\ y = 7\ ,\ z = 1$ حل للمعادلة (1)

وعندما $t_1 = -1\ , t_2 = 1$، نجد أن $x = 2\ ,\ y = -3\ ,\ z = 1$ حل للمعادلة (1)

الخاتمة:

من خلال تناول المعادلات الديفونتية خلال البحث تم التوصل الى اهميتها وضرورة اعطاء اهتمام اكبر ولها وذلك:

(1) لقد وجدنا ان للمعادلات الديفونتية دور في حل المسائل فالعديد من المسائل التي تطلب منا تكون اجاباتها اعداد صحيحة وعندها لا يمكن التوصل إلى الحل الا باستخدام هذا النوع من المعادلات كما لاحظنا من الأسئلة المطروحة في بحثنا السابق حيث ان هذه المعادلات تفيد بشكل كبير لا يمكن أن ندرك أهميته الا عند تطبيقه في ايجاد الحلول ..

(2) كما وجدنا أن هناك العديد من الطرق لحل المعادلات الديفونية منها ما هو تقليدي كالطرق المذكورة في بحثنا ومنها ما هو متقدم مثل ايجاد الحل العقدي للمعادلة الديفوننية وغيرها طرق عديدة حيث أن كل معادلة ديفوننية تتطلب طريقة من هذه الطرق لحلها تختف بحسب طبيعة المعادلة مما يسهل حصر الحلول الممكنة وايجادها بدقة .

المصادر:

1) *Dickson, Leonard Eugene. "History of the theory of numbers, Volume II: Diophantine analysis." AMC 10 (1919): 12.*
2) *Grechuk, Bogdan. "Diophantine equations: a systematic approach." arXiv preprint arXiv:2108.08705 (2021).*
3) *Korpal, Gaurish. "Diophantine Equations." Summer Internship Project Report, guided by Prof. SA Katre (18 May 2015–16 June 2015) (2015).*
4) فالح بن عمران الدوسري، "مقدمة في نظرية الأعداد." (2018).
5) لورا ديب ، المعادلات الديفونتية، المركز الوطني للمتميزين، 2015م.
6) المعادلات الديفونتية الخطية
mailto:https://lagrida.com/mathAr/theorie_nombres/exercice-50.htm
7) معروف عبد الرحمن سمحان واخرون، نظرية الاعداد، ط1، مكتبة الملك فهد للنشر، السعودية،2015م.