****

**جامعة ميسان**

**كلية التربية**

**قسم الرياضيات**

**حل معادلة فريدهولم باستخدام طريقة الهوموتوبي**

بحث تخرج مقدم الى قسم الرياضيات /جامعة ميسان كلية التربية كجزء من متطلبات الحصول على شهادة البكالوريوس

اسم مقدم البحث

زينب رحيم فاضل

أشراف

م. احمد كريم

 **2024 1445 هـ**

**بسم اللة الرحمن الرحيم**

**قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ**

**صدق اللة العلي العظيم**

**سورة الزمر الاية (8)**

**الاهداء**

الحمد للة حبا وشكرا وامتنانا ما كنت لافعل هذا لو لا فضل اللة فالحمد للة على البدء وعلى الختام .

( واخر دعواهم الحمد للة رب العالمين )

اهدي هذا النجاح لنفسي اولا ثم الى كل من سعي معي لاتمام هذه المسيرة دمتم لي سندا لا عمر اه...

اهدي ثواب هذا البحث الى من لا ينفصل اسمة عن اسمي الى مأمني الوحيد فرحتي الدائمة الى الذي يسابق طريقي ليمهدة لي الى مصدر قوتي وفخري لطالما عاهدة بهذا النجاح ها انا اتممت وعدي واهديته اليك \***والدي الحبيب**\*

والى نبراس ايامي ووهج حياتي الى التي ضلت دعواتها تضم اسمي دائما الى من افنت عمرها في سبيل ان احقق طموحي واحلق في اعالي المراتب الى من أرى الحياة من فوهة الامل المنبعثة من عينيها معلمتي الاولى ,دكتورتي الاولى, صديقة ايامي اليك \***والدتي الحنونة**\*

والى ملهمي نجاحي صناع قوتي صفوة ايامي وسلوة اوقاتي الى الشموع التي تنير لي الطريق الى قرة عيني \***أخوتي**\*

لم تكن الرحلة قصيرة ولم تكن الامور يسرة ولكن بحول اللة ..فعلتها

**المحتوى**

|  |  |
| --- | --- |
| **الموضوع** | **رقم الصفحة** |
| **الاية** | **2** |
| **الاهداء** | **3** |
| **المحتوى** | **4** |
| **الملخص** | **5** |
| **الفصل الاول** | **6** |
| **مقدمة من المعادلات التكاملية** | **7** |
| **المعادلات التكاملية الخطية** | **8** |
| **المعادلات التكاملية غير الخطية** | **9** |
| **مفاهيم** | **12** |
| **الفصل الثاني** | **13** |
| **معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الاول** | **14** |
| **معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني** | **16** |
| **طريقة حل المتسلسلة** | **18** |
| **طريقة التشويش** | **21** |
| **طريقة التحليل** | **22** |
| **الفصل الثالث** | **23** |
| **معادلات فريدهولم من النوع الاول** | **24** |
| **معادلات فريدهولم من النوع الثاني** | **25** |
| **مثال 1** | **26** |
| **مثال 2** | **27** |
| **مثال عن الطريقة المباشرة** | **28** |
| **المصادر** | **31** |

**الملخص:-**

يناقش هذا البحث المعادلات التكاملية طريقة حل معادلة فريد هولم باستخدام طريقة الهوموتوبي .

استعرضنا في الفصل الاول من هذا البحث المقدمة وتعريف المعادلات التكاملية والمفاهيم الاساسية كان الهدف منها التعرف على معنى المعادلات التكاملية وانواعها المستخدمة في البحث .

اما في الفصل الثاني فقد استعرضنا بعض انواع المعادلات التكاملية وهي الخطية والغير خطية ومعادلتي فولتيرا و فريدهولم وقد تعرفنا على معادلة فريد هولم من النوع الاول والنوع الثاني وتعرفنا على طريقة حل معادلة فريدهولم باستخدام طريقة الهوموتوبي.

اما في الفصل الثالث تناولنا بعض الامثلة لمعادلات فريدهوام التكاملية باستخدام طريقة الهوموتوبي .

**الفصل الاول**

**الفصل الاول**

**مقدمة من المعادلات التكاملية**

ان ظهورالمعادلات التكاملية , كان بحاجة الرياضيين الى معالجة بعض المشاكل في الهندسة الرياضية , ومشاكل الاهتزازات في الميكانيك , فكان اول من الف في هذا المجال (فتيوفولتير) في اواخر القرن 19 م . حيث وضع المفاهيم الاساسية لهذه النظرية , لكن لم تكن لدية طريقة الحل .

ذلك مما مهد الطريق (لفريد هولم) سنة 1900م لاعطاء حل لهذة المعادلات وفتح بابا واسعا للبحث في هذه المجال حيث ظهرت فيما بعد انواعى جديدة للمعادلات التكاملية خاضة لغير الخطية .

 لذا سنحاول قي هذه البحث اعطاء بعض المفاهيم والطرق الحل المتعلقة بالمعادلات التكاملية الغير الخطية وسنبتعد قدر الامكان عن الجانب النظري للبحث ونكثر من الامثلة العلمية دون ان نخل بالدقة العلمية لكي تكون المعلومة سهلة المأخذ عظيمة الفائدة .

تلعب المعادلالت التكاملية دورا مهما في العديد من الابحاث النظرية والتطبيقية نظرا لامكانية التعبير عن المعادلات التكاملية كمؤثر تكاملي مستمر وبالتالي نمذجة بعض المسائل في الابحاث التي قيل المؤثر التكاملي نموذجا لها للتوضيف الرياضي للمسألة المعالجة , ومن هنا ترى ان المعادلات التكاملية تلعب دورا اساسيا للنمذجة الرياضية ذات المؤثرات التكاملية ققي ميكانيك الاوساط المستمرة نجد مسائل المرونة , كثيرا من التطبيقات الميكانيكية وذلك من اجل الاجسام القابلة للتشوه والتي تتمتع بسلوك مرن لا خطي,كما يمكن تعبير عن سلوك الاوساط اللزجة المرنه ذات الذاكرة الطويلة بمعادلة فولتيرا التكاملية . ولاكثر من ذالك فأن التابع المجهول فيها وهي تابع من نمط المنقطع والذي يمكن ان ينتمي الى فضائات سوبولوف بشكل عام ونرى تطبيقات اخرى في الانشاءات المعمارية وغيرها من الميادين التطبيقية كما ان هناك تطبيقات كثيرة تستخدم حساب التحولات في مجال الاكترونيات والميكانيك التحليلي وغيرهما من مجالات الفيزياء .

**[2-1]المعادلات التكاملية الخطية [3]:-**

نقول عن المعادلة التكاملية أنها خطيه أذا وفقط أذا ظهرت الدالة المجهولة u تحت اشارة التكامل بشكل خطي أما

اذا ستبدلت الدالة المجهولة u بدوال من الشكل

فاننا نقول ان المعادلة التكاملية غير الخطية .

تنقسم المعادلات التكاملية الخطية بشكل اساسي ضمن صنفين اساسيين هما فريد هولم fredholm)) التكاملية ومعادلة فولتيرا (volterra) التكاملية

الا اننا سنمير اربعة اصناف اخرى بالاضافة الى الصنفيين الاساسيين وهي :-

1- معادلات فريدهولم التكاملية

2- معادلات فولتيرا التكاملية

3-المعادلات التكاملية التفاضلية

4- المعادلات التكاملية الشاذة

5- معادلات فولتيرا – قريدهولم التكاملية

6- معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية – التفاضلية

 **[3-1]المعادلات التكاملية الغير الخطية [3]**

نقول عن المعادلات الغير الخطية الخطية هي معادلة

1. مجهولة فيها دالة غالب ما نرمز اليها بالرمز Ø , u أو حرف اخر .
2. تظهر فيها الدالة المجهولة داخل رمز التكامل وقد تضاف الى خارجة
3. تسمي كلا لمعادلة تكاملية غير خطية (Ε) في مجال (I) كل دالة u تحقق (Ε) في (I)

وتكون صورتها

أو

فأذا كان b=x (متغير) فهي معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية اما اذا كان b ثابت فهي معادلة فريد هولم التكاملية غير الخطية وهي محل دراستنا .

حيث ان u هي الدالة المجهولة والتي يطلب تحديدها f هي دالة معلومة معرفة على المجال [ a,b] وهي تالعب نفس دور الدالة الطرف الثاني في المعادلات التفاضلية و k تسمى نواة الحالة وهي دالة ذات متغيرات وهي دالة ذات متغيريين معرفة على المربع

X [a,b] [a,b] = Δ

 و ʎ ثابت يسمى وسيط المعادلة التكاملية

 و f دالة غير خطية في f))u.

**ملاحظة:**

سميت المعادلة التكاملية سابقا بغير خطية لأن الدالة المجهولة u مركبة من دالة غير خطية f

**مثال** /

F(t)=exp(t)→f(x)=

 **[4-1] المعادلات التكاملية**

المعادلات التكاملية في علم الرياضيات هي معادلة حيث يضهر فيها دالة معرفة بجوار اشارة التكامل وهناك صلة كبيرة بين المعادلات التكاملية والمعادلات التفاضلية وفي بعض المسائل يمكن اعادة صياغتها بأحدى الطريقتين على سبيل المثال معادلات ماكسويل [9][8] [7] تالعب المعادلات التكاملية دورا هاما في العديد من الابحاث النظرية والتطبيقية نظرا لامكانية التعبير عن المعادلات التكاملية كمؤثر تكاملي مستمر او غير مستمر وبالتالي نمذجة بعض المسائل في الابحاث التي تقبل المؤثر التكاملي نموذجا لها لتوصيف الرياضي للمسئلة التطبيقية للمعالجة ومن هنا نرى ان المعادلات التكاملية تلعب دورا اساسيا للنمذجة الرياضية ذات المؤثرات التكاملية .

ففي ميكانيك الاوساط المستمرة نجد في مسائلة مرونة كثير من التطبيقات الميكانيكية وذاك من اجل الاجسام القابلة للتشوة والتي تتمتع بسلوك مرن الاخطي كما يمكن الترميز عن سلوك الاوساط للزجة المرنة ذات الذاكرة الطويلة بمعادلة فولتيرا التكاملية ولاكثر من ذالك فان التابع المجهول فيها تابع من نمط المنقطع والذي يمكن ان ينتهي الى فضاءات سولوبوف بشكل عام ونرى تطبيقات اخرى في الانشائات المعمارية وغيرها من الميادين التطبيقية كما ان هناك تطبيقات كثيرة تستخدم نظام التحويلات في مجاللاالاكترونيات والميكانيك التحليلي وغيرها من مجالات الفيرياء .

**النوع الاكثر شيوعا في المعادلات التكاملية يدعى معادلات فريد هولم التكاملية من النوع الاول تكون على شكل**

ومن خلال تدوينات العالم جورج براون اركفين فان هي دالة غير معروفة .

 هي دالة معروفة و k هي دالة من متغيرين معروفة وعادة ما تدعى دالة كيرتل اذا كانت الدالة غير معروفة اوجد داخل وخارج التكامل فانها تدعى دالة فريدولم التكاملية من النوع الثاني واتكون على الشكل:-

حيث المتغير هو معامل غير معروف والذي يالعب دور متجة ذاتي في الجبر الخطي .

واذا كانت احدى النهايات للتكامل متغيرة القيمه فانها تدعى معادلة فولتيرا .

ومعادلة فولتيرا من النوع الاول والثاني تكون على الشكل التالي بالترتيب:-

واذا كانت الدالة في المعادلات السابقة تساوي صفر فنها ادعى معادلة تكاملية متجانسة .

واما اذا كانت بقيمة غير صفرية فانها تدعى معادلة تكاملية غير متجانسة .

**[5-1]مفاهيم :-**

**تعريف 1:-** يتم تعريف الشكل العام لمعادلة فريد هولم التكاملية الخطية على النحو الاتي :-

حيث ان A,B كلاهما ثوابت

و و و هي وضائف معروفة .

بينما هي وظيفة َغير معروفة .

يطلق على A (المعلمة غير الصفرية ) القيمة الذاتية للمعادلة التكاملية تعرف بالدالة نواة المعادلة التكاملية .

**اعريف 2:-** يتم تشكيل المعادلة التكاملية الخطية عن طريق اخذ في المعادلة :-

تعرف المعدلة 2) ) باسم معادلة فريد هولم الكاملية من النوع الثاني .

**تعريف 3 :-** يتم تعريف معادلة فريد هولم التكاملية الغير الخطية من النوع الثاني على النحو الاتي .

حيث هي نواة المعادلة التكاملية هي وظائف معروفه و(x) هي دالة غير معروفة سيتم تحديدها في (5) .

**تعريف 4:-** يتم تعريف معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني على النحو التالي :-

حيث تابعان معلومان هو التابع المجهول و وسيط عددي .

**تعريف 5:-** يتم تعريف معادلة فولتيرا فريدهولم التكاملية على النحو التالي :-

**الفصل الثاني**

 **[2-1]المعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الاول [1]**

فيما يلي نقدم طريقة الهوموتوبي لمعادلات فريدهولم التكاملية من النوع الاول

F(x) =

نحن الان نحدد المعادلة ....

L(u) = f(x) =

تيار هوموتوبي محدب من خلال

H(u,p) =(1-p) u(x) + PL (y)(x) =0

معامل التضمين P يزيد رتابة من 0 الى 1 وتسمح طريقة الهوموتوبي بأستخدام التوسيع

u=

بالتالي

وتقارب المتسلسلة

اذا كانت النواة قابلة للفصل

فأن الشرط التالي

يجب يكون مبررا للتقارب والدليل على هذه الحالة سوف نهتم فقط بالحالة التي يكون فيها

K(x,t)=a(x) h(t)

**[2-2]معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني [1]**

وفيما يلي نقدم طريفة الهوموتوبي للتعامل مع المعادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني

الان نتناول أولا معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الاول

حيث ان u(X)=u(X) بعد ذلك نحدد [0,1] Pe , H(u,P) الهوموتوبي

H(u,0) ,=F(u) , H(u,1) = L(y)

حيث F(U) عامل وظيفي . نحن نقوم ببناء هوموتوبي محدب من خلال

H(u,P)=(1-P) F(u) + PL(u)=0

والهوموتوبي ل P=1 ,P=0 على التوالي .

ومعامل التضمين يزيد رتابة من 1الى 0 كمشكلة تافهه مشوهه بشكل مستمر [10] الى المشكلة الاصلية L(U)=0 والهوموتوبي يسمح باستخدام التوقيع

تتقارب المتسلسلة الى الحل الدالتين في حالة وجود مثل هذا الحل .

استبدال في

بأستخدام F(x)=u(x)=F(x) ومن استخدام المصطلحات بالقوى المماثلة المتضمن p نحصل على

لاحظ ان علاقة التكرار (x) هي نفس طريقة التحليل الاومية القياسية هذا يثبت النظرية التالية .

نظرية طريقة تحلل Adomiam هي طريقة الهوموتربي متماثل مع تماثل متمائل معطى بواسطة

***[*2-3*]معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني [*1*]***

***طريقة حل المتسلسلة :-***

*تسمى الدالة الحقيقية (*r*)*u *التحليلية اذا كانت تحتوي على مشتقات من جميع الرتب الموجودة في متسلسلة تايلور , عند اي نقطة وفي مجالها*

(x-b)

*يتقارب الى f(x)* *في b* *من اجل التبسيط يمكن كتابة بالشكل العام لمتسلسلة تايلور عند x=0*

سيتم استخراج طريقة حل المتسلسلة التي تنبع بشكل اساسي من متسلسلة تايلور للدوال التحليلية لحل معادلات فريدهولم بالتكاملية سوف نفرض ان الحلu(x) *من تقربة التكاملي فريدهولم .*

هي تحليلية , وبالتالي تمتلك سلسلة تايلور بالشكل الوارد اعلى حيث سيتم تحديد المعاملات

وبالشكل المتكرر استبدل

في طرق المعادلة اعلى يعطي

او للتبسيط التي نستخدمها

سيتم دمج مصطلحات الصيغة لاحظ ذلك لاننا نسعى حل السلسلة ثم اذا كان يتضمن وظائف اولية مثل الدوال المثلثية والدوتا الاتية وما الى ذالك يجب استخدام توسعات تايلور للوظائف المرتبطة ب .

تقوم اولا بدمج الجانب الايمن من التكامل ونجمع معاملات القوى المتشابهه ل خ نقوم بعد ذلك بمساواة معاملات القوى المتشابهه ل خ في كل طرفي المعادلة الناتجة للحصول على علافة متكررة سيؤدي حل علاقة التكرار الى التحرير الكامل للمعاملات يتلع حل المتسلسلة مباشرة بعد استبدال معاملات المشتقة ويمكن الحصول على الحل الدقيق وسيتم الحصول علية .

***[2-4]معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني[*1*]***

*سوف نقوم اولا بدراسة معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني*

*مقدمة بواسطة*

*الداله المجهولة* u(x) *التي يتم تحديدها تحت داخل وخارج التكامل ويتم اعطاء النواة* k(x,t) *والداله* f(x)  *دوال ذات قيمة حقيقية و ʎ وهي معامل وفيها يلي سوف نقدم الطرق الجديدة والتقليدية التي سيتم استخدامها للتعامل مع المعادلات فريدهولم التكاملية .*

*طريقة التحليل الادومي*

*تتم تقديم وتطوير طريقة التحليل الاوومي* (ADM) *من قبل*  Gecrge Adomian

*وسيتم توضيح طريقة الاوومي بايجاز .*

*تتكون طريقة التحليل الاوومية من تحلل الدالة غير المعروفة* u(x) *لاي معادلة الى مجموعة عدد لا نهائي من مكونات المحددة بواسطة سلسلة التحلل*

*أو تكافئ*

*حيث سيتم تحديد مكونات*  *بشكل متكرر .*

*تهتم طريقة التحلل الاوومية بايجاد المكونات بشكل فردي .*

*وكما رأينا من قبل بمكن تحديد هذة المكونات يطريقة سهلة من خلال علاقة تكرارية تتضمن عادة تكاملات بسيطة يمكن تقديمها بسهولة .*

*ولانشاء علاقة التكرار نعوض*

*في معادلة فريدهولم التكاملية للحصول على*

*أو تكافئ*

ويتم تعريف المكون الصفري  *بجميع المصطلحات التي لم يتم تصنيفها ضمن علاقة التكامل وهذا يعني ان المكونات للدالة غير المحددة يتم تحديدها بالكامل عن طريق ظبط علاقة التكرار*

ومن هنا يتم تحديد المكونات بشكل كامل .

وتحديد جهه ذالك يمكن الحصول بسهولة على الحل للمعادلة فريدهولم التكاملية

**[2-5]طريقة التشويش المثالي** [1]

وتم استخدامها مؤخرا في الادبيات لحل المشكلات الخطية والغير خطية تجمع طريقة تتم تقديم وتطوير طريقة الهوموتوبي بواسطة Ti-Huan He in [10 ]

الهوموتوبي بين تقنية الهوموتوبي والطوبولوجيا وتقنية الهوموتوبي .

يتم انشاء نموذج متمائل مع معلمة التضمين PE[0,1] وتعتبر المعلمة المعيقة P معلمة صغيرة تم اشتقاق الطريقة وتوضيحها في [10] وتم فحصها العديد من المعادلات التفاضلية . لقد ادى اقتران طريقة الهوموتوبي وطريقة التجانس الى الغاء القيود المفروضة على تقنية الهموتوبي التقليدية [10] وفيما يلي نوضح طريقة الهوموتوبي للتعامل مع معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني والنوع الاول .

**[2-6]طريقة التحليل [1]**

من الواضح ان طريقة التحلل حولت المعادلة التكاملية الى تحديد انيق للمكونات

القابلة للحساب وقد تبين بشكل رسمي اي قبل حالة وجود حل دقيق للمشكلة فان

المتسلسلة التي تم الحصول عليها تتقارب بسرعة كبيرة مع هذا الحل الدقيق يتم

التحقيق بدقة في مفهوم التقارب لسلسلة التحلل من قبل التحديد من رتبها حيث لتاكيد

التقارب السريع لسلسلة الناتجة مع ذالك بالنسبة للمسائل الملموسة حيث لايمكن

الحصول على حل مغلق يتم عادة باستخدام عدد مقطوع من المصطلحات

 لاغراض رقمية كما زاد عدد المكونات التي تستخدمها زادت الدقة التي تحصل

عليها .

**الفصل الثالث**

**مثال عن معادلات فريدهولم التكاملية من نوع الاول [2]**

باستخدام طريقة الهوموتوبي حل معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الاول

Notie that

Using the recurrence rela tion ,we find

*This in turn gives*

And so on consequently ,the approximate solution is givenby

*That converg es to the exact so lution*

**مثال عن معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني[1]**

مثال/ حل معادلات فريد هولم التكاملية من النوع الثاني

.

**مثال/ برهن ان التابع α هو حل للمعادلة**

**التكاملية لفريدهولم التالية[1]:-**

نكتب الطرف الايسر للمعادلة التكاملية بالشكل

نعوض التابع بدلا من في العلاقة السابقة نجد

 *هو حل المعادلة التكاملية*

*سننظر بعد ذلك في معادلة فريدهولم التكاملية الغير الخطية [2]*

***مثال:-***

**مثال/ استخدام الطريقية المباشرة لحل معادلات فريدهولم التكاملية** . [2]

***مثال/[1]***

مثال/ لنعتبر مسألة القيمة الابتدائية التالية [3]

 (x) =2x ux , x ≥ 0 (\*)ú

المزودة بالشرط الابتدائي 1 = (0) u

يمكن بسهولة حل معادلة (\*) من خلال فصل المتحولات واستخدام الشرط الابتدائي الا اننا وبالمكاملة المباشره لطرفي المعادلة (\*) بعد تبديل الرمز (x) بالرمز (t) مع المجال [0,x] نجد ان

وبتعويض الشرط الابتدائي تصبح المعادلة السابقة بالشكل

x) = 1+)u

وهي معادلة مشابهة للمعادلة (1) فيها

K(x,t)=2t , f(x) = 1 , β(x) , α(x) = 0

**المصادر**

1-Abdul –majidwazwaz, linear and –linear intearal aqutions methods and app lications, sait xavier university chicago ,USA. 2011 .

2- H.T. Davis , Introduction to nonlineiar , Differential and Equations ,Dover publications , new york , 1962.

3-A.Terri ,Introduction to Integral Equations with APPlicat ions ,wiley new york 1999.

4-T.uren appell espedi to de pascale alfonso vignoli ,Non-linear spectral theory , waltar de gr uyter , Berlin , Now york , 2004 .

5-M.rahaman ,intagral equations and their appli cations , Dalhousie universisty ,Canada ,2007 .

6-S. Krasnov ,A.Kisslev , G. Makarenko , equa tions in tgrales ,Problmes et exercices ,dithons Mir ,Mos –Cou , 1981 .

7-Abdul – Majaidwaz , Afirst course inintegral equnations , Sait xavier university chicago .USA 2015 [second edition]

8-Msc safaa Hasan Rasool ,lecture of in tegrah equations , (singularintegral equation ). USA 2016 .

9-Petegral T. Collins, Diffrenbial and integral equatvons 2006.

10- Diogo ,To, and lima , P. (1997) .An extrapolation method for avotterra intergral equation witheakly singular kenel . Npplied numerical mathematies 131-148 .

 معروف بوت لليث . المعادلات التكاملية وحساب التحولات , جامعة حلب-11

 (2007)

 أ.د محمد مناف الحمد , المعادلات التكاملية وحساب التحزلات , جامعت دمشق -12

 (2014)

تم بحمد اللة