جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـامعة ميسان
كليــة التربية
قسم الرياضيات

التنبؤ بأستخدام السلاسل الزمنية

بحث
مقدم الى مجلس كلية التربية /جامعة ميسان وهي جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

تقدم بها

زهراء فائز عبد الباري

باشراف
د.سارة عبد الحسين

2025م **1446هـ**

بسم الله الرحمن الرحيم

((يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ))

صدق الله العلي العظيم

(11) المجادلة

الاهداء

إلى قائم آل محمد إمام العصر والزمان الحجة المنتظر (عج) .

إلى من افضالها على نفسي، ولم لا ؟ فقد ضحت من أجلي ولم تدخر جهداً في سبيل إسعادي على الدوام . . . . . (أمي الحبيبة) .

إلى صاحب الوجه الطيب، والأفعال الحسنة، الذي لم يبخل علي طيلة حياته . . (والدي العزيز) .

إلى من اضاءوا لي طريق العلم، اساتذتي الأفاضل، . . . . إلى من تشرفت بمعرفتهم أصدقائي الأعزاء اهدي لكم ثمرة جهدي المتواضع .

"الشكر وتقدير"

كن عالماً، فإن لم تستطع فكن معلماً، فإن لم تستطع فأحب العلماء، فإن لم تستطع فلا تبغضهم.

أتقدم بخالص الشكر والتقدير إلى والدي العزيزين، اللذين كانا لي النور الذي أستنير به في حياتي، وزرعا في نفسي القيم والمبادئ السامية.

كما أخص بالشكر أساتذتي الأفاضل، الذين لم يدخروا جهداً في تعليمنا وتوجيهنا، فكان لهم الفضل بعد الله فيما وصلنا إليه.

ولا أنسى زملائي الأعزاء، الذين كانوا خير رفقاء في هذه المسيرة، فبالتعاون والمشاركة تحقق هذا الإنجاز.

ومن الله التوفيق والسداد

المستخلص

يهدف هذا البحث إلى استكشاف منهجيات التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية، والتي تُعد أداة أساسية في مختلف المجالات كالاقتصاد والطاقة وإدارة الأعمال. يتناول البحث مفهوم السلاسل الزمنية ومكوناتها الرئيسية، بما في ذلك الاتجاه العام، التغيرات الموسمية، التغيرات الدورية، والتغيرات العشوائية..

يستعرض البحث نماذج تحليل السلاسل الزمنية المختلفة، بما في ذلك نماذج الانحدار الذاتي(AR) نماذج المتوسطات المتحركة(MA) ، والنماذج المختلطة (ARMA)و(ARIMA)، بالإضافة إلى نماذج السلاسل الزمنية الموسمية .(SAR, SMA, SARMA) كما يسلط الضوء على طريقة بوكس–جنكنز كمنهجية شاملة لبناء نماذج السلاسل الزمنية والتنبؤ، مستعرضاً مراحلها الأربع: التشخيص، تقدير المعالم، اختبار دقة النموذج، والتنبؤ.

يتضمن البحث تطبيقان عمليان يوضح كيفية استخدام بعض هذه الطرق، مثل طريقة متوسطي نصفي السلسلة وطريقة المربعات الصغرى وأسلوب المتوسط المتحرك البسيط، للتنبؤ بناءً على بيانات فعلية لإنتاج الماء الصافي. يلخص البحث إلى أن منهجية بوكس–جنكنز ونماذج السلاسل الزمنية توفر أدوات قوية وموثوقة للتنبؤ بالظواهر المختلفة، مع التأكيد على أهمية اختيار النموذج المناسب واختبار دقته لضمان تنبؤات دقيقة ومتسقة إحصائياً.

قائمة المحتويات

العنوان	الصفحة
ايه من القران	I
الاهداء	II
شكروتقدير	III
المستلخص	IV
قائمة المحتويات	V
الفصل الأول	
المقدمة 1-1	1
تعريف السلسلة الزمنية 1-2	2
أنواع السلاسل الزمنية 1-3	3
اهداف تحليل السلاسل الزمنية 1-4	3
مركبات السلسلة الزمنية 1-5	4
طرق الاتجاه العام 1-6	7
أستقرارية السلسلة الزمنية 1-7	11
نماذج السلاسل الزمنية المستقرة ومميزاتها 1-8	13
نماذج المختلطة المتكاملة 1-9	22
نماذج السلاسل الزمنية الموسمية 1-10	23
طريقة بوكس جنكنز 1-11	24
الفصل الثاني	
تطبيق 1	26
تطبيق 2	31
المصادر	39

الفصل الأول/ الجانب النظري

(1-1)المقدمة:

شهد العالم في العقود الأخيرة تطوراً هائلاً في جمع البيانات وتحليلها مما أسهم في تعزيز القدرة على استشراف المستقبل وتوجيه القرارات الإستراتيجية في مختلف المجالات. يُعد التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية أحد الأدوات العلمية البارزة التي تستخدم لتحليل البيانات الزمنية زمنياً بهدف التنبؤ بالقيم المستقبلية بناءً على البيانات التاريخية. يكتسب تحليل السلاسل الزمنية أهمية كبيرة في العديد من المجالات مثل الاقتصاد، حيث يستخدم لتوقع أسعار الأسهم وأسعار الصرف، وفي الطاقة لتقدير الطلب المستقبلي على الكهرباء، وكذلك في مجالات أخرى كإدارة الأعمال والرعاية الصحية. تعتمد هذه التقنية على فهم العوامل الزمنية مثل الاتجاه العام والتقلبات الموسمية والدورية والضوضاء العشوائية، مما يجعلها أداة قوية وفعالة لدعم عمليات التخطيط واتخاذ القرار.

في هذا البحث، سنتناول النماذج الإحصائية لتحليل السلاسل الزمنية وسنتناول النماذج التقليدية مثل نماذج ARIMA

كما سنستعرض التحديات التي تواجه عملية التنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية مع تقديم تطبيق عملي لدراسة حالة توضح خطوات تحليل البيانات الزمنية واستخدامها للتنبؤ.

هدف البحث

يهدف تحليل السلاسل الزمنية لتحقيق عدة غايات أساسية. أولاً، يسعى هذا التحليل إلى تقديم وصف دقيق للخصائص والملامح المميزة للعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية قيد الدراسة. ثانياً، يهدف إلى بناء نموذج رياضي أو إحصائي قادر على تفسير وشرح سلوك السلسلة الزمنية بالاعتماد على متغيرات وعلاقات تربط بين القيم المشاهدة. ثالثاً، تُستخدم النتائج المستخلصة من الوصف وبناء النموذج للتنبؤ بسلوك السلسلة الزمنية في المستقبل، معتمدًا على المعلومات والبيانات التاريخية المتاحة. وأخيرًا، يساهم تحليل السلاسل الزمنية في القدرة على التحكم في العملية التي تولد هذه السلسلة، مما يسمح باتخاذ قرارات مستنيرة للتأثير على مسار الظاهرة المستقبلية

(2−1)تعريف السلسلة الزمنية Time series [5]

أنها عبارة عن مجموعة من المشاهدات المرتبطة مع بعضها البعض مرتبطة أو متسلسلة مع الزمن (time) أو تعرف بأنها مجموعة من الملاحظات التي تقاس في فترات زمنية محددة غالباً ما تكون متساوية في الزمن وتكون بصورة غير عشوائية بالزمن وفقا للقانون الاحصائي.

أما الشكل الرياضي لتعريف السلسلة الزمنية فهو باستعمال القيم$[\ldots\ldots X_3, X_2, X_1]$ والتي يأخذها المتغير Xعند الزمن

$[\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \ldots.]$وهنا يعني أن المتغير X هو دالة في الزمن t أي:

$$Xt = f(t)$$

(1-3)أنواع السلاسل الزمنية من حيث طبيعة المعالم [6][4]

أن طبيعة معالم النموذج هي التي تحدد نوع السلسلة الزمنية أي حساب تغير الزمني ومنها.

1-السلاسل الزمنية ذات النموذج المتقطع:

في هذا النموذج يكون عامل الزمن xt كمتغير متقطع يأخذ القيم 1,2,3,10,... وهو متغير مستقل ويكون قيمة الظاهرة yt تعتمد على قيم المتغير الزمن المختلفة والمتقطعة في فترة زمنية إلى آخره مثل المبيعات الشهرية في إحدى المؤسسات التجارية خلال سنة معينة أو أسعار الأسواق المالية للأسواق العالمية خلال فترة زمنية معينة.

2-السلاسل الزمنية ذات النموذج المستمر:

في هذا النموذج تكون قيم xt غير متقطعة (أي مستمر) حيث أن قيم قيمة الزمن لا يمكن فصلها بشكل دقيق.

مثال ذلك الإشارات الصوتية أو إشارات خرائط رسم القلب.

(1-4)أهداف تحليل السلاسل الزمنية :

1-الحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة للعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية.

2-إنشاء نموذج لتفسير وشرح سلوك السلسلة بدلالة متغيرات أخرى تربط القيم المشاهدة لبعضها البعض.

3-استخدام النتائج (1)، (2) للتنبؤ بسلوك السلسلة في المستقبل وذلك اعتمادا على معلومات الماضي.

4-التحكم في العملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية.

(1-5)مركبات السلسلة الزمنية [2][3] Time series components

تتكون السلسلة الزمنية عادة من مجموعة من المركبات التي عن طريق تفاعلها تمنحنا قيم للسلسلة الزمنية وتساعدنا على معرفة سلوك الظاهرة وعند رسم السلسلة تظهر لنا أربعة عناصر مكونة ومؤثرة في السلسلة الزمنية.

أ. الاتجاه العام: Secular Trend

إن المقصود بالاتجاه هو الزيادة أو النقصان التدريجي في قيم السلسلة الزمنية بمرور الزمن الا أنه لا يلاحظ في المدى القصير وانما يكون واضحا في المدى الطويلة.

ب. التغيرات الموسمية: Seasonal Variation

إن المقصود بالموسمية تلك التغيرات التي تحدث في قيم السلسلة الزمنية بانتظام في مدد زمنية محددة وعادة ما تكون علاقة بفصول السنة أو الشهر أو الأسبوع أو اليوم أو غيرها.

ج. التغيرات الدورية:Cyclical Variation

إن التغيرات الدورية وهي التغيرات التي تحدث في قيم السلسلة الزمنية وهي تختلف عن التغيرات الموسمية كونها تحدث في مدد زمنية أطول وهي تتكرر باستمرار عبر مدد زمنية يتراوح طولها ما بين (3-15) سنة لأنها عادة ما تحدث في مدد منتظمة.

د. التغيرات العشوائية:Irregular Variation Random

إن المقصود بالتغيرات العشوائية هي التغيرات التي تحدث نتيجة لظروف غير متوقعة كالاضطرابات الطبيعية والحروب أو أي عوامل أخرى لم تدخلها في حساباتنا وبالنسبة للطاقة الكهربائية فإن التغيرات العشوائية كثيرة الحدوث.

ويتم الكشف عن مركبات السلسلة الزمنية عن طريق الاختبارات الاحصائية، منها اختبار ديربن واطسن للتأكد ما إذا كانت البيانات مستقلة، واختبار مربع كاي للتأكد ما إذا كانت البيانات موزعة طبيعياً، واختبار رتب سبيرمان للكشف عن العلاقة بين السلسلة الزمنية والزمن، ويعتبر هذا الاختبار من أهم المركبات التي تكون خط السلسلة الزمنية، ويمكن هذا الاختبار بمعامل ارتباط سبيرمان.

Spearman's Correlation Coefficientوالذي يأخذ الصيغة الآتية:

$$R_s = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

إذ أن :di يمثل الفرق بين رتب قيم السلسلة الزمنية وبين رتب قيم الزمن.

n :تمثل عدد المشاهدات.

فرضية الاختبار هي : H0:ρs=0 H1:ρs=0 :

للفرق بين القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط الرتبي والقيمة الجدولية للمعمل نفسه فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية فإن السلسلة تحتوي على الاتجاه العام وللكشف عن المركبة الموسمية (الفصلية) نستخدم أحد الاختبارات الإحصائية الأكثر شيوعاً وهو اختبار كرسكال – واليس (Kruskall–Wallis) ويرمز له بالرمز .KW

فرضية الاختبار هي:

$$H_0: \rho_0 = 0$$

$$H_0: \rho_s \neq 0$$

ثم نقارن بين القيمة المحسوبة لمعامل الارتباط الرتبي والقيمة الجدولية للمعامل نفسه فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية فإن السلسلة تحتوي على الاتجاه العام وبالعكس.

وللكشف عن المركبة الموسمية (الفصلية) نستخدم أحد الاختبارات الإحصائية الأكثر تداولاً وهو اختبار كروسكال–ويليز (Kruskall–Wallis) ويرمز له بالرمز KW

فرضية الاختبار هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

وتعطى علاقته كما يأتي :

$$KW = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{K} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

إذ أن:

R_i: تمثل مجموع رتب المشاهدات

N: مشاهدات السلسلة الزمنية بعد إزالة الاتجاه العام

n_i: مشاهدات السلسلة الزمنية عند k وطول الموسم وتقارن قيمة (kw) مع قيمة (x^2) المجدولة بدرجة حرية (k−1) وبمستوى معنوية (α) معين فإذا كانت قيمة kw أصغر من قيمة (x^2) المجدولة فإن السلسلة الزمنية لا تحتوي على تأثيرات موسمية. [7]

(1-6)طرق الاتجاه العام [8][2][5]

1- طريقة التمهيد باليد (الشكل الانتشاري) Scatter Diagram Method

يمكن الحصول على الاتجاه العام من خلال رسم خط مستقيم أو منحنى لحركة السلسلة الزمنية خلال فترة زمنية طويلة نسبياً، وهذا الخط يمثل اتجاهاً عاماً يتغير بمعدل ثابت، فعندما تتزايد السلسلة بمعدل ثابت يمكن تمثيلها بخط مستقيم ذي ميل موجب، وعندما تتناقص السلسلة مع الزمن بمعدل ثابت يمكن أيضاً تمثيلها بخط مستقيم ولكن بميل سالب، ويعد الاتجاه العام من أكثر عناصر السلسلة الزمنية استخداما في أغراض التنبؤ

2- طريقة متوسطي نصفي السلسلة Semi-Averages Method

بموجب هذه الطريقة تنصف السلسلة إلى نصفين يفضل أن يكونا متساويين، وفي حالة السنوات الفردية يمكن حذف السنة الوسطية بمساواتها إلى الصفر أو تستبعد سنة من نهاية أو بداية السلسلة، ثم يتم إيجاد الوسط الحسابي للقيم في كل نصف فتحصل على نقطتين، وتوضع قيمة كل متوسط مقابل السنة الوسطى في كلا النصفين، ثم ترسم مستقيما بين النقطتين فيتكون خط الاتجاه العام، وإذا كان عدد السنوات في كل نصف زوجياً يكون موقع قيمة الوسط في منتصف السنتين الوسيطتين بالنسبة لكل نصف .

أما عن عيوب هذه الطريقة فتتمثل بالآتي

1- تطبق هذه الطريقة فقط في حالة السلاسل الزمنية ذات السنوات الزوجية، فإذا كان عدد السنوات فرديا، فنظرا لأنه لا يمكن تقسيمها إلى جزأين متساويين، يفضل حذف سنة منها (السنة الأولى أو السنة الوسطى) ليصبح عدد سنواتها زوجياً.

2- تستخدم هذه الطريقة إذا كان الاتجاه العام في صورة خط مستقيم فقط أي أنها لا تطبق إذا كان الاتجاه العام في صورة منحنى.

3- نظرا لأن خط الاتجاه العام يعتمد على الوسط الحسابي في كلا جزئي السلسلة، ولما كان الأخير يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة في أي من جزئي السلسلة، ومن ثم فإن خط الاتجاه العام لا يكون في موضعه الصحيح وبالتالي يكون التنبؤ باستخدام معادلته مشكوكاً في دقته.

لكن رغم هذه العيوب إلا أنها من الطرق السهلة والبسيطة التي لا تحتاج إلى مجهود حسابي كبير.

3- طريقة المتوسطات المتحركة Moving Averages Method

تعد طريقة المتوسطات المتحركة من أكثر الطرق دقة، وتستخدم هذه الطريقة لتمهيد السلسلة الزمنية، وبالتالي تمهيد خط الاتجاه العام للسلسلة من خلال تخليص السلسلة من التقلبات (التذبذبات) الشديدة قصيرة الأمد التي تعاني منها السلسلة الزمنية.

ويعرف المتوسط المتحرك بأنه عبارة عن: "الوسط الحسابي لعدد من المشاهدات المتعاقبة في السلسلة بطول معين"، وغالبا ما يكون هذا الطول (3) سنوات أو (4) سنوات إلخ، ويفضل اختيار طول المتوسط المتحرك فردياً (Odd) من أجل الحصول على متوسطات متحركة مركزية.

ولا بد لنا هنا من التنبه لما يلي:

1- عندما يكون طول المتوسط المتحرك الذي يتم اختياره عدداً فردياً (Odd)، فإن المتوسط المتحرك الناتج، يسمى بالمتوسط المتحرك المركزي.

2- كلما كان طول المتوسط المتحرك كبيراً، أصبحت السلسلة الزمنية أكثر نعومة (Smooth)، ولكن سيؤدي ذلك إلى فقدان بعض قيم السلسلة الزمنية.

ومن عيوب طريقة المتوسطات المتحركة :

1- أن عدد القيم الاتجاهية التي يتم الحصول عليها تقل عن عدد القيم الأصلية للسلسلة الزمنية، حيث تفقد عدداً من القيمة الاتجاهية في أول وآخر السلسلة ويزيد عدد القيم الاتجاهية المفقودة كلما طالت دورة المتوسط المتحرك.

2- أن كل متوسط متحرك يمكن أن يتأثر بالقيم المتطرفة في بيانات طول دورة المتوسط المتحرك.

3- الحصول على القيم الاتجاهية دون معادلة للاتجاه العام كما جاء في طريقة متوسطي نصفي السلسلة، الأمر الذي لا يمكننا من التنبؤ بالقيم الاتجاهية للظاهرة موضوع الدراسة في نقاط زمنية مستقبلية أي لاحقة لسنوات السلسلة الزمنية.

4- الاعتماد على الخبرة الشخصية للحصول على أنسب طول للدورة للوسط المتحرك الذي يختلف من ظاهرة لأخرى.

4-طريقة المربعات الصغرى

تعتبر من أدق وأفضل الطرق حيث لا تعتمد على التقدير الشخصي وإنما يتم صياغتها رياضياً ويتم إيجاد معادلة خط الاتجاه العام وذلك بجعل مجموع مربعات انحرافات القيم الأصلية عن القيم الاتجاهية أصغر ما يمكن ، ومن الممكن استخدام قيم من الماضي والحاضر والمستقبل بموجب معادلة يتم إيجادها والتي نحتاجها في عملية التنبؤ داخل وخارج السلسلة من خلال معادلة خط الانحدار.

$$\hat{Y} = a + bx$$

أما صيغ حساب مقدرات معالم خط الاتجاه العام فهي كالآتي:

$$b = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

x: تمثل متغير الزمن و y: تمثل قيم الظاهرة.

ثم نعوض قيم x في المعادلة لنحصل على $\hat{Y}$.

ملاحظة/ يمكن تبسيط العمليات الحسابية من خلال طرح حد ثابت $k1$ من المتغير x والثابت الافتراضي الآخر $k2$ من المتغير y.

فعلى فرض أن $w = y - k2, z = x - k1$ فنحصل على

$$b = \frac{\Sigma zw - \frac{\Sigma z \Sigma w}{n}}{\Sigma z^2 - \frac{(\Sigma z)^2}{n}}$$

$$a^* = \bar{w} - b\bar{z}$$

$$w_i = a^* + bz_i$$

w_i: متغير الاستجابة لمعادلة خط الانحدار بعد إجراء التحويلات على البيانات الأصلية.

z_i: المتغير التوضيحي للتحويلات على البيانات الأصلية.

a^*: الحد الثابت للبيانات المحولة.

b: معامل ميل خط الانحدار.

ويمكن الرجوع إلى الصيغة الأصلية بدلالة y, x من خلال التعويض بقيم الثوابت$k2, k1$ بالمعادلة 2 للحصول على خط الاتجاه العام في المعادلة 1

$$(y - k2) = a^* + b(x - k1)$$

$$y = a^* + k2 + bx - b * k1$$

$$y = (a^* - b * k1 + k2) + bx$$

$$\hat{Y} = a + bx$$

حيث أن:

$$a = a^* - b * k1 + k2$$

الحد الثابت لمعادلة خط الانحدار للبيانات الأصلية.

(7-1)استقرارية السلسلة الزمنية [9][15] **Time Series Stationary**

تعد استقرارية السلسلة خاصية مهمة في تحليل السلاسل الزمنية, وكذلك في إيجاد النموذج الرياضي المناسب لها، فالسلسلة الزمنية المستقرة هي السلسلة التي تكون متجانسة زمنياً أي أن رسم السلسلة في المدة $(t, t + h)$ يكون بعض الأحيان مطابقاً لرسم السلسلة في مدة أخرى $(s, s + h)$. ويمكننا القول أن السلسلة مستقرة إذا حققت الشروط الآتية:

(1) ثبات متوسط قيمها عبر الزمن أي أن قيم السلسلة تتذبذب عن متوسط حسابي ثابت ومستقل عن الزمن

$$E(X_t) = \mu$$

(2) ثبوت قيمة التباين .

$$var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2$$

(3) امتلاك السلسلتين على ارتباط وتباين معتمد على الإزاحة k إذ يعتمد على القيمة المطلقة لـ (k) فقط $[X_t - \mu][X_{t-k} - \mu]$. كذلك يمكن التحقق من استقرارية السلسلة باستعمال دوال الارتباط الذاتي عن طريق استخدام مقياس مربع كاي إذ يعبر عن هذا المقياس بالمعادلة الآتية:

$$X^2(m-1) = n\sum_{k=1}^{m} \rho_k^2$$

إذ ρ_k يمثل الارتباط الذاتي لقيم X لإزاحة قدرها k, أما mفتشير إلى أكبر فرق زمني وعادة تساوي$(n/2)$ إذ تتم مقارنة قيمة مربع كاي المحسوبة مع القيمة الجدولية فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية فإنها معنوية ذلك يشير إلى أن البيانات غير مستقرة، أما إذا كانت القيمة المحسوبة أقل من الجدولية فإنها غير معنوية وذلك يشير إلى أن البيانات مستقرة [13].

وللتعرف على حالة عدم الاستقرارية في السلاسل الزمنية يمكن فحص دالة الارتباط الذاتي إذ أن قيم معاملات دالة الارتباط الذاتي في هذه الحالة لا تؤول إلى الصفر بعد الإزاحة الثانية أو الثالثة وإنما تبقى قيمها كبيرة لعدد من الإزاحات، وهناك نوعان من السلاسل الزمنية غير المستقرة.

الأول: عدم الاستقرارية حول المتوسط (Non stationary about the mean)

فتعني عدم تذبذب السلسلة الزمنية حول متوسط ثابت والسلسلة الزمنية تكون غير مستقرة عن المتوسط وفي هذه الحالة يتم أخذ الفروق المناسبة (differences) لتحقيق الاستقرارية في السلسلة الزمنية.

الثاني: عدم الاستقرارية حول التباين (Non stationary about the Variance)

وفي هذه الحالة عندما تتذبذب السلسلة الزمنية حول تباين غير ثابت. ويمكن إزالته عن طريق التحويل اللوغاريتمي أو الأسي (تحويلات القوى) (power transformation) لغرض تحويل السلسلة غير المستقرة عن التباين إلى مستقرة.

(1-8) نماذج السلاسل الزمنية المستقرة ومميزاتها

Stationary Time Series Models and Their Characteristics

[10][4][14][16]

نماذج الانحدار الذاتي Autoregressive Model (AR)

يعرف الانحدار الذاتي بأنه انحدار القيمة الحالية للسلسلة على قيم السلسلة نفسها في فترات سابقة وهناك نوعان من نماذج الانحدار الذاتي وكما يأتي:

أولاً: نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR (1)

First-order Autoregressive models:

يقال أن السلسلة الزمنية تتبع عملية انحدار ذاتي من الرتبة الأولى إذا أمكن التعبير عن القيمة الحالية للسلسلة كدالة خطية في القيم السابقة لها فضلاً عن حد الخطأ العشوائي (Random error) وتصاغ هذه الدالة بالنموذج:

$$X_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t$$

إذ أن: ϕ هي معلمة الانحدار الذاتي.

a_t: هي عملية تشويش أبيض ذات وسط حسابي قدره صفراً وتباين ثابت قدره σ_a^2.

وعند استخدامنا لمعامل الإزاحة للخلف (Back Shift Operator) والذي يرمز له بالرمز (B) ويعرف رياضياً:

$$\emptyset B X_t = X_{t-1}$$

إذ أن:

B: معامل الإزاحة للخلف.

X_t: قيم السلسلة الحالية.

X_{t-1}: قيم السلسلة السابقة.

إذن صيغة نموذج الانحدار الذاتي باستعمال معامل الإزاحة للخلف هي:

$$X_t = \phi_1 B X_t + a_t$$

$$(1 - \phi_1 B) X_t = a_t$$

وواضح أن النموذج يمكن عكسه وأن شرط الاستقرارية هو أن يكون جذر $(1 - \phi_1 B) = 0$ خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي واحد. وهذا يعني $|B| > 1$ يؤدي هذا إلى أن قيمة المعلمة $|\phi_1| < 1$ كشرط للاستقرارية.

مميزات نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR (1)

:First-order Autoregressive model Characteristics

1- الوسط

$$E(X_t) = 0$$

2- التباين

$$var(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}, |\phi_1| < 1$$

3- التغاير الذاتي

$$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1}) = \phi_1 \gamma_0$$

$$\gamma_2 = E(X_t X_{t-2}) = \phi_1 \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}, k \geq 1$$

4- دالة الارتباط الذاتي للنموذج

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k, \quad k \geq 1,2$$

5- دالة الارتباط الذاتي الجزئي للنموذج يمكن اشتقاقها كالآتي:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0$$

$$\phi_{33} = 0$$

$$\vdots$$

$$\phi_{kk} = 0, k \geq 2$$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \emptyset, & K = 1 \\ 0, & K \geq 2 \end{cases}$$

ثانياً: نماذج الانحدار الذاتي من الرتبة AR (p) :

Higher-order Autoregressive models:

إن معادلة نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة p هي:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t$$

و يمكن كتابة النموذج بواسطة عامل الإزاحة للخلف على الشكل الآتي:

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \ldots \phi_p B^p\right) X_t = a_t$$

- مميزات نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة AR (p) :

:Higher-order Autoregressive model Characteristics

1- الوسط

$$E(X_t) = 0$$

2- التباين

$$var(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{(1 - \rho_1 \phi_1 - \rho_2 \phi_2 - \ldots - \rho_p \phi_p)}$$

3- الارتباط الذاتي ρ_k يحقق المعادلة التالية:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}; k \geq 1$$

4- الارتباط الذاتي الجزئي (PAC):

أي أنها قيم معنوية غير صفرية $\phi_{kk} \neq 0; k \leq p$

أي أنها قيم صفرية غير معنوية $\phi_{kk} = 0; k > p$

نماذج المتوسطات المتحركة Moving Average models (MA)

نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى:

First-order Moving Average Model

يقال أن السلسلة الزمنية تتبع عمليات المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى إذا تم التعبير عن القيم الحالية كدالة خطية للتغير العشوائي الحالي a_t وتغير العشوائي السابق a_{t-1}. ويعبر عن النموذج بالصيغة الآتية:

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

وباستخدام عامل الارتداد (B) يمكن كتابته بالصيغة الآتية:

$$X_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

إذ أن:

$theta_1$: معلمة نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى.

a_t: هي عمليات تشويش أبيض بوسط حسابي قدره صفراً وتباين ثابت قدره σ_a^2.

مميزات نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الأولى (1) MA:

First-order Moving Average Model Characteristics:

1- الوسط الحسابي للنموذج

$$E(X_t) = 0$$

2- التباين

$$var(X_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_a^2$$

3- التغاير الذاتي

$$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1}) = -\theta_1 \sigma_a^2 = -\theta_1 \gamma_0$$
$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = 0; K \geq 2$$

4- دالة الارتباط الذاتي (ACF) ويتم حسابها بالقسمة على تباين السلسلة:

$$\rho_k = \frac{Y_k}{Y_0} = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & K = 1 \\ 0, & K \geq 2 \end{cases}$$

5- بحل معادلات Yule-Walker باستخدام قانون كريمر التتابعي نحصل على الارتباطات الذاتية الجزئية وكما يلي:

$$\phi_{11} = p_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}, K \geq 2$$

ويلاحظ أن دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) تتضائل أسياً (Exponentially Decays).

نماذج الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة (النموذج المختلط) :

(Autoregressive Moving Average Models) ARMA (p,q)

وهو نموذج مركب من AR و MA ويكون فيه عدد المعلمات (p+q) أما معادلته فتكون على الشكل الآتي:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

ومن أنواع النماذج المختلطة :

أولاً : النموذج المختلط من الرتبة الأولى ARMA (1,1)

first rank Mixed model:

ويشار إلى هذا النموذج بالصيغة الآتية:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

أو

$$(1-\phi_1 B)X_t = (1-\theta_1 B)a_t$$

ولكي يكون النموذج مستقراً فإن القيمة المطلقة للمعامل ϕ_1يجب أن تكون أقل من واحد أي $(|\phi_1| < 1)$.
ولكي يكون النموذج قابلاً للعكس يشترط أن تكون$(|\theta_1| < 1)$.

- مميزات النموذج المختلط من الرتبة الأولى ARMA (1,1)

first rank Mixed model Characteristics:

1- الوسط الحسابي

$$E(X_t) = 0$$

2- التباين

$$var(X_t) = \gamma_0 = E[(\phi_1 X_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})^2] = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

3- التغاير:

$$\gamma_1 = E[X_t X_{t-1}] = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

$$\gamma_2 = E[X_t X_{t-2}] = \phi_1\gamma_1$$

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} = \phi_1^{k-1}Y_1; k \geq 2$$

4- الارتباط الذاتي:

$$\rho_k = \frac{Y_k}{Y_0} = \begin{cases} \frac{(\emptyset_1 - \theta_1)(1 - \emptyset_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\emptyset_1\theta_1}, & K = 1 \\ \emptyset_1 P_{k-1}, & K \geq 2 \end{cases}$$

(1-9)النماذج المختلطة المتكاملة (ARIMA) [11][13]:

Integrated Mixed Models

إن السلاسل الزمنية تكون في أغلب أشكالها غير مستقرة، إذ يتم التعرف عليها عن طريق دالة الارتباطات الذاتية إذ لا تؤول قيمها للصفر بعد الإزاحة الثانية أو الثالثة وإنما تبقى قيمها كبيرة لعدد من الإزاحات. ولغرض تحويل سلسلة زمنية غير مستقرة إلى سلسلة زمنية مستقرة ويتم ذلك باستعمال عامل الفروق الخلفية (Backward difference operator) والذي يتم تعريفه كالآتي:

$$\nabla X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}$$

وبشكل عام وإلى d من الفروق

$$\nabla \mathrm{d} X_t = (1 - B)^d X_t \ldots\ldots (1)$$

فإذا عوضنا عن $\nabla^d X_t$ في المعادلة (1)نحصل على أنموذج جديد يستطيع معالجة نوعاً معيناً من السلاسل الزمنية غير المستقرة التي تسمى المتجانسة والتي يطلق عليها اسم الأنموذج المختلط غير المستقر والذي يرمز إليه بـ ARIMA (p,d,q). وتشير p إلى رتبة الانحدار الذاتي و d إلى رتبة الفروق، و q إلى رتبة المتوسطات المتحركة. وتكتب الصيغة الرياضية لنماذج ARIMA كالآتي:

$$\Phi(B)\nabla^d X_t = \Phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)a_t$$

إذ أن:

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

(1-10)نماذج السلاسل الزمنية الموسمية [3] [11] [14]

Seasonal Time Series Models:

يمكن تسمية كل من نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ARMA (pq) ونماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية ARIMA (pqd) بالنماذج غير الموسمية أو النماذج المتتالية ، التي لا تشمل اثر الموسم ، إذ يتم التعبير عن القيمة الحالية بدلالة عدد من القيم المتتالية السابقة أو عدد من التغيرات العشوائية المتتالية السابقة ، أو كلاهما معا . ولهذا سيتم تسليط الضوء على النماذج الموسمية ، وهي التي تشمل اثر الموسم فقط دون وجود دورة تجارية أو الاتجاه العام . وفي هذه الحالة يتم فيها التعبير عن القيمة الحالية بدلالة قيم الموسم نفسه من الأعوام السابقة الانحدار الذاتي أو التغيرات العشوائية للموسم نفسه من الاعوام السابقة المتوسطات المتحركة أو كلاهما معا ، فضلا عن التغيير العشوائي الحالي في كل نوع من النماذج الثلاثة.

1- نماذج الانحدار الذاتي الموسمية:

Seasonal Autoregressive Models SAR(P)

2- نماذج المتوسطات المتحركة الموسمية:

Seasonal Moving Average Models (SMA):

3-النموذج المختلط (الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة) الموسمي

Seasonal Mixed (Autoregressive and Moving Average) Model (SARMA)

(1-11)طريقة بوكس – جنكنز[6][10] Box – Jenkins method:

يقصد بطريقة بوكس – جنكيز (Box and Jenkins) هي تلك المنهجية التي طبقها كل من (George Box & Gwilyn Jenkins) على السلاسل الزمنية عام 1970. وهذه المنهجية تعتمد في صيغتها على أنموذج الانحدار الذاتي (Autoregressive Model) و أنموذج المتوسطات المتحركة (Moving Average Model) و الأنموذج المختلط (Auto Regressive – Moving Average Model).

إذ تعد عملية بناء أنموذج ((ARIMA (p,d,q) لتمثيل بيانات السلسلة الزمنية واستخدامه لأغراض التنبؤ هي من الطرائق العامة للتنبؤ بمختلف أنواع السلاسل الزمنية (المستقرة وغير المستقرة، الموسمية وغير الموسمية)، فهي لا تفترض نمطاً معيناً في بيانات السلسلة قبل تطبيقها وإنما تبدأ بأنموذج تجريبي يحدد بالاعتماد على دالة الارتباط الذاتي (Auto Correlation Function) ودالة الارتباط الذاتي الجزئي (Partial Auto Correlation Function). وبعد ذلك يتم تقدير معالمه بالاعتماد على مشاهدات السلسلة الزمنية التي تجعل أخطاء التنبؤ أقل ما يمكن، ويستعمل في هذه الطريقة عدداً من المؤشرات والاختبارات التي يمكن الاعتماد عليها للحكم على مدى كون النموذج ملائماً أم لا. وتعتمد هذه الطريقة على أربع مراحل لغرض التنبؤ وكالآتي:

1. مرحلة التشخيص Identification.
2. مرحلة تقدير المعالم Estimation.
3. مرحلة اختبار دقة الأنموذج Diagnostic Checking.
4. مرحلة التنبؤ Forecasting.

وهناك سمات متعددة تمتاز بها منهجية بوكس جنكنز أهمها [10]:

1- أنه نظام للنمذجة والتنبؤ منظم وشامل وموثوق به، وهذا يعني أنها تقدم حلولاً شاملة لجميع مراحل تحليل السلاسل الزمنية بدءاً من اختيار النموذج الملائم ومروراً بتقدير معالم هذا النموذج وتشخيصه وانتهاءً بالتنبؤ بالقيم المستقبلية.

2- أنه لا يفترض الاستقلال بين مشاهدات السلسلة بل يستغل أنماط الارتباط الكامنة في البيانات عن طريق نماذج الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التي تتميز بقدرتها وقوتها على عكس أنماط الكثير من السلاسل الزمنية التي نصادفها في التطبيقات العملية، وهذا يؤدي في النهاية إلى تنبؤات موثوق بها ومتسقة إحصائياً.

3- قد يعطي تنبؤات أدق من تلك التي نحصل عليها باستعمال أي أسلوب آخر لاسيما إذا توفرت البيانات الإحصائية ذات العلاقة.

4- أنها تعطي مدد ثقة ملائمة للقيم المستقبلية للبيانات الموسمية وغير الموسمية بينما تفشل طرائق أخرى في ذلك.

الفصل الثاني/الجانب التطبيقي

تطبيق 1/ البيانات التالية تمثل انتاج الماء الصافي مليون متر مكعب لمدينة بغداد وحسب الاشهر لسنة 2024 .

المطلوب :-أيجاد معادلة الاتجاه العام

1-بطريقة متوسطي نصفي السلسلة الزمنية

2-بطريقة المربعات الصغرى

الزمن	الانتاج
كانون الثاني	55
شباط	51
آذار	55
نيسان	61
ايار	66
حزيران	67
تموز	71
اب	71
ايلول	70
تشرين الأول	67

تشرين الثاني	62
كانون الأول	60

طريقة متوسطي السلسلة الزمنية

الزمن	y الانتاج	X
كانون الثاني	55	1
شباط	51	2
آذار	55	3
نيسان	61	4
ايار	66	5
حزيران	67	6
تموز	71	7
اب	71	8
ايلول	70	9
تشرين الاول	67	10
تشرين الثاني	62	11
كانون الاول	60	12

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n1} x_{1t}}{n_1} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n2} x_{2t}}{n_2} = \frac{7+8+9+10+11+12}{6} = \frac{57}{6} = 9.5$$

`

$$\overline{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n1} y_{1t}}{n_1} = \frac{55+51+55+61+66+67}{6} = 59.17$$

$$y_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n2} y_{2t}}{n_2} = \frac{71+71+70+67+62+60}{6} = 66.83$$

$$b = \frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} = \frac{66.83 - 59.17}{9.5 - 3.5} = 1.28$$

$$a = \overline{y}_1 - b\overline{x}_1 = 59.17 - 1.28(3.5) = 54.69$$

معادلة خط الاتجاه العام كالاتي :

$$\hat{Y} = a + bx = 54.69 + 1.28x$$

طريقة المربعات الصغرى بافتراض ان k1=6 و k2=60

X	y	z=x−6	w=y−60	z2	ZW
1	55	−5	−5	25	25
2	51	−4	−9	16	36
3	55	−3	−5	9	15
4	61	−2	1	4	−2
5	66	−1	6	1	−6
6	67	0	7	0	0
7	71	1	11	1	11
8	71	2	11	4	22
9	70	3	10	9	30
10	67	4	7	16	28
11	62	5	2	25	10
12	60	6	0	36	0
		6	36	146	169

$$b = \frac{\Sigma zw - \frac{\Sigma z \Sigma w}{n}}{\Sigma z^2 - \frac{(\Sigma z)^2}{n}} = \frac{169 - \frac{(6)(36)}{12}}{146 - \frac{(6)^2}{12}} = 1.06$$

$$\overline{w} = \frac{\Sigma w}{n} = \frac{36}{12} = 3$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma z}{n} = \frac{6}{12} = 0.5$$

$$a^* = \overline{w} - b\bar{z} = 3 - 1.06(0.5) = 2.47$$

اما معادلة خط الاتجاه العام بالرجوع الى القيم الاصلية

$$(y - k2) = a^* + b(x - k1)$$

$$(y - 60) = 2.47 + 1.06(x - 6)$$

$$\hat{Y} = 2.47 - 1.06 * (6) + 60 + 1.06x$$

$$\hat{Y} = 56.11 + 1.06x$$

تطبيق 2 / استخدم أسلوب المتوسط المتحرك البسيط لتمهيد البيانات التالية على فرض أن طول المتوسط المتحرك $(m = 3)$

السنة	القيمة
2001	23
2002	27
2003	33
2004	35
2005	40
2006	42
2007	45
2008	50
2009	52
2010	55
2011	52
2012	55

الحل :-

عندما $t = 3$

$$F_{(3)} = \frac{\sum_{i=3-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{3}$$

$$F_{(3)} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{23 + 27 + 33}{3} = 27.667$$

والتنبؤ

$$f_{(3+1)} = f_{(4)} = F_{(3)} = 27.667$$

وبخطأ تنبؤي عند الفترة الزمنية الرابعة

$$e_4 = X_4 - f_4 = 35 - 27.667 = 7.333$$

وعند الفترة: t=4

$$F_{(4)} = \frac{\sum_{i=4-3+1}^{4} X_i}{3} = \frac{\sum_{i=2}^{4} X_i}{3} = \frac{X_2 + X_3 + X_4}{3}$$

$$F_{(4)} = \frac{27 + 33 + 35}{3} = 31.667$$

هنا يتم اهمال المشاهدة الأولى

واضافة المشاهدة الرابعة

ويمكن ان نحصل على التنبؤ

$$f_{(4+1)} = f_5 = F_4 = 31.667$$

وبخطأ تنبؤي عند الفترة الزمنية الخامسة

$$e_5 = X_5 - f_5 = 40 - 31.667 = 8.333$$

وعند الفترة $t = 5$

والتنبؤ

$$F_5 = \frac{\sum_{i=5-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_3 + X_4 + X_5}{3} = \frac{33 + 35 + 40}{3} = 36$$

$$f_{(5+1)} = f_6 = F_5 = 36$$

والخطأ التنبؤي

$$e_6 = X_6 - f_6 = 42 - 36 = 6$$

وعند الفترةt=6

$$F_6 = \frac{\sum_{i=6-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_4 + X_5 + X_6}{3} = \frac{35 + 40 + 42}{3} = 39$$

والتنبؤ

$$f_{(6+1)} = f_7 = F_6 = 39$$

والخطأ التنبؤي

$$e_7 = X_7 - f_7 = 45 - 39 = 6$$

وعند الفترة $t = 7$

$$F_7 = \frac{\sum_{i=7-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_5 + X_6 + X_7}{3} = \frac{40 + 42 + 45}{3} = 42.333$$

والتنبؤ

$$f_{(7+1)} = f_8 = F_7 = 42.333$$

وبخطأ تنبؤي

$$e_8 = X_8 - f_8 = 50 - 42.333 = 7.667$$

وعند الفترة $t = 8$

$$F_8 = \frac{\sum_{i=8-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_6 + X_7 + X_8}{3} = \frac{42 + 45 + 50}{3} = 45.667$$

والتنبؤ

$$f_{(8+1)} = f_9 = F_8 = 45.667$$

وبخطأ تنبؤي

$$e_9 = X_9 - f_9 = 52 - 45.667 = 6.333$$

وعندما $t = 9$

$$F_9 = \frac{\sum_{i=9-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_7 + X_8 + X_9}{3} = \frac{45 + 50 + 52}{3} = 49$$

والتنبؤ لها

$$f_{(9+1)} = f_{10} = F_9 = 49$$

وبخطأ تنبؤي

$$e_{10} = X_{10} - f_{10} = 55 - 49 = 6$$

وعندما $t = 10$

$$F_{10} = \frac{\sum_{i=10-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_8 + X_9 + X_{10}}{3} = \frac{50 + 52 + 55}{3} = 52.333$$

والتنبؤ

$$f_{(10+1)} = f_{11} = F_{(10)} = 52.333$$

وبخطأ تنبؤي

$$e_{11} = X_{11} - f_{11} = 52 - 52.333 = -0.333$$

عندما t=11

$$F_{11} = \frac{\sum_{i=1-3+1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_9 + X_{10} + X_{11}}{3} = \frac{52 + 55 + 52}{3} = 53$$

والتنبؤ

$$f_{(11+1)} = f_{12} = F_{11} = 53$$

والخطأ التنبؤي

$$e_{12} = X_{12} - f_{12} = 55 - 53 = 2$$

عندما t=12

$$F_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{3} = \frac{X_{10} + X_{11} + X_{12}}{3} = \frac{55 + 52 + 55}{3} = 54$$

والتنبؤ

$$f_{(12+1)} = f_{13} = F_{12} = 54$$

المصادر

أولا : – المصادر العربية :

1. الجبوري عبير حسن على التنبؤ بأسعار النفط العراقي للعام 2010 باستخدام السلاسل الزمنية " مجلة جامعة بابل العلوم الإنسانية المجلد 18 العدد (1) 2010
2. الحافظ على سيف الدين " تحليل السلاسل الزمنية لبعض انواع مرض السرطان في العراق . رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد قسم الاحصاء ، الجامعة المستنصرية 2006.
3. الركابي مخلص عبد الله استخدام منهجية بوكس وجنكينز في التنبؤ بأعداد المعتمرين من الخارج شهريا " معهد خادم الحرمين الشريفين لأبحاث الحج والعمرة جامعة أم القرى 2014
4. الناصر عبد المجيد حمزه ورشيد ظافر حسين " الارقام القياسية وتحليل السلاسل الزمنية " دار الجامعية للطباعة والنشر العراق بغداد 2014.
5. الشعراوي سمير مصطفى مقدمة في تحليل الحديث للسلاسل الزمنية " مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز 2004.
6. شومان عبد اللطيف حسن والصراف نزار مصطفى " السلاسل الزمنية والأرقام القياسية الداشر دار الدكتور للعلوم الإدارية والاقتصلية بعاد 2013.
7. محمد شيخي " طرق الاقتصاد القياسي محاضرات وتطبيقات " دار الحامد للنشر والتوزيع . 2012 عمان
8. مولود جشمان " السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ قصيرة المدى ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 2010.

9. والتر فاندل السلاسل الزمنية من الوجهة التطبيقية ونماذج بوكس جنكيز . " التعريب ومراجعة د عبد المرضي حامد عزام د . احمد حسين هارون دار المريخ – السعودية 1990

ثانيا :– المصادر الأجنبية :

10. Box G. E. P. and Jenkins GM " Time Series Analysis and control " , San Francisco . Holden Day San Francisco , 1976 .
11. Box GE . P. and Jenkins , G. M. " Time Series Analysis and control " , Fifth Edition , John Wiley & Sons , Inc , Canada , 2016
12. Cryer , D. & Chan K. " Time Series Analysis With Applications in R " , Second Edition , Springer Science Business Media , LLC , New York , USA , 2008
13. Gujarati D.N & Porter . D. C , " Basic Econometrics 5 th " , Published by McGraw - Hill / Irwin , a business unit of The McGraw - Hill Companies , New York , 2009
14. TSAY . R.S , " Analysis of Financial Time Series " , Second Edition , John Wiley & Sons , Inc , Printed in the United States of America . , (2005) .
15. Voind , H.D , " Time Series analysis " , Economic Fordham University , Bronex , New York ,. 1999 .
16. Wei , William , W.S , " Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods " , 2nd , Addison , Wesley publishing Company , 2006 .