جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ميسان
كلية التربية
قسم الرياضيات

استخدام متسلسلات القوى في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

بحث

مقدم الى مجلس كلية التربية / جامعة ميسان وهو جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

من قِبل الطالبة

حميدة كريم مهدي

بإشراف

أ.م.د. محمد جبار حواس

1446هـ 2025 م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ﴾

صدق الله العلي العظيم

(سورة المجادلة، آية ١١)

الإهداء

﴿وآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ العَالَمِينَ﴾

الحمد لله عند البدء وعند الختام

من قال أنا لها نالها

لقد كان طريقا طويلة مليئة بالإخفاقات والنجاحات فخورين بكفاحنا لتحقيق أحلامنا لحظة لطالما انتظرتها وحلمت بها في حكاية اكتملت فصولها

إلى من علمني العطاء بدون انتظار إلى من أحمل اسمه بكل افتخار إلى من كلله الله بالهيبة والوقار **والدي العزيز**

إلى حبيبتي قرة عيني إلى القلب النابض إلى من كانت دعواتها الصادقة سر نجاحي **أمي الغالية**

إلى **أخواتي** سندي في الحياة أدامكم الله ضلعا ثابتا لي

إلى كل **أفراد عائلتي** وإلى كل **صديقاتي** بدون استثناء

إلى كل **الأساتذة** الأفاضل الذين قدموا لنا يد المساعدة

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل

وفقني الله وإياكم إلى الخير

شكر وتقدير

بعد شكري الله عز وجل ان اعانني على انجاز هذا البحث المتواضع اتقدم بجزيل الشكر والامتنان الى الاستاذ الفاضل (محمد جبار حواس) على تفضله بقبول الاشراف على بحثي هذا وعلى ما اسداه لي من نصائح وارشادات في كل خطواتي ولا يفوتني لهذه المناسبة أن أوجه شكري واحترامي الى كل من ساعدني من قريب أو بعيد في انجاز هذا الجهد المتواضع...

بِسمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

خلاصة البحث

تناولت في بحثي هذا متسلسلات القوى والمعادلات الاعتيادية

ففي الفصل الاول درسنا تعريف متسلسلات القوى ومجال المصطلح العام لها وبعض المبرهنات والامثلة وتم ذكر مبرهنة كوشي هادمارد وكذلك تقارب سلسلة المشتقات وتكامل وتفاضل متسلسلة القوى.

وفي الفصل الثاني تناولنا تعريف المعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها كذلك حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية وتم ذكر طرق حل المعادلات الاعتيادية منها طريقة فصل المتغيرات وحل المعادلة التفاضلية المتجانسة والخطية ومعادلة برنولي ومعادلة لاگرانج ومعادلة كليدو مع الأمثلة لهذه الطرق

اما الفصل الثالث درسنا حل المعادلات التفاضلية بمتسلسلة القوى x وذكرنا النقاط المنفردة والاعتيادية للمعادلة التفاضلية كذلك طريقة فروبينوس ومعادلة بيسل وليجندر مع بعض الأمثلة، متسلسلات القوى هي حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية بل يمكن اعتبارها أداة تحليلية دقيقة وشاملة تفتح آفاق واسعة امام الباحثين في معالجة المسائل المعقدة في مجالات متعددة.

المحتويات

الفصل الأول

1.1. المقدمة

تُعد المعادلات التفاضلية من الأدوات الرياضية الأساسية التي تُستخدم لنمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية والاقتصادية. ومن بين الطرق المتاحة لحل هذه المعادلات، تبرز متسلسلات القوى كأداة فعالة تُوفر حلولًا تقريبية دقيقة، خاصة عندما يصعب إيجاد حلول تحليلية مباشرة.

تعتمد هذه الطريقة على تمثيل الحل على شكل متسلسلة قوى حول نقطة معينة، ثم إيجاد معاملات هذه المتسلسلة باستخدام تقنيات رياضية مثل الاشتقاق والتكامل. وتستخدم هذه الطريقة بشكل واسع في الفيزياء والهندسة.

يهدف هذا البحث إلى استعراض مفهوم متسلسلات القوى، وآلية استخدامها في حل المعادلات التفاضلية، مع تقديم أمثلة تطبيقية توضح أهميتها ودورها في تبسيط الحسابات الرياضية وتوفير حلول دقيقة للمسائل المعقدة.

1.2. متسلسلة القوى [1]

متسلسلة القوى هي سلسلة من الدوال من النموذج

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n$

حيث أن c هي معاملات (ثوابت) و a نقطة مركزية ثابتة

1.3. مجال المصطلح العام

$u_n(x) = c_n(x-a)^n$

هو IR ولكن مجموعة التقارب تعتمد كل المعاملات c_n الخاصية الوحيدة للتقارب التي لا تعتمد على c_n هي حقيقة ان أي سلسلة خاصة توجد بشكل قوى تتقارب عند نقطتها المركزية $x = a$ الى المعامل $c_{\circ}$ وهناك حالة متكررة في النظرية والتطبيقات وهي سلسلة قوى مركزها $a = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$

في هذا الفصل سوف نقوم بتحليل خصائص تقارب سلسلة القوى وخصائص مجموعها

سننظر في بعض تطبيقات سلسلة القوى

الأهداف الرئيسية لهذا الفصل إيجاد مجموع متسلسلات القوى المختلفة، تمثل الدوال الأولية في سلسلة قوى. هناك عدد قليل من سلاسل تمكننا من إيجاد مجموعها الدقيق

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} vx \in (-1,1)$$

لقد حسبنا بالفعل مجموع السلسلة الهندسية وبعض عواقبها المباشرة

ضع في اعتبارك السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ يظهر تطبيق اختبار دالامبيرت على الفور ان هذه السلسلة تتقارب عند (1,-1) وتتباعد خارج [1,-1] منذ

$|\mathrm{D}_n| = \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \frac{n+1}{n}|x| \to |x|$

عند نقاط النهاية $x = -1 \, , x = 1$

نحصل على سلسلة متباعدة. المصطلحات العامة

(-1) لا تتقرب من 0 واخيراً يتقارب المصطلح العام الى 0 على (-1,1) لكنه هذا التقارب غير موحد على (1,-1)

$$\sup_{\forall x \in (-1,1)} |nx^n - 0| = n$$

$$\sup_{\forall x \in (-1,1)} |x^n| = n \nrightarrow 0$$

وهو ما يعني التقارب الغير منتظم للسلسلة على (1,-1) مع ذلك يكشف اختبار revals ان السلسلة تتقارب بشكل منتظم على أي فتره $[-a,a], 0 < a < 1$

$\frac{na^n}{b^n} \to 0$ لأي $0 < a < b < 1$

$|nx^n| \leq na^n < b^n$

لكل x , $x \in [-a,a]$ ولكل n كبيرة وبالتالي فأن تقارب السلسلة الهندسية الكبرى $[a,-a]$, $0 < a < 1$

يضمن التقارب المنتظم للسلسلة الاصلية، بعد تحديد خصائص السلسلة نجد مجموع السلسلة على الفترة $(1,-1)$ نتبع الاجراء المماثل لأجراء المستخدم لاستنباط صيغة السلسلة الهندسية ضع في اعتبارك المجموع الجزئي

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$$

يحقق ل x

$$xs_n = \sum_{k=0}^{n} kx^{k+1} = x^2 + 2x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^{n+1}$$

وحساب الفرق

$$s_n - xs_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \, nx^{n+1} = x\frac{1-x^n}{1-x} = nx^{n+1}$$

حل هذه العلاقة s_n اذن لدينا s بالتالي مجموع المتسلسلة

$$s_n = x\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - n\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(x\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - n\frac{x^{n+1}}{1-x}\right)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \quad , \forall x \in (-1,1)$$

هذه طريقة خاصة جداً لإيجاد مجموع المتسلسلة والتي عادة ما تعمل في حالة السلاسل الهندسية والمتسلسلات ذات الصلة الوثيقة

نعتبر ان السلسلة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

تلبي سلسلة المشتقات التي تمثل نفس السلسلة الاصلية نظراً لان السلسلة الاصلية تتطلب شروط خاصية التمايز من حد الى حد على أي مشتقة مغلقة

<u>مبرهنة</u> (مجموعة تقارب لسلسلة القوى) [1]

إذا كانت E هي مجموعة تقارب لسلسة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ و $R = \underset{\forall x \in E}{sup}|x|$ اذ ان هناك ثلاث خيارات فقط:

1. إذا كان $R = +\infty$ فأن السلسلة تتقارب بشكل مطلق على R وبشكل موحد على أي فاصل $[-b,b], b > 0$
2. اذا كانت $R = 0$ فأن السلسلة تتقارب فقط عند النقطة المركزية $x = 0$ وتتباعد عند كل نقطة أخرى
3. اذا كان $0 < \mathrm{R} < +\infty$ فأن السلسلة تتقارب بشكل مطلق على الفترة $(-\mathrm{R},\mathrm{R})$ وبشكل موحد على أي فترة $[-\mathrm{b},\mathrm{b}]$, $0 < \mathrm{b} < \mathrm{R}$ وتتباعد خارج الفترة $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$

Proof: في الحالة الأولى $\mathrm{R} = +\infty$ المجموعة E غير محددة وبالتالي لأي $\mathrm{b} > 0$ يمكن إيجاد نقطة $x_{\circ} \in E$ بحيث $|x_{\circ}| > \mathrm{b}$ بتطبيق مبرهنة Abel's lemma نستنتج ان السلسلة تتقارب بشكل مطلق وموحد على $[\mathrm{b},-\mathrm{b}]$

ان تصفية b تضمن التقارب المطلق على R والتقارب المنتظم على أي فترة $[-\mathrm{b},\mathrm{b}]$ ، $\mathrm{b} > 0$

في الحالة الثانية $\mathrm{R} = 0$ يمكن للمجموعة E ان تحتوي فقط على النقطة المركزية وهذا يعني ان السلسلة تتباعد عند جميع نقاط النقاط الأخرى

نحلل الحالة الثالثة $0 < \mathrm{R} = \sup_{\forall x \in \mathrm{E}} |x| < +\infty$

نبدأ بإثبات ان السلسلة ( ) تتقارب بشكل مطلق على الفترة $(\mathrm{R}, -\mathrm{R})$ وبشكل موحد على أي فترة $[-\mathrm{b}, \mathrm{b}]$ $0 < \mathrm{b} < \mathrm{R}$ من تعريف Superemum هناك نقطة معرفة $x_{\circ} \in \mathrm{E}$

بحيث $\mathrm{b} < |x_{\circ}| \leq \mathrm{R}$ ثم نطبق مبرهنة Able's lemma نستنتج ان السلسلة تتقارب بشكل مطلق وموحد على $[\mathrm{b}, -\mathrm{b}]$ وعلاوة على ذلك، نظراً لاعتباطية b، فأن التقارب يكون مطلق على $(\mathrm{R}, -\mathrm{R})$

خذ الان أي $|x| > \mathrm{R}$ فهي لا تنتمي الى E ولهذا السبب تتباعد السلسلة تباعد خارج الفاصل $[\mathrm{R}, -\mathrm{R}]$

النتيجة: المقابلة لسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ تتبع مباشرة من بيان النظرية التي تستبدل x ب $x - a$ وبشكل أكثر تحديد بالنسبة لمتسلسلة القوى هنالك ثلاث خيارات فقط:

1. اذا كانت $\mathrm{R}_{\circ} = \infty$ فأن المتسلسلة تتقارب بشكل مطلق على R وبشكل موحد على أي فترة $[\mathrm{a} - \mathrm{b}, \mathrm{a} + \mathrm{b}], \mathrm{b} > 0$

2. اذا كانت $\mathrm{R} = 0$ فأن المتسلسلة تتقارب عند النقطة المركزية $x = a$ وتتباعد عند جميع النقاط الأخرى

لنفترض ان الحد الأخير موجود اذن ينص اختبار D̓ Alembert̓ s على انه بالنسبة $\mathrm{D} < 1$ فانه يكون التقارب $\mathrm{D} > 1$ يكون التباعد، وهذا يعني انه بالنسبة ل $|x - a| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$ ، السلسلة (5.1) تتقارب بينما بالنسبة ل $|x - a| > \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$ تتباعد

وبالتالي فأن نصف القطر للتقارب يمكن ايجاده من خلال صيغة D̓ Alembert

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_n+1}\right|$$

وبنفس الطريقة يتضمن اختبار Cauchy حساب الحد

$$c = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|an|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n}\,(x-a)^n = |x-a|.\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \qquad (5.3)$$

إذا كان الحد الأخير موجود فأن $c < 1$ يكون لدينا تقارب، $c > 1$ تباعد لذلك إذا كان

$|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

فأن السلسلة (5.1) تتقارب بينما إذا كان $|x-a| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ فأنها تتباعد بالتالي يمكن تحديد نصف القطر بواسطة صيغة كوشي Cauchy

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

تذكر ان وجود الحد $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n+1}{c_n}\right|$

يضمن وجود الحد $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

مسار للأول لهذا السبب اختبار Cauchy اقوى من اختبار D̓ Alembert ولكن في الممارسة العملية يكون الحساب الفني للأول إذا كان موجوداً أسهل كثيراً، ومع ذلك قد يحدث ان الحد الأخير بالتالي الحد الأول غير موجود وفي هذه الحالة نحتاج الى إيجاد اختبار بديل ادق لتحديد نصف القطر.

1.4. صيغة كوشي هادمارد The Cauchy – Hadmard formula [1]

الصيغة الأكثر فائدة لتحديد نصف التقارب في المواقف الأكثر إشكالية (عندما لا توجد حدود D̓ Alembert و Cauchy هي صيغة Cauchy – Hadmard القادمة من نفس اختبار Cauchy وان كان بشكل ادق تذكر ان يمكن صياغة هذا الاختبار باستخدام الحد الأعلى

$$\lim \bar{c} = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|an|}$$

إذا كان $\bar{c} < 1$, المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} an$ متقاربة بينما اذا كانت تتباعد رسمياً شبه هذه الصيغة تلك التي تحتوي على الحد العام $c = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|an|}$

الحل العام قد لا يوجد في حالة متسلسلة القوى لدينا $a_n = c_n(x-a)^n$ عند كل x ثابت مما يؤدي الى الشكل التالي لاختبار Cauchy للحد الأعلى $|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}}$

فأن (5.1) تتقارب بينما إذا $|x-a| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}}$ المتسلسلة تتباعد لذلك يمكن تعريف نصف القطر على النحو التالي

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

هذه هي صيغة Cauchy – Hadmard وميزتها هي انه من الممكن دائماً العثور على الحد الأعلى

$\text{H} = \lim\limits_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|c_n|}$ (نظرياً على الأقل) بينما قد لا توجد حدود في الصيغتين (5.3) , (5.4)

- **ملاحظة:** لا توجد نتيجة مماثلة للحد الأعلى D̓ Alembert $\overline{\text{D}} = \lim\limits_{n\to\infty} sup\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|$ والسبب في ذلك هو ان الصيغة الكاملة لهذا الاختبار تتطلب استخدام كل من الحدود العليا والسفلى (يتم تعريف الأخير في النموذج)

$$\text{D} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|$$

بشكل أكثر تحديداً بالنسبة الى $\overline{\text{D}} < 1$ لدينا التقارب بينما بالنسبة $\underline{\text{D}} > 1$ لدينا التباعد لا يمكن للحد العلوي $\overline{\text{D}}$ استبدال الحد الأدنى $\underline{\text{D}}$ *في العبارة الثانية* ولا يمكن لـ$\underline{\text{D}}$ استبدال $\overline{\text{D}}$ في العبارة الأولى

امثلة بسيطة على استحالة هذه الاستبدالات في السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{32}+\cdots$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4+2+16+8+64+32+\cdots$$

نظراً لهذه الفجوة بين $\overline{\text{D}}$ و $\underline{\text{D}}$ في صياغة اختبار D̓ Alember لا يمكن استخدام أي من الحدين

$$\lim_{n\to\infty} sup\left|\frac{c_n+1}{c_n}\right| \text{ و } \lim_{n\to\infty} inf\left|\frac{c_n+1}{c_n}\right|$$

لتحدد نصف قطر التقارب

وبالنظر الى تحديد نصف قطر التقارب بالصيغة (5.5) يمكن إعادة صياغة نظرية مجموعة التقارب بالطرق التالية

مبرهنة كوشي هادمارد تسمح لمتسلسلة القوى [1] بخيار واحد من الخيارات الثلاث للتقارب والتي يمكن صياغتها من حيث $\text{H} = \lim\limits_{n\to\infty} sup\sqrt[n]{|c_n|}$ على النحو الاتي:

1. اذا كانت $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}} = +\infty$

فان المتسلسلة تتقارب بشكل مطلق على E وبشكل موحد على أي فاصل $[a-b, a+b]\ , b > 0$

2. عندما $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}} = 0$

المتسلسلة متقاربة عند المركز $x = a$ ومتباعدة عن كل النقاط

3. اذا كان $0 < R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|}} < +\infty$

فأن المتسلسلة تتقارب بشكل مطلق على الفترة $[a-b, a+b]\ , 0 < b$ وتتباعد خارج الفترة $[a-R, a+R]$ وفقاً للتعريف في القسم 1.2 فأن الرقم R هو نصف التقارب و $(a-R, a+R)$

وهو فترة تقارب.

1.5. تقارب سلسلة المشتقات [1]

المشكلة التالية التي يجب التحقيق فيها هي سلوك سلسلة المشتقات

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\,(x-a)^{n-1} \qquad (5.6)$$

او عند النقطة المركزية $a = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\,x^{n-1} \qquad (5.7)$$

لاحظ ان هذه سلسلة قوى أخرى ذات معاملات $d_\circ = 0$ و $d_n = nc_n\ \forall_n + 0$ تتقارب مجموعات التقارب بشكل عام على سبيل المثال، تتقارب السلسلة عند النقطة $x = -1$ ، لكن سلسلة المشتقات

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ لا تتقارب عند النقطة ومع ذلك هاتين المجموعتين مرتبطتان ارتباطاً وثيقاً وسنكشف عن ارتباطهما في العبارات التالية

اولاً: نثبت امتداداً لمبرهنة Apel's lemma باستخدام نفس أسلوب الاثبات في المبرهنة الرئيسية وللتبسيط نستخدم متسلسلة القوى التي تتركز في الأصل

مبرهنة (امتداد لمبرهنة Apel's) [1]

إذا تقاربت متسلسلة قوى (5.2) عند نقطة أ. فأن متسلسلة المشتقات (5.7) تتقارب بشكل مطلق موحد على الفترة $[-b, b]$ لاي $0 < b < |x_\circ|$ إذا تباعدت متسلسلة قوى (5.2) عند نقطة $x_\circ$ فأن متسلسلة المشتقات (5.7) تتباعد في كل نقطة خارج الفترة الداخلية $[-x_\circ, x_\circ]$

البرهان: نحلل الحل الأول: متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n {x_\circ}^n$ متقاربة عند نقطة $x_\circ \neq 0$ يميل الحد العام لسلسلة الأرقام الى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n {x_\circ}^n$ 0 $c_n {x_\circ}^n \to$ مما يضمن حدود المتسلسلات

$$|c_n {x_\circ}^n| \leq \mathrm{M}, \forall_n$$

الان ضع في اعتبارك الفترة $[-b, b]$

حيث $0 < b < |x_\circ|$ اختر قيمة x في $[-b, b]$، $|x| \leq b$ واحصل على التقسيم التالي

$$|nc_n x^{n-1}| = n|c_n| \cdot |x^{n-1}| \leq |c_n| \cdot \mathrm{b}^{n-1}$$

$$= n\frac{|c_n|}{\mathrm{b}} \cdot |{x_\circ}^n| \cdot \left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|^n \leq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{b}} \cdot n\left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|^n$$

منذ $1 > \left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|$, السلسلة العددية

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{b}} \cdot n\left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|^n$ تتقارب على سبيل المثال

طبق D'Alembert test

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|^{n+1}}{n\left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|}$$

$$= \left|\frac{b}{x_\circ}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \left|\frac{b}{x_\circ}\right| < 1$$

من تعريف $|nc_n x^{n-1}| \leq \mathrm{M}_n \quad \forall_n, \forall |x| \leq \mathrm{b}$, $\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{b}} \cdot n\left|\frac{\mathrm{b}}{x_\circ}\right|^n$ وبالتالي فأن سلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x^{n-1}|$ هي سلسلة رئيسية متقاربة لسلسلة القوى من المشتقات لذلك من خلال اختبار Weierstrass تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x^{n-1}|$ بشكل موحد على $[b, -b]$ مما يعني تقارب منتظم ومطلق على $[b, -b]$

ثانياً: متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تتباعد عند نقطة $x_{\circ}$

افترض بالتناقض هناك نقطة $|x_2| > |x_1|$ حيث سلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ ، نظراً لان السلسلة الأخيرة عبارة عن سلسلة قوى بتطبيق Apel' s lemma فأننا نستنتج ان هذه السلسلة الاصلية $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تتقارب ايضاً تماماً عند $x_{\circ}$ وفقاً لاختبار المقارنة لسلسلة الأرقام

$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n x_{\circ}{}^n|}{nc_n x_{\circ}{}^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{\circ}|}{n} = 0$ ومع ذلك فأن هذا يتعارض مع فرضية تباعد السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ عند $x_{\circ}$

ملاحظة: كمنتج ثانوي لهذا العرض التوضيحي، نثبت ان متسلسلة المشتقات تختلف متسلسلة القوى الاصلية، يمكن ان تكون هذه النتيجة مفيدة في الممارسة عندما نبحث في تقارب السلسلتين الاصليتين والمشتقات في نقاط كنهاية الفترة تقارب المبرهنة التالية حول تقارب سلسلة المشتقات تتبع مباشرة من هذا الامتداد لـApel' s lemma

مبرهنة (تقارب سلسلة المشتقات) [1]

ليكن R نصف قطر متقارب لسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

سلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ تتقارب تماماً كل الفترة $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$ وبشكل منتظم على أي فترة $[-\mathrm{b}, +\mathrm{b}]$,$0 < \mathrm{b} < \mathrm{R}$ وتتباعد خارج الفترة $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$

Proof: كما موضح من قبل فان سلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تتقارب على الفترة $(-\mathrm{R}, \mathrm{R})$ وتتباعد خارج الفترة $(\mathrm{R}, -\mathrm{R})$ حيث R نصف قطر التقارب من امتداد Apel's lemma يترتب على ذلك ان سلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$ تتقارب في نفس الفترة $(\mathrm{R}, -\mathrm{R})$ وتتباعد خارج الفترة $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$

Corollary 1:

النتيجة الطبيعية تنطبق نفس النتيجة على السلسلة المتركزة a عند a إذا كان R هو نصف قطر التقارب لسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ فأن سلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1}$ تتقارب تماماً على الفترة $[\mathrm{a}-\mathrm{b}, \mathrm{a}+\mathrm{b}]$ $0 < \mathrm{b} < \mathrm{R}$ وتتباعد خارج الفترة $[\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R}]$

Corollary 2:

نتيجة طبيعية نظراً لان سلسلة المشتقات هي سلسلة قوى، يمكن اعتبارها بدورها متسلسلة اصلية ويمكن تطبيق نفس النتيجة على سلسلة مشتقاتها.

1.6. متسلسلات القوى [2]

ربما يكون فصل (class) الدوال الذي يتكون من قوى الدالة المحايدة من اكثر فصول الدوال أولية، على سبيل المثال $f(x) = x^n$ هذا الفصل من الدوال يركب حسابياً ليكون الدوال كثيرات الحدود والدوال القياسية، وقد استعملت هذه الدوال بنجاح لتكوين متسلسلة الدوال التي تكون نظرية غنية والتي تستخدم في كثير من التطبيقات فان المتسلسلة التي سوف نأخذها يكون حدها الابتدائي هو الحد المرقم بالصفر، إذن $\{a_k\}$ تفي باختصار $\{a_k\}k = 0$

تعريف: إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية عددية و a عدداً ولنفرض ان f_k هي الدالة المعطاة بالصيغة $f(x) = a_k(x-a)^k$ فأن متسلسلة $\sum f_k$ تسمى بمتسلسلة القوى إذا كان x_1 عدداً بحيث $\sum a_k(x_1-a)^k$ تقاربية فأننا نقول بأن متسلسلة القوى $\sum a_k(x_1-a)^k$ تقاربية عند x_1 ، الجملة غير تقاربية عند x_1

مثال [2]: تكون متسلسلة القوى $\sum \frac{x^k}{k}$ تقاربية إذا وفقط إذا كان $-1 \le x < 1$ هذا واضح من استعمال اختبار المقارنة ونظرية المتسلسلة المتعاقبة ولكن إذا اخذنا $x_1 = -1$

فانه غير صحيح $\sum \frac{x^k}{k}$ تقاربية عند كل x_2 حيث $|x_2| \le |x_1| = |-1|$ لأنه عندما $x_2 = 1$ فان متسلسلة القوى هذه تباعدية

مبرهنة [2]: إذا كانت $\{a_k\}$ متتالية عددية بحيث يكون:

$$\lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \mathrm{R}$$

و a أي عدد، فأن R هو نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum a_k(k-a)^k$

البرهان: نطبق اختبار النسبة لمتسلسلة القوى $\sum a_k(k-a)^k$ فنحصل على

$$\lim_{\mathrm{k}} \left|\frac{\mathrm{a_{k+1}(x-a)^{k+1}}}{\mathrm{a_k(x-a)^k}}\right| = \lim_{\mathrm{k}} |\mathrm{k^a} + 1||\mathrm{x-a}| = \frac{1}{\mathrm{R}}|\mathrm{x-a}|$$

باستخدام اختبار النسبة تكون المتسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً إذا كانت قيمة النهاية $\frac{|x-a|}{\mathrm{R}}$ اقل من 1 والتي تكافئ $|x-a| < \mathrm{R}$ وبالمثال فان اختبار النسبة يتضمن ان المتسلسلة غير تقاربية إذا كان $|x-a| > \mathrm{R}$ لهذا السبب فان العدد R هو نصف قطر التقارب إذا كان $\lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ فان التقارب هي 1R أيضا إذا كان $\lim_k \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ فان فترة التقارب هي $[a,a]$ أي انها تتكون من النقطة الوحيدة a

مثال [2]: ان فترة التقارب للمتسلسلة $\sum \frac{(x-5)^k}{k+1}$ هي $[4,6)$

اولاً: $\mathrm{R} = \lim_{k} \frac{a_k}{a_k+1} = \lim_{k} \frac{k+2}{k+1} = 1$

عندما $x = 6$ فان متسلسلة القوى تصبح $\sum \left(\frac{1}{k+1}\right)$ وهي تباعدية، وعندما $x = 4$ فان المتسلسلة تصبح $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$ وهي تقاربية

1.7. تكامل وتفاضل متسلسلات القوى [2]

في فترة التقارب، يحدد مجموع متسلسلة القوى دالة f معطاة كالاتي:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

بما ان الدالة هي نهاية المتتالية دوال كثيرات الحدود فمن المعقول توقع الكتاب P بعض الخواص الإيجابية عند الدوال كثيرات الحدود مثل الاتصال والقابلية للتكامل والقابلية للتفاضل. في الحقيقة ان كل من هذه الخواص يصح داخل فترة التقارب هذه هي نتائج التقارب المنتظم، وهذا التقارب المنتظم هو موضوع المبرهنة التالية:

مبرهنة [2]: إذا كان لمتسلسلة القوى $\sum a_k (x-a)^k$ نصف قطر التقارب R، فإنها تتقارب بانتظام على كل فترة جزئية مغلقة من $(\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R})$.

البرهان: نفرض ان $(\mathrm{a}-\mathrm{R}, \mathrm{a}+\mathrm{R}) > [c-d]$ ان $\sum a_k (x-a)^k$ تقاربية عند c وd إذا كان $|d-a| \geq |c-a|$ فأننا نعرف $\mathrm{M}_k = \left|a_k (c-a)^k\right|$ في كل الحالتين $\sum \mathrm{M}_k$ تقاربية $lub\left|a_k (x-a)^k\right| \leq \mathrm{M}_k$ اذن اختبار M لفيرشتراس يطبق ليعطي التأكيد على التقارب المنتظم.

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

2.1. المعادلة التفاضلية [3]

هي معادلة تتضمن حالة مجهولة وتفاضلاتها، وهي علاقة تساوي بين دالة مجهولة تعتمد على أكثر من متغير وبين واحد او أكثر من مشتقات (تفاضلات) الدالة المجهولة، فمثلاً إذا كانت الدالة المجهولة هي $y = (f)$ والتي تعتمد على المتغير المستقل x فان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الاعتيادية في هذه الحالة هي $f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$

حيث $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$

2.2. رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية [3]

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بانها اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

درجة المعادلة التفاضلية: تعرف درجة المعادلة بانها اعلى اس مرفوع لأعلى مشتقة بعد وضع المعادلة في صورة كثيرة حدود في المشتقات.

امثلة عن رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية

الدرجة	الرتبة	المعادلة
1	1	$\frac{dy}{dx} = e^x$
1	2	$y'' - 3y'^2 = 8\cos x$
2	3	$(y''')^2 + (y')^5 - 2xy = 0$

2.3. حل المعادلة التفاضلية [3]

تسمى الدالة $y = \emptyset(x)$ والمعرفة على الفترة $[a, b]$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

$$f\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

2.4. الثوابت الاختيارية

يقال لمجموعة الثوابت الموجودة بعلاقة ما بانها ثوابت إذا لم يكن من الممكن استبدال هذه المجموعة من الثوابت بعدد اقل من الثوابت، بحيث تحتفظ العلاقة بنفس خصائصها فمثلاً العلاقة $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ بها ثابتان اختياريان هما c_1, c_2 حيث لا يمكن استبدالهما بثابت واحد فقط أي ان الحلول $\cos x , \sin x$ تكون مستقلة خطياً.

2.5. أنواع حلول المعادلة التفاضلية الاعتيادية [3]

أ- الحل العام: يسمى حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة n والذي يحتوي على n من الثوابت الاختيارية بالحل العام

ب- الحل الخاص: هو أي حل يتم الحصول عليه من الحل العام، وذلك بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً محددة

مثال: المعادلة $\ddot{y} = -w^2 y$ حلها العام هو $y = A \cos wt + B \sin wt$ هو حل خاص للمعادلة المعطاة

2.6. تكوين المعادلة التفاضلية

يمكننا تكوين معادلة تفاضلية وذلك لحذف الثوابت الاختيارية من الحل العام باستخدام المشتقات المختلفة للمتغير

فمثلاً: العلاقة $y^2 = ax - b$ تحتوي على ثابتين اختياريين لذلك نشتق العلاقة مرتين فنجد أن

$$2yy' = a$$

$$2yy'' + 2y'^2 = 0$$

بالتالي نكون قد حصلنا على معادلة تفاضلية ذات الرتبة الثانية

2.7. طرق حل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى أو الدرجة الأولى [3]

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى هي:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

وفي كثير من المسائل يكون من الأفضل وضع المعادلة على الصورة

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

وسوف نستعرض فيما يلي بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية

1. طريقة فصل المتغيرات: اذا امكن فصل متغيرات المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى أي ان المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$M(x)dx + N(y\,)dy = 0$$

يكون من السهل حلها، حيث يكون الحل على الصورة

$$\int M(x)dx + \int N(N)dx = c$$

حيث c ثابت اختياري

ونلاحظ ان الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد لان المعادلة من المرتبة الأولى.

مثال: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x + 3yy' = 0$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

وبفصل المتغيرات تصبح $3ydy = -xdx$

وبالتكامل نحصل على $3\left[\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + c$

$$\therefore 3y^2 = -x^2 + c^k$$

حيث c^k ثابت اختياري

2.1.7. معادلات يمكن تحويلها لمعادلات يمكن فصل متغيراتها [3]

توجد بعض المعادلات في صورة غير قابلة لفصل متغيراتها ولكن إذا قمنا بأجراء تحويل للمتغيرات فإننا نحصل على صورة يسهل فصل متغيراتها.

من امثلة هذه المعادلات: المعادلات التي على الصورة $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ وهذه الصورة لا يمكن فصل متغيراتها، ولكن باستخدام التعويض $z = ax + by + c$ فان المعادلة تتحول الى صورة يسهل فصل متغيراتها، حيث

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

ومن الواضح ان هذه الصورة يسهل فصل متغيراتها كالاتي:

$$\frac{dz}{bf(Z)+a} = dx \quad \therefore \int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + c$$

بإجراء التكامل ثم التعويض عن $z = ax + by + c$ نحصل على العام للمعادلة التفاضلية المعطاة كما في المثال التالي:

مثال [3]: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = (x + y)^2$$

الحل: بوضع $z = x + y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \qquad \text{او} \qquad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

وبالتعويض بالمعادلة التفاضلية يكون

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 \qquad \therefore \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$dz - (1 + z^2)dx = 0$$

او بفعل المتغيرات والتكامل

$$\frac{d^2}{1+z^2} - dx = 0$$

$$\therefore \tan^{-1} z - x = c$$

$$\therefore \tan^{-1} z = x + c$$

$\therefore z = \tan(x + c)$

2.7.2. حل المعادلة التفاضلية المتجانسة [3]

يقال ان الدالة $f(x, y)$ انها دالة متجانسة من الدرجة n في المتغيرين x,y إذا كانت لكل عدد حقيقي λ يكون $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

من امثلة ذلك: الدالة $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ دالة متجانسة من الدرجة الثانية حيث $f(\lambda x, \lambda y) - \lambda^2 f(x, y)$

مثال: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y^2 - yx)dx + x^2 dy = 0$$

الحل: المعادلة ليست ذات متغيرات قابلة للفصل ولكنها معادلة تفاضلية متجانسة

نضع $y = xz$

$\therefore (x^2z^2 - x^2z)dx + x^2(zdx + xdz) = 0$ -1

بقسمة طرف المعادلة (1) على x^2 تصبح المعادلة (1) في الصورة

$$z^2dx + xdz = 0$$

$$\therefore \frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

بأجراء التكامل نحصل على

$$-z^{-1} + \ln|x| = \ln c\,, \quad c > 0$$

$$\therefore -\frac{x}{y} + \ln|x| = \ln c$$

او

$$y = \frac{x}{\ln(x/c)}$$

2.7.3. معادلات تفاضلية يمكن تحويلها الى معادلات متجانسة

إذا كانت المعادلة التفاضلية

$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ -1

فانه يمكن تحويلها اما الى معادلة تفاضلية متجانسة او معادلة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات

أ- إذا كان $a_1b_1 + a_2b_1$ فيكون في هذه الحالة المستقيمان , $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

متقاطعان $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

نفرض ان نقطة التقاطع هي (α, β) نضع

$$x = x + \alpha \, , y = y + \beta$$

وفيما

$$dx = dx \ , \ dy = dy$$

هذا التعويض يختزل المعادلة التفاضلية (1) الى معادلة تفاضلية متجانسة في الصورة

$$(a_1x + b_1y)dx + (a_2x + b_2y)dy = 0$$

والتي يمكن حلها مثل النوع السابق باستخدام التعويض $y = xz$ ثم نستبدل المتغيرات الجديدة x, y بالمتغيرات الاصلية x, y

ب- إذا كان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ او a_1b_2 أي ان المستقيمين $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y +$ $c_2 = 0$ متوازيان وفي هذه الحالة نستخدم التعويض

$$a_1x + b_1y - u$$

ينتج ان

$$dy = \frac{du - a_1dx}{b_1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نجد انها تتحول الى معادلة تفاضلية لكن فصل المتغيرات

ج- المعادلة التفاضلية التي في الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

بحيث $a_1b_2 \neq a_2b_1$ فيمكن حلها كما في (أ)

د- المعادلة التفاضلية التي في الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

تتحول الى معادلة تفاضلية قابلة لقصل المتغيرات

باستخدام التعويض $\therefore z = ax + by + c$

2.8. معادلة ريكاتي Ricatis equation [3]

الصورة القياسية لهذه المعادلة:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

حيث $p(x), q(x), r(x)$ دوال معلومة $p(x) \neq 0, r$ يمكن حل هذه المعادلة إذا علم أي حل خاص $y = y_1$ باستخدام التعويض $y = y_1 + \frac{1}{z}$ حيث z متغير تابع جديد تتحول معادلة ريكاتي الى المعادلة الخطية الاتية

$$\frac{dz}{dx} + (2py_zq)z + p = 0$$

2.9. المعادلات التفاضلية الخطية [4]

يعقد بالمعادلة الخطية من الرتبة الأولى (في المتغير التابع) كل معادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

طريقة حل المعادلات الخطية

أ- اكتب المعادلة في صيغتها القياسية

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

ب- اوجد قيمة التكامل v(x) للمعادلة عن طريق القانون

$$v(x) = e^{\int p(x)dx}$$

ج- اضرب كل من حدود لمعادلة ذات الصيغة القياسية في v(x) مع ملاحظة ان الطرف الايسر عبارة عن المقدار $\frac{d}{dx}[v(x)y]$ لنحصل على

$$v(x)\frac{dy}{dx} + p(x)v(x)y = v(x)Q(x)$$

او

د- كامل طرفي المعادلة الأخيرة لنحصل على y بقسمة طرفي على $v(x)$

2.10. معادلة برنولي [4]

هي معادلة مشهورة تنسب الى اسم صاحبها عالم الرياضيات السويسري شكلها العام

$$y' + p(x)y = Q(x)y^n \qquad (1)$$

حيث $n \neq 0$ أي عدد حقيقي وتظهر هذه المعادلة في تطبيقات علمية متعددة وسنستعرض هنا لحل هذه المعادلة عندما تكون n مساوية او مختلفة عن الواحد

اولاً: عندما n تساوي الواحد الصحيح في هذه الحالة نحصل على

$$y' + p(x)y = Q(x)y$$

او

$$y' + \big(p(x)yQ(x)\big)y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة

ثانياً: عندما n لا تساوي واحداً، عندها يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) على النحو التالي

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + py^{-n+1} = Q \qquad (2)$$

لكن مشتقة y^{-n+1} لا تساوي y^{-n} $(1-n)$ وبالتالي يمكن تبسيط المعادلة (2) باستعمال التعويض

$$y^{-n+1} = z$$

ومنه ينتج لدينا

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

وبالتالي فان اعتبار المعادلة كمعادلة في المتغيرين x, y يؤدي بنا الى المعادلة التفاضلية التالية بعد ضرب المعادلة (2) في القيمة غير الصفرية $1-n$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)pz = (1-n)Q \qquad (3)$$

وهذه معادلة خطية في صيغتها القياسية.

2.11. معادلة كليرو [5]

سم المعادلة التي على الصورة

$$y = xp + f(p) \qquad (1)$$

معادلة كليرو بالاشتقاق بالنسبة الى x تحصل على

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

أي $[x \cdot f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$

يحذف الحد الأول لأنه يؤدي الى الحل الشاذ فيكون لدينا

$$\frac{dp}{dx} = 0 \to dp = 0 \to p = c$$

بوضع قيمة p في (1) فنحصل على المطلوب

$$y = xc + f(c)$$

ملحوظة 1: معادلة كليرو حالة خاصة من معادلة لاجرانج عندما F(p)=P.

ملحوظة 2: نتذكر ان حل معادلة كليرو تحصل عليه بوضع c بدلاً من P حيث c ثابت اختياري.

مثال: حل المعادلة $(y - px)(p - 1) = p$

الحل: نعيد كتابة المعادلة على الصورة

$$y - px = \frac{p}{p-1} \Rightarrow y = px + \frac{p}{p-1}$$

وهي في صورة معادلة كليرو، فبوضع c بدلاً من p فيكون الحل هو

$$y = cx + \frac{c}{c-1}$$

حيث c ثابت اختياري.

2.11.1. معادلات تختزل الى صورة معادلة كليرو: [5]

باستخدام تعويض مناسب يمكن وضع بعض المعادلات في صورة معادلة كليرو ولا توجد طريقة عامة للتعويض المباشر

الصورة الأولى: إذا كان $y^2 = pxy + f\left({}^{py}/_{x}\right)$ نضع $y^2 = v, x^2 = u$

الفصل الثالث

الفصل الثالث

استخدام متسلسلات القوى في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

3.1. الحل بمتسلسلة قوى x [6]

يمكن حل المعادلات التفاضلية بانواعها مع المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة بطريقة عامة، وذلك بافتراض الحل هو متسلسلة قوى x، ثم نعوض عن y ومشتقاتها بالمعادلة المعلومة، ونجد معادلات قوى x، ويفترض ان تكون المتسلسلة متقاربة وقابلة للاشتقاق حداً حداً.

مثال: جد الحل المتسلسل للمعادلة التفاضلية $y' = y$

الحل: نفترض ان حل المعادلة التفاضلية هي متسلسلة قوى x التالية:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

ولأجل تحديد المعاملات $c_n, \dots, c_1, c_0$، نجد

$$y' = c'_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1} + \cdots$$

وبالتعويض عن y', y بالمعادلة نحصل على

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1} + \cdots + c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n + \cdots$$

وبتساوي معاملات قوى x المتشابهة لطرفي المعادلة، نحصل على

$$nc_n = c_{n-1}, \dots, 3c_3 = c_2, 2c_2 = c_1, c_1 = c_0$$

$$c_n = \frac{c_0}{n!} \dots, c_3 = \frac{c_0}{3!}, c_2 = \frac{c_0}{2!}, c_1 = c_0$$

ان حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = c_0 + c_0 + \frac{c_0}{2!}x^2 + \cdots + c_0\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= c_0, (1 + x + \frac{x_2}{2!} + \cdots + \frac{x_n}{n!} + \cdots)$$

$$= c_0e^x$$

3.2. النقاط المنفردة والاعتيادية للمعادلة التفاضلية

ان الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة هي:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

حيث ان $R(x), Q(x), P(x)$ دوال المتغير x

كما يمكن كتابة المعادلة (1) بالصورة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Q}{P}\frac{dy}{dx}+\frac{R}{p}y=0$$

يقال ان المعادلة التفاضلية هذه نقطة اعتيادية عند النقطة $x=a$، إذا أمكن كتابة كل من الدالتين $\frac{R}{P}, \frac{Q}{P}$ بشكل متسلسلة تايلر حول $x=a$

وبكلام اخر إذا كتبت الدالتان بالصورتين

$$\frac{Q}{P}=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

$$\frac{R}{P}=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots$$

وإذا كانت $x=0$، فعند ذلك تكتب كل من الدالتين بالصورة

$$\frac{Q}{P}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

$$\frac{R}{P}=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

إذا كانت للمعادلة التفاضلية نقطة اعتيادية عند $x=a$ يمكن التعبير عن الحل بدلالة متسلسلة تايلر حول النقطة a وهي

$$y=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

اما إذا كان $x=0$، فان الحل العام للمعاملة هي متسلسلة القوى

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

3.3. طريقة فروسينوس [6]

لو اخذنا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

$$p(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

حيث كل من $R(x), Q(x), P(x)$ متعددة حدود في x ، وأريد هنا إيجاد حل هذه المعادلة بمتسلسلة حول $x = 0$ فنقوم اولاً بفرض الحل بالصورة

$$y = x^m(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots c_kx^k + \cdots) \qquad c_0 \neq 0$$

نحاول اولاً ان نجد c_1 , m بحيث يمكن تحقيق المعادلة التفاضلية، ان قيم m يمكن ان تكون اعداداً صحيحة موجبة وسالبة او اعداداً كسرية موجبة وسالبة، فاذا وجدنا قيمتين مختلفتين الى m فسوف نحصل على حل عام للمعادلة التفاضلية ولكن إذا وجدنا قيمة واحدة الى m فسوف نحصل على حل خاص فقط، ولأجل ان نجد c , m نقوم بالتعويض عن y'', y', y المستحصلة من الفرضية بالمعادلة التفاضلية، مع تحديد m اولاً وتسمى هذه الطريقة فروسينوس.

مثال: حل المعادلة التفاضلية بمتسلسلة القوى x

$$xy'' - y' - xy = 0$$

الحل: نلاحظ اولاً ان $x = 0$ هي نقطة منفردة نظامية ولهذا نفرض ان متسلسلة الحل هي:

$$y = mx(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k + \cdots)$$

$$y = c_0x^m + c_1x^{m+1} + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k + \cdots)$$

$$y' = mc_0x^{m-1} + (m+1)c_1x^m + (m+2)c_2x^{m+1} + \cdots + (m+k)c_kx^{m+k-1} + \cdots$$

$$y'' = m(m-1)c_0x^{m-2} + (m+1)mc_1x^{m-1} + \cdots + (m+k)(m+k-1)c_kx^{m+k-2} + \cdots$$

وكذلك

$$xy'' = m(m-1)c_0x^{m-1} + (m+1)mc_1x^m + \cdots + (m+k)(m+k-1)c_kx^{m+k-1} + \cdots$$

$$-y' = -mc_0x^{m-1} - (m+1)c_1x^m - \cdots - (m+k)x^{m+k-1} - \cdots$$

$$-xy'' = -c_0x^{m+1} - c_1x^{m+2} - \cdots - c_k-2x^{m+k-1} \cdot c_k \cdot x^{m=k}$$

وبجمع الحدود الثلاث هذه، وتوحيد معاملات قوى x المتشابهة نحصل على

$$xy'' - y' - xy = (m^2 - 2m)c_0x^{m-1} + (m^2 - 1)c_1x^m + \cdots + [(m + k)(m + k - 1)c_k - (m + k)c_k - c_{k-2}]x^{m+k-1} + \cdots = 0$$

وبجعل معاملات قوى x مساوية للصفر نحصل على

$$(m^2 - 2m)c_0 = 0$$

$$(m^2 - 1)c_1 = 0$$

$$(m + k)(m + k - 1)c_k - (m + k)c_k - c_{k-2} = 0$$

$$(m + k)(m + k - 2)c_k - c_{k-2} = 0$$

او

بما ان $c_0 \neq 0$ نجد من المعادلة الأولى ان

$m = 0$ او $m = 2$

تسمى المعادلة $m^2 - 2m = 0$ المعادلة الدليلية

بعد التعويض عن $m = 0$ او $m = 2$ نجد في المعادلة الثانية ان $m^2 - 1 \neq 0$ وعلى هذه يكون $c_1 = 0$

ونحصل مما تقدم على القانون العام التالية (من المعادلة التامة)

عندما $m = 0$ فان $c_k = \frac{c_k-2}{k(k+2)}$

وعندما $m = 2$ فان $c_k = \frac{c_k-2}{k(k+2)}$

ولما كان مقام القانون الأول يساوي صفراً عندما $k = 2$ لهذا نهمل الحالة عندما $m = 0$ ويكون الحل الخاص عندما $m = 2$ هو $y = c_0\left(x^2 + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{192} + \frac{x^8}{9216} + \cdots\right)$

3.4. حل معادلة بسل باستخدام متسلسلات القوى [6]

واحدة من المعادلات المهمة في الرياضيات التطبيقية هي المعادلة التفاضلية

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - c^2)y = 0 \ldots\ldots (1)$$

التي تعرف بمعادلة بسل من الرتبة c، حيث c ثابت سوف نفرض ان c عدد حقيقي وغير سالب

الحلول غير التافهة لهذه المعادلة تدعى دوال بسل من الرتبة c.

معادلة بسل تنشأ من عملية حل معادلات تفاضلية جزئية معينة في الفيزياء على سبيل المثال ان عملية فصل المتغيرات معادلة الموجة في الاحداثيات الأسطوانية تعطينا معادلة بسل لأهمية هذه المعادلة في التطبيقات

لكي نحل معادلة بسل سوف نستعمل طريقة فرونيس، واضح من المعادلة (1)

ان $Q(x) = \frac{x^2-c^2}{x^2}, R(x) = \frac{1}{x}$

ومنها نجد ان $x = 0$ هي نقطة منفردة منتظمة للمعادلة وان بقية قيم x هي نقاط عادية لذلك نفرض الحل المتسلسل لمعادلة بيسل هو

$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}$ …….. (2)

ويجب ان تحقق r المعادلة المميزة

$$r^2 - c^2 = 0$$

ومنها نجد ان أسس المعادلة (1) هما

$r_2 = -c \ , \ r_1 = c \geq 0$ اما المعاملات

a_k فهي تحقق العلاقتين التكراريتين

$$[(r+1)^2 - c^2]a_1 = 0 \dots \dots . . (3)$$

$$[(k+r)^2 - c^2]a_k = -a_{k-2}, (k \geq 2) \dots \dots . (4)$$

نجد الحل المناظر للجذر $r_1 = c$ عندما c هو عدد غير صحيح من هذا نجد ان (3) تعطينا $a_1 = 0$ وان العلاقة (4) تعطي

$$k(k+2c)a_k + a_{k-2} = 0 \, , (k \geq 2)$$

بما ان $a_1 = 0$ و $c \geq 0$ فان هذه العلاقة تعني ان

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$$

$$a_2 = \frac{a_0}{2(2+2c)}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4(4+2c)}$$

.

.

.

$$a_{2m} = \frac{a_{2m-2}}{2m(2m+2c)} \, , m \geq 1$$

بضرب هذه العلاقات ببعضها نحصل

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m\, a_0}{2^{2m}\, m!(1+c)(2+c)\ldots(m+c)}\,,\ m \geq 1$$

ونجد الحل المتسلسل (3) هو

$$y_1(x) = a_0 x^c \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(1+c)\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\, \Gamma(m+c+1)}\right]$$

من الملائم هنا ان نختار الثابت الاختياري a_0 بانه

$$\frac{1}{2^c \Gamma(1+c)}$$

وذلك للحصول على الحل الخاص لمعادلة بسل الذي يرمز له بالرمز $\mathrm{J}_0(x)$

$$\mathrm{J}_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \Gamma(m+c+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+c} \ldots\ldots(5)$$

عندما يكون c عدد صحيح

اما إذا كان c عدد غير صحيح فان الدالة

$$\mathrm{J}_{-c}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \Gamma(m-c+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+c} \ldots\ldots..(6)$$

فان $\mathrm{J}_{-c}, \mathrm{J}_c$ هما حلان مستقلان خطياً

لمعادلة بسل والحل العام للمعادلة عندما c عدد غير صحيح هو

$$y = AJ_c(x) + BJ_{-c}(x) \ldots\ldots(7)$$

حيث A,B ثابتان اختياريان

مثال: اثبت ان: [7]

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x \quad ,\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

الحل: بوضع $c = \frac{1}{2}$ في معادلة بسل

$$\mathrm{J}_c(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \Gamma(m-c+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+c}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}2}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right)}\ \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+c}$$

دالة كاما الظاهرة في المقام يمكن كتابتها بالشكل

$$\Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right)=\frac{2m+1}{2}\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)$$

$$=\frac{2m+1}{2}\cdot\frac{2m-1}{2}\ \Gamma\left(\frac{2m-1}{2}\right)$$

$$=\frac{2m+1}{2}\cdot\frac{2m-1}{2}\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ويضرب بسط ومقام الطرف الأيمن في حال الضرب

$$2.4\ldots 2m$$

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{3}\right)=\frac{(2m+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2m+1}\,m!}$$

لذلك فان الدالة $J_{\frac{1}{2}}$ تصبح بالشكل

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^{2m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\frac{1}{2}}}{(2m+1)!\sqrt{\pi}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\,\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

وبصورة مماثلة نجد ان

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\frac{1}{2}}}{m!\,\Gamma\left(m-\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,2^{2m}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(2m)!\sqrt{\pi}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

3.5. حل معادلة ليجندر باستخدام متسلسلات القوى [7]

من المعادلات التي تنشأ كثيراً في متنوعة من الرياضيات التطبيقية هي معادلة ليجندر التفاضلية.

المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)y''-2xy'+(n+1)y=0\ \dots\dots\dots(1)$$

سنعتبر هنا فقط الحالة الخاصة المهمة وهي التي عندما يكون n صفراً او عدداً صحيحاً موجباً.

كما في معادلة بسل التفاضلية، دعنا نفرض الحل المتسلسل لهذه المعادلة هو

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k x^{k+r}\ \dots\dots\dots(1)$$

حيث $a_0\neq 0$ بالتعويض في (1) نجد ان r تحقق المعادلة المميزة

$$r(r-1)=0$$

ومنها نجد ان:

$r_2=0\,,r_1=1$ والمعاملات a_k تحقق العلاقات

$$r(1+r)a_1=0$$

$$(k+r-2)(k+r-3)a_{k-2}=0 \qquad (k\geq 3 \text{ فردي})$$

$$(k+r)(k+r-1)a_k=[2(k+r-2)-n(n+1)a_{k-2}] \qquad (k\geq 3 \text{ زوجي})$$

ويجمع اخر علاقتين نحصل على العلاقة التكرارية

$$(k+r)(k+r-1)a_k=(k+r-n-2)(k+r-n-1)a_{k-2}\ \ k\geq 2$$

إذا اخذنا $r=o$ فان كل من a_1 , a_0 يبقى ثابتاً اختيارياً ومن العلاقة الأخيرة أعلاه، نحصل على

$$a_k=\frac{(k-n\dots2)(k+n-1)}{k(k-1)}a_{k-2}\ \ ,k\geq 2$$

وبذلك فان المعاملات $a_2,a_4,\dots$

يمكن ايجادها بدلالة a_0 والمعاملات $a_3,a_5,\dots$ بدلالة a_1

وبذلك فان الحل العام لمعادلة ليجندر (1) يمكن كتابته

$$y = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+3)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots\right] \ldots\ldots\ldots (3)$$

متعددة حدود ليجندر من الرتبة n ويمز لها بالرمز $p_n(x)$ للحصول على الصيغة العامة لمتعددة حدود ليجندر فانه من المألوف ان نضرب متعددة الحدود في (3) عندما n هو عدد صحيح لاحد العاملين التاليين

$$(-1)^{\frac{n}{2}} * \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} \quad , \quad (\text{زوجي } n)$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} * \frac{1.3.5\ldots(n)}{2.4.6\ldots(n-1)} \quad , \quad (\text{فردي } n)$$

من هذه نحصل على الصيغة العامة لمتعددات حدود ليجندر والتي تكون بهيئة المتسلسلة

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n=2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \ \ldots\ldots\ldots (4)$$

حيث $N = \frac{n}{2}$ عندما n هو عدد زوجي

وان $N = \frac{n-1}{2}$ عندما n هو عدد فردي

واحدة من المتطابقات الأساسية التي تتضمن متعددات حدود ليجندر هي صيغة رودريج

ونحصل عليهما كما يلي:

$$u = (x^2 - 1)^n$$

$$\frac{du}{dx} = 2_n x(x^2 - 1)^{n-1}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل

$$(x^2 - 1)\frac{du}{dx} = 2_n x(x^2 - 1)^n$$

$$(1 - x^2)\frac{du}{dx} = 2_n x4 = 0$$

References المصادر

[1] Ludmila Bourchtein and Andrei Bourchte in, Theory of in fininite Sequences and Series, سويسرا Birkhauser, 2021.

[2] فريدي، نظرية حساب التفاضل والتكامل، منشورات جامعة الفاتح، 1992.

[3] محمد أبو ذهب خضيري، طاهر عبد الحميد نوفل، مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية، دار ماستر للنشر 2020م.

[4] سالم بن احمد سحاب، مقدمة في المعادلات التفاضلية، مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز، 2005م.

[5] عبد الشافي فهمي عبادة، حسن مصطفى العويضي، وعفاف أبو الفتوح صالح، المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها، دار الفكر العربي 2010م.

[6] خالد احمد السامرائي، ويحيى عبد سعيد، طرق المعادلات التفاضلية، جامعة بغداد، 1979م.

[7] باسل يعقوب، يوسف لوقا، طرق في الرياضيات التطبيقية، جامعة بغداد، 1989م.