جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث الاجتماعي
جامعة ميسان
كلية التربية الاساسية – قسم الرياضيات

حل نظام المعادلات الخطيه

بحث مقدم جزء من متطلبات نيل شهادة البكالوريوس من قبل الباحثات:

1. بتسام خيرالله خلف
2. خديجه يونس شندوخ

بأشراف الأستاذة : - م . م . نجود عبد حاتم

1446هـ

2025

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَأَنْ لَيْسَ لِلْإِنْسَانِ إِلَّا مَا سَعَىٰ، وَأَنَّ سَعْيَهُ سَوْفَ يُرَىٰ، ثُمَّ يُجْزَاهُ الْجَزَاءَ الْأَوْفَىٰ)

(النجم: 39-41)

التفسير: هذه الآيات تؤكد

أن كل إنسان يحصد نتيجة

جهده، وأن الله سيجزيه على عمله

اقرار المشرف

اشهد ان أعداد هذا البحث الموسوم بـ (نظام المعادلات الخطية) الذي تقدم به الطالبتان (ابتسام خيرالله خلف وخديجة يونس شندوخ)

قد جرى تحت إشرافي في كلية التربية الاساسية ــ جامعة ميسان

هوه جزء من متطلبات نيل درجة البكالوريوس

المشرف:

/ /2025

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي بنوره نهتدي، وبلطفه نُوفّق، وبتوفيقه نبلغ الآمال

إلى الله أولاً، من بيده مفاتيح العلم والحكمة، ومن علّمنا كيف نبحث عن الحل كما نبحث عن الطريق.

وإلى مولانا صاحب الزمان (عجل الله فرجه الشريف)، النور الغائب الحاضر في قلوبنا، والقدوة في الثبات والانتظار والعمل.

إلى والديّ العزيزين، سندي ودعمي الدائم، ودعاؤهما زادنا في طريق النجاح.

إلى أستاذتنا الفاضلة م. م. ست نجود، التي لم تبخل بعلمها وتوجيهها، فكان لها الأثر الكبير في هذا الإنجاز.

وإلى رفيقة دربي في هذا البحث،

.، التي شاركتني الجهد والوقت بروح التعاون والإصرار

إلى كل من آمن بنا وساندنا بكلمة أو بدعاء وإلى رفيقة دربي في هذا البحث،

.، التي شاركتني الجهد والوقت بروح التعاون والإصرار

إلى كل من آمن بنا وساندنا بكلمة أو بدعاء أو بابتسامة.

أهدي هذا العمل المتواضع، في حل المعادلات الخطيه، كرمز للسعي نحو الفهم، واليقين بأن لكل مسألة في الحياة حلاً، ما دمنا نملك الإيمان والعلم.

شكر وتقدير

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، والصلاة والسلام على سيدنا محمد، وعلى آله وصحبه أجمعين.

يسرّني في هذه اللحظة المهمة من مشواري الأكاديمي، ومع اقتراب نهاية مرحلة البكالوريوس، أن أتقدم بخالص الشكر وعظيم التقدير لكل من ساندني ووقف إلى جانبي خلال سنوات دراستي.

أتوجه بجزيل الشكر والامتنان إلى أساتذتي الكرام، الذين لم يبخلوا علينا بعلمهم وتوجيهاتهم القيمة، وكانوا لنا نعم الداعمين والموجهين طوال هذه الرحلة.

كما لا يفوتني أن أعبّر عن امتناني العميق لعائلتي الكريمة، التي كانت السند الحقيقي والداعم الأكبر، والتي وفرت لي كل سبل الراحة والدعم النفسي والمعنوي، فلكم مني كل الحب والوفاء.

ولا أنسى أصدقائي وزملائي الذين شاركوني هذه التجربة، وكانوا عونًا لي في لحظات التحدي، ورفقاء درب لا يُنسون.

شكرًا من القلب لكل من ساهم في وصولي إلى هذه المرحلة، ولكل من كان له أثر في رحلتي، صغيرًا كان أم كبيرًا.

الفهرس

الموضوع	الصفحة
الاية	II
اقرار المشرف	III
الاهداء	IV
الشكر والتقدير	V
الفهرس	VI
الفصل الاول	1
مقدمة	1
اهمية البحث	2
اهداف البحث	2
مشكلة البحث	3
ملخص البحث	4
الفصل الثاني	6
المعادلة الخطية (2_1)	7
(2_2) حل المعادلة الخطية Solve the linear equation	7
منظومة المعادلات الخطية (2 _3)	7
(2 _4) النظام الخطي المتجانس Homogeneous linear system	8
المفاهيم التابعة عن طرق (2_5)	8
Inverse معكوس المصفوفة المربعة) of the square matrix)	10
الفصل الثالث	13
مقدمة	14
طريقة الحذف	15
طريقة كاوس – كاوس جورون	16
طريقة قاعدة كرامر	17
معكوس المصفوفة	19
المصادر	21

الفصل الاول

المقدمة :

تعتبر دراسة المعادلات الخطية وحلولها من المواضيع المهمة في الرياضيات وخاصة في الجبر الخطي بالإضافة الى العلوم التطبيقية الأخرى سوف نقدم في هذا البند بعض العلاقات الرياضية الأساسية ومناقشة طرق حل تلك الأنظمة.

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى x y بالصيغة

a x+by=c

تمثل هذه الصيغة معادلة خطيه بمتغيرين هما xوy حيث يمكن كتابة المعادلة الخطية التي تحتوي n من المتغيرات بالصيغة

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

$c, a_1, a_2, a_3 \dots \dots a_n$ هي ثوابت حقيقيه

وان حل المعادلة :

$+a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n + c$ هي الاعداد s_n, s_2, s_1

بحيث تحقق المعادلة عندما نعوض $x_2 = s_2, x_1 = s_1 x_n = s_n$

أهمية البحث

تكمن أهمية البحث لبيان عدة طرق لحل المعادلات الخطية لما لها من أهمية كبيره في مجالات العلوم بحيث نشأ موضوع المعادلات الخطية مرافقا لنشوء حساب المصفوفات حيث ان هنالك ارتباط وثيق بين حل المعادلات الخطية والمصفوفات .

أهداف البحث

هدف البحث الحالي للتعرف على ما يلي:

1- تعريف المعادلة الخطية بأجياد الحلول لها .
2- التعرف على النظام الخطي المتجانس والمعنى الهندسي للنظام الخطي .
3- التعرف على المفاهيم التابعة عن طريق حل المعادلات الخطية .
4- التعرف على طرق حل نظام المعادلات الخطية .

مشكلة البحث

أن المشكلة التي تبحث عنها في الوقت المستغرق لايجاد حل نظام المعادلات الخطية من خلال تكوين فكرة واضحة عن نظام المعادلات الخطية فيكون لدى الطالب مجموعة من المعارف عن طرق الحل لهذا النظام. ومن خلال التأني والتركيز عند اختيار طريقة حل نظام المعادلات الخطية وبالتالي رفع مستوى الطالب في هذا المجال.

المستخلص

يهدف البحث الحالي إلى دراسة نضام المعادلات الخطية حيث يتكون البحث من:

الفصل الاول: يتضمن المقدمة عن نظام المعادلات الخطيه والأهمية والأهداف ومشكله البحث.

والفصل الثاني: يتضمن مقدمه عن انظمه المعادلات الخطية وتعاريف مختلفة عن انضمة المعادلات الخطيه ونضام المعادلات المتجانسة.

والفصل الثالث: يتضمن مقدمه عن حل نظام المعادلات الخطية (طريقة جاوس جوردن وطريقه كرامر وكذلك استخدام معكوس المصفوفة.

الفصل الثاني

المواضيع:

(2_1) المعادلة الخطية linear equation
المعادلة الخطية التي لها n من المتغيرات

(2_2) حل المعادلة الخطية Solve the linear equation

(2 _3) منظومة المعادلات الخطية

(2 _4) النظام الخطي المتجانس Homogeneous linear system

(2_5) المفاهيم التابعة عن طرق

(معكوس المصفوفة المربعة Inverse of the square matrix)

(2_1) المعادلة الخطية linear equation
المعادلة الخطية التي لها n من المتغيرات

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n\, x_n = b$$

حيث a_n ..... a_2 , a_1 ..... الحقيقي R الحقل الى تنتمي ثوابت هي

(2_2) حل المعادلة الخطية Solve the linear equation

$A1\, x1 + a2x2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ an\, xn = n$

s1 , s2 ,..... Sn من الاعداد n هو متتابعة من

ويحقق المعادلة عند التعويض ب

X1 = s1 , x2 =s2 ..... Xn =sn

كل حلول المعادلة تسمى مجموعة حل.

(2 _3) منظومة المعادلات الخطية
System of linear equation

هي مجموعة من m من المعادلات الخطية التي لها n من المتغيرات التي تأخذ الشكل

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\, x_n = n_1$$
$$A_1\, x_1 + a_2\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n\, x_n = n_2$$

$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m_n}\, x_n = n_m$$

حيث a ثوابت s_n ..... s_2 s_1 تسمى حلا للمنظومه (1)

$$X_n = s_n\, , x_2 = s_2\, , x_1 = s_1$$

هو حلا لكل معادلة من المنظومه (1)

(4_ 2) النظام الخطي المتجانس Homogeneous linear system

اذا كانت الحدود المطلقة للنظام (1) جميعها اصفار فانها تأخذ الشكل :

$$a_1x_1 + a_2x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n x_n = 0$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_2\, nxn = 0$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}\, x_n = 0$$

النظام * نطلق عليه نظام من المعادلات الخطية المتجانسة بشكل عام انه ليس بالضرورة ان يكون النظام من المعادلات الخطية المتجانسة تحتوي على حل غير صفري

النظرية الأتية تحدد الشرط الكافي لحائزة النظام المذكور على حلا غير صفري

نظرية:

اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل لنظام من المعادلات الخطية المتجانسة فأنها تحوز على حلول غير صفريه

(2_5) المفاهيم النابعة عن طرق

1 _ المحددات Determinants
2 _ معكوس المصفوفة
3 _ معيار المصفوفة //a //

1 _ المحددات

تعريف المحدد: هو مجموعه عناصر تكتب على شكل صفوف واعمدة رباعي الشكل محصور بين مستقيمين شاقولين ويرمز بالرمز /a/ و det /a/

وفي الجبر الخطي المحدد (determinate) المصفوفة مربعة

N X n هو عدد يمكن ان يحسب من خلال مداخل المصفوفة المربعة يحدد عددا من الخصائص التحويل الخطي الذي تصفه المصفوفة يكون المحدد مساويا لصفر اذا وفقط اذا كانت المصفوفة غير معكوسة

خصائص المحدد

- Det (In) = 1 حيث In هي مصفوفه الوحدة n x n
- Det (a^T) = det (a) حيث A^T تعني منقولة المصفوفة
- Det (a^{-1}) =1/det(A) =det (a)
- اذا كانت A وB مصفوفتين مربعتين det (aB) = det (a) det (B)
- Det (Ca) = C^n det (a) حيث a مصفوفه بعدها nxn

أنواع المحددات

1_ محدد مصفوفه 2 x2

2_ محدد مصفوفه 3 x3

3_ محدد مصفوفه n x n

طريقة حساب محدد لمصفوفة 2 x 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad_bc$$

$$Ex\backslash\ a= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1*3_2*1 = 1$$

طريقة حساب محدد المصفوفة 3x3

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a*e*i+d*h*c+g*b*f_(d*b*i+a*h*f+g*e*c)$$

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1*4*8+2*7*1+3*5*6_\ 2*5*8+1*7*6+3*4*1$$

$$= 32 + 14 + 90 _\ 80 + 42 + 12$$

$$= 110$$

معكوس المصفوفة المربعة (Inverse of the square matrix)

تعريف اذا كانت A مصفوفة مربعه وكانت B تحقق ab= ab= I

ab = I =ab

حيث I المصفوفة المحايدة عندئذ يقال للمصفوفة A بأنها قابلة للانعكاس ويطلق على المصفوفة B معكوس المصفوفة a ويرمز لها بالرمز a^{-1}

مثال : جد مكوس المصفوفة

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل : سوف نحول المصفوفة a الى المصفوفة المحايدة بواسطة عمليات أولية وفي الوقت نفسة نجري هذه العمليات على المصفوفة المحايدة I3 للحصول على a^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وبأجراء العمليات

$$R \rightarrow (-2)\ r_2 + r_2$$

نحصل على

$$R_3 \rightarrow (-1) + r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad r\,2 \rightarrow \quad (-1)\,r2$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad R1 \rightarrow (-1)\,r2 + r1$$

$$R3 \rightarrow (-1)\,r2 + r3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right] \quad R3 \rightarrow (-1/4)\,r3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right] \quad R1 \rightarrow 3r3 + r1$$

$$R2 \rightarrow (-4)r3 + r2$$

وهكذا نستنتج

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

اذا كانت للمصفوفة المربعة A معكوس يسمى

B فان B تكون وحيدة وان $AB = BA = I$

وبناء على ذلك نسمي B معكوس للمصفوفة المربعة A ونقول ان A قابلة للعكس او غير منفردة

كما موضح :

1_ يقال ان المصفوفة المربعة A من نوع NXN غير منفردة اذا كان هنالك مصفوفة A^{-1} من النوع نفسة وتحقق $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ المصفوفة A^{-1} تسمى معكوس المصفوفة A

2_ يقال ان المصفوفة A منفردة اذا لم يوجد لها معكوس

مثال :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ معكوسها $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

حيث ان :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

معيار المصفوفة (Matrix standard)

معيار المصفوفة $A=[aij]$ هو قيمة حقيقية ويرمز للمعيار بالرمز //A// ويحقق الشروط التالية

1_ $0 <$//A// او $0 =$ //A// اذا وفقط اذا

اذا كانت $A=0$

2_ //A + B // ≤ //A // + //B //

3_ //A// / / = // A // حيث عدد حقيقي

4_ //A B // ≤ //A// //B//

هنالك نوعين من المعايير للمصفوفات هما

1_ اكبر قيمة مغلقة لمجموعة الاعمدة $\text{//A//}_1 = \max \sum_{i=1}^{n} |aik|$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 9 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$\text{//A//}_1 = [-2 \quad 13 \quad 18]$

2_ اكبر قيمة مغلقة لمجموعة الصفوف //A//∞ = max $\sum_{i=1}^{n} |aik|$

$$\text{//A//}\infty = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث

حل نظام المعادلات الخطية

1-طريقة الحذف

2-طريقة كاوس – كاوس جوردن

3-طريقة قاعدة كرامر

4-معكوس المصفوفة

مقدمة

تظهر المعادلات الخطية كمشكلة رياضية في كثير من التطبيقات الرياضية وغالباً ما تنتهي اليها مشاكل معقدة بعد تغييرها باستخدام طرق رياضية وخاصة في استعمال الطرق العددية " تحمل المعادلات كما تظهر في كثير من العلوم مثل علم الجير الخطي والمصفوفات بشكل خاص وسوف نتطرق في هذه الفصل الى اهم طرق المعادلات الخطية.

طريقة الحذف

هي احدى طرق حل نظام المعادلات الخطية من خلال التخلص من بعض المجاهيل بواسطة اضافة مضافات احدى المعادلات الى معادلات اخرى.

مثال/ حل منظومة المعادلات الخطية بطريقة الحذف

$x_1 + 2x_2 + 3x_{3=6}$

$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$

$3x_1 - x_2 - x_3 = -2$

R1
R2
R3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 2 & -3 & 2 & :14 \\ 3 & -1 & -1 & :-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 0 & -7 & 4 & :2 \\ 3 & -1 & -1 & :-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 0 & -7 & -4 & :2 \\ 0 & -5 & -10 & :-20 \end{bmatrix} \quad r_2 - r_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 0 & 5 & -10 & :-20 \\ 0 & -7 & -4 & :2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_a} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 0 & 1 & 2 & :4 \\ 0 & -7 & -4 & :2 \end{bmatrix} \xrightarrow{7r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 0 & 1 & 2 & :3 \\ 0 & 0 & 10 & :3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :6 \\ 0 & 1 & 2 & :4 \\ 0 & 0 & 1 & :3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_3 + 3x_{3=6--x_1-4+9=6=x_1=1}$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$

$$x_2 + 6 = x_2 = -2$$

X3=3

X1=1

X2=-2

X3=3

طريقه كاوس - جوردن

تعريف:

منظومة المعادلات الخطية الي تتكون من (m) من المعاديات الخطية ولها n من المجاهيل يمكن كتابتها بالشكل:

$$a_1x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_1n_1\ xn = n_1$$

$$am_1x_1 + am_2x_2 + \cdots mn = nm$$

ويمكن ان تكتب بصغيه منظومة على النحو

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & :n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & :n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & :n_3 \end{bmatrix}$$

تسمى هذا المصفوفة بالمصفوفة الممتدة لهذه المنظومة وعبرنا عن هذه المنظومة بالصيغة

فان المصفوفة الممتدة يمكن التعبير عنها بالشكل {A:B}

مثال / منظومة المعاديات الخطية

$$3x_1 + 7x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 5x_3 = 9$$

$$-8x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & :2 \\ 1 & 0 & 5 & :9 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

مبرهنة

مبرهة Ax=B - CX=D منظومتي المعادلات الخطية يتكون كلاهما من m من المعادلات الخطية ولهما n من المجاهيل فاذا كانت المصفوفتان الممتددتان

[EA, B3], [CID3] لهذه المنظومة متكافتين سطرياً كان المنظومتين لهما نفس الحلول.

مبرهنة

ونتيجتها تعطينا طريقه اخرى لحل منظومة المعادلات الخطية وهذه الطريقة تقوم تم الحصول على المصفوفة الممتدة Ax=B على اساس اعطاء المنظومات الخطية الما بالضيفة المدرجة المطرية واما الصيغة المدرجة المطرية المختزلة ولما Ecid) فمن الواضح ان المصفوفة E : B3 تكافئ اسطرياً المصفوف Eris كانت المصفوفة والتي يمكن حلها بطولة ومجموعة CxoD م كمثل منظومة المعادلات الخطة i3 نفسها AX=B الحلول الهدة المنظومة في مجموعة الحلول للمنظومة.

منظومة المعادلات الخطية فان هذا حمل لهذة المعلومة على اساس AX= B لتكن الى الصيغة المطرية المختزلة : تسمى طريقه [A: B] تحويل مصتفوقتها الممتدة حذف كاوس جوردن.

مثال

حل منظومة المعادلات الخطية بطريقه كاوس جوردن.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$3x + 0 - x_3 = 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :9 \\ 2 & -1 & 1 & :8 \\ 3 & 0 & -1 & :9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_1 + r_3]{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :9 \\ 0 & -5 & -5 & :-10 \\ 0 & -6 & -10 & :-24 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :9 \\ 0 & 1 & 1 & :2 \\ 0 & -6 & -10 & :-24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[6r_2 + r_3]{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & :5 \\ 0 & 1 & 1 & :2 \\ 0 & 0 & -4 & :-12 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & :5 \\ 0 & 1 & 1 & :2 \\ 0 & 0 & 1 & :3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3 + r_2]{-r_3 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & :2 \\ 0 & 1 & 0 & :-1 \\ 0 & 0 & 1 & :3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 3$$

طريقة قاعدة كرامر

في الجبر الخطي قاعدة كرامر بالإنكليزية (crammers rule) وهي مبرهنة تعطي حل حله لنظام معادلات خطية .

او ما قد يدعى جملة المعادلات الخطية بدلاله المحددات وسميت هذه القاعدة هكذا نسبة الى عالم الرياضيات السويسري غابريل كرامر (1704-1752) م

وحسابياً تعتبر هذه غير فعالة جداً لذلك فهي نادرة الاستخدام فيما في التطبيقات التي تتضمن العديد من المعادلات .

ولذلك تستخدم طريقة كاوس عادة في حل جمل المعادلات الخطية المتعددة بدلاً من قاعدة كرامر

- قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية crammers Rule

اذا كان AX=B نظاماً للمعادلات الخطية مكونة من n من المتغيرات بحيث $A \neq 0$ يكون النظام حل هو $xj=\frac{|Aj|}{|A|}$ j=1,2,3,…….n

حيث Aj هو محدد المصفوفة الناتجة من ابدال عناصر العمود j للمصفوفه A بعناصر العمود, B

والفائدة من قاعدة كرامر:

هي طريقه فعالة لا يجاد الحلول لانظمة ذات عدد عشوائي من المجهولات بشرط ان يكون لدينا نفس عدد المعادلات

ملاحظة/

1- ان قاعدة كرام قابله للتطبيق في حاله كون المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

2- يجب ان يكون محدد A مصفوفه المعاملات لا يساوي صفى.

3-تصبح قاعدة كرامم غير كفوة من الناحيه الحسابية عندما تكون n * n حيث n يمثل عدد المعاملات وهو يساوي عدد المجاهيل.

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$2x + 5y + 3z = 3$$

$$x + 8z = 4$$

الحل / عند الحل باستخدام قاعدة كرامر فتبع الاسلوب التالي

ا- تحول النظام إلى نظام المصفوفة

2 -ونجد المحدد للمصفوفة الممتدة

3-ونجد المحدد للمصفوفاتA1,A2,A3

4-ثم نطبق القاعدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A - 1(40) - 26 - 15 = -1 = 0$$

$$A1 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{A1}=a_1 = 2(40) - 2(12) + 3(-20) = 80 - 24 + 60 = -4$$

$$\text{A2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A2 = 1(12) - 2(13) + 3(5) = 12 - 26 + 15 = 1$$

$$A3 \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}$$

$$A3 = 1(20) - 2(5) + 2(-5) + 20 - 10 - 10 = 0$$

$$X = A_1 \qquad A_1 = \frac{4}{1}$$

$$y = \frac{A_1}{A} = -\frac{4}{-1} = 4$$

$$y = \frac{A_2}{A} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$Z = \frac{A_3}{A} = \frac{0}{-1} = 0$$

معكوس المصفوفة Inverse of Matrix

اذاكانت مصفوفة مربعه من الدرجه n وكان بالإمكان ايجاد مصفوفة مربعه B في نفس الدرجه لحيث ان AB=BA=IN فيقال ان A قابله للانتكاس وتسمى B معكوس المصفونهA ويرمز لها بالرمز (A-) ويمكن ملاحظة النقاط التالية.

1-يعرف معكوس المصفوفه فقط للمصفوفات المربعة.

2-أذا كانت A معكوس المصقوف B فأن B هي ايها معكوس.

3-اذا كانت A لها معكوس عندئذ يقال ان A قابله للأنعكاس.

4-اذاكانت A لها معكوس عندئذ هناك معكوس واحد فقط.

5-ليست جميع المصفوفات المربعه لها قابلية الانعكاس.

مثال:

المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ هي معكوسة المصفوفة

وذلك لان $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما ان المصفوفتان متساويتان فعندئذ الناصر متساوية ايضاً

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & +2b_{21} & b_{12} & +b_{22} \\ 2b_{11} & +3b_{21} & 2b_{12} & +3b_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} + 2b_{21} = ----1$$

$$b_{12} + 2b_{22} = 0----2$$

$$2b_{11} + 3b_{21} = 0----3$$

$$2b_{12} + 3b_{22} = 1----4$$

وبحل المعادلات اعلاه آنياً نجد ان

$$b_{11} = -3 \quad b_{12} = 2 \quad b_{21} = 2 \quad b_{22} = -1$$

وعليه فان المصفوفة B ستكون $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$=B ومن الممكن اثبات ان $B=A^{-1}$

المصادر

1- كتاب الجبر الخطي د. عمران جوبا
2- كتاب الجبر الصفي وتطبيقاته د . محمد ابراهيم سليمان
3- كتاب مقدمة في الجبر الخطي - مكتبة طريق العلم اسلم
4- مبادئ الجبر الخطي : مكتبه الشهيد خالد حسن
5- مبادئ الجبر الخطي : موقف حجة :كتب نيل وفرات
6- مبادئ الجبر الخطي: المؤلف مهدي صادق عباس جامعة المستنصرية
7- المؤلفون : موقف حجة ، محمد هيلات ، و محمد خنفر تاريخ النشر 2020
8- Linear Algebra and its Applications David C. Lay
9- Introduction to linear Algebra- Gilbert Strang (MIT)