بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی

عنوان

برنامه‌ریزی برشی موجودی زیر بهینه یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

استاد راهنما
دکتر علی وحیدیان

نگارنده
علی فرحان حاشوش

زمستان ۱۳۹۶

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه نام دانشگاه‌تان

عنوان: برنامه‌ریزی برشي موجودي زیر بهینه یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

نام نویسنده: علی فرحان حاشوش

استاد راهنما: دکتر علی وحیدیان

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی کاربردی

رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی

تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۸/۱۶ تاریخ دفاع: ۱۳۹۶/۱۱/۲۹

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۸۹

چکیده:
یکي از مسایل شناخته شده در زمینه برنامه ریزي تولید مساله برش است. این مساله وقتی‌که ماده اولیه برش در حجم وسیعي برش یابد اهمیت بیشتري پیدا مي کند. مساله برش یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی هم اکنون یک مسأله باز به شمار می‌آید. اما بسیاری از محققان این مسأله را به عنوان یک مسأله بهینه سازی با جواب‌هایی نزدیک جواب بهینه حل نموده اند. همچنین اکثر پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه بدون در نظر گرفتن تقاضا بوده است.
در این پایان نامه با استفاده از روش مبتنی بر بهینه سازی و یک رویکرد جدید، مسأله برش یک بعدی را به یک معادله سیاله با n متغیر تبدیل کردیم و سپس تمام جواب‌های این معادله را با الگوریتم پاسکال به دست آوردیم. همچنین تعمیمی از این مسأله را به منظور کاهش تعداد برش‌ها و کاهش ضایعات مواد اولیه برای تعداد بیشتری میله به دست آوردیم. در فصل سوم برای مسائل برش در بعد دو، با توجه به اینکه برش‌ها بر اساس طول و عرض سفارشات و یا طول و عرض مستطیل اصلی انجام شود، مسأله را به چهار زیر مسأله تقسیم کرده و در هرکدام از حالت‌ها جواب بهینه را به دست آوردیم. در ادامه نیز روش گفته شده را به بعد سه تعمیم داده و برای اثبات درستی روش مثال‌هایی ارائه کردیم.

واژگان کلیدی: مسأله برش و چیدن، معادله سیاله، بهینه سازی

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : برنامه‌ریزی برشی موجودی زیر بهینه یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

اینجانب علی فرحان حاشوش دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه نام دانشگاه‌تان نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر علی وحیدیان متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه نام دانشگاه‌تان است و مقالات مستخرج با نام ''دانشگاه نام دانشگاه‌تان''و یا ''Ferdowsi University of Mashhad'' به چاپ خواهد رسید.

هـ. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

هوالعلیم،

به نام حق که ...

می کوش به هر ورق که خوانی　　تا معنی آن تمام دانی

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر وحیدیان صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد پژوهش حاصل فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و انسانیت و منش والای ایشان هستم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر عفتی و جناب آقای دکتر سلیمانی فرد که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

علی فرحان حاشوش

زمستان ۱۳۹۶

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

پیش گفتار

در مسأله برش موجودی‌ها یک رهیافت ریاضی-کاربردی نیاز داریم به طوریکه برش موجودی‌ها با کمترین ضایعات (یک بعدی، دو بعدی، سه بعدی) انجام شود. به عنوان مثال برش لوله‌ها وصفحات (ورق) فلزی را در نظر بگیرید. باید برش‌ها طوری انجام شود که کمترین ضایعات را داشته باشیم. این مساله معروف به مسأله برشی موجودی است. در این راستا کارهای پژوهشی فراوانی انجام شده است ولی هنوز این مسأله یک مسأله باز (open problem) به حساب می‌آید، چون هر محققی توانسته تا اندازه‌ای به مسأله بهینه نزدیک شود. ما در این پروژه سعی می کنیم که مسأله را از نظر ریاضی به شکل بهینه بیان کرده و جواب‌های بهینه و یا تقریبا بهینه دریافت کنیم. همچنین برای بررسی دقیق‌تر الگوریتم‌هایی نیز معرفی می‌کنیم. از دیگر موارد استفاده این مسأله می‌توان به کاربردهای آن در صنعت خودروسازی، در صنعت شیشه، در صنعت جرم مصنوعی و طبیعی و به طور عمده در صنعت پوشاک برای چیدن الگوها به منظور کاهش ضایعات اشاره کرد.

مساله عمده اندازه‌گیری و مساله برش سهام قدمتی چند ده ساله دارد. پیشرفت‌های زیادی در رابطه با فرمولاسیون‌ها و روش‌های حل این دو مساله صورت گرفته است. اکثر تحقیقات بر روی حل این مسائل به طور جداگانه انجام شده است. با این حال، با پیشرفت سریع در نظریه بهینه‌سازی، نرم‌افزار، سخت‌افزار و... درک بهتری از این مسائل و همچنین وابستگی بین آنها به ما داده است. در سال‌های اخیر و در موارد عملی، به ادغام این دو مساله توجه بیشتری شده است. این ادغام یعنی مساله اندازه‌گیری یکپارچه و مساله برش موجودی، موضوع اصلی در این پایان‌نامه می‌باشد. این مساله اغلب از کاربرد عملی در صنایع مختلف حاصل می‌شود. به‌عنوان مثال، در صنعت کاغذ، کویل‌های بزرگ تولید می‌شوند و سپس به کویل‌های کوچکتر متصل می‌شوند که به درخواست‌های مشتری مربوط می‌شود. در صنعت مبلمان، صفحات چوبی به چند بخش چوبی متصل می‌شوند تا به محصولات نهایی متصل شوند. در صنعت آلومینیوم، پروفیل‌های آلومینیومی برای ساخت چند نوع پنجره برش داده شده‌اند.

مسئله اندازه‌گیری (LSP)، تجارت بین هزینه‌های نگهداری و نگهداری موجودی را برای تعیین حداقل هزینه یک طرح، برای یک (یا چندین) ماشین (ها) برای پاسخگویی به تقاضا مورد بررسی قرار می‌دهد. همچنین این مساله را می‌توان با توجه به ویژگی‌های مختلف طبقه‌بندی کرد، مانند تعداد سطوح ساختار تولید (تک یا چند سطح)، تقاضا (دائمی یا پویا)، افق زمانی (محدود یا بی‌نهایت) و توجه به محدودیت‌های ظرفیت و زمان راه‌اندازی. مقالات بسیاری در مورد مسئله lot-zing در محیط‌های مختلف، ارائه شده است. از جمله آنها می‌توان به مقالات Karimi و همکاران، (۲۰۰۳)، Brahimi و همکاران، (۲۰۰۶)،

Buschkühl و همکاران (۲۰۰۸)، جانس و دگرای (۲۰۰۸) و رابینسون و همکاران (۲۰۰۹)، گروه کار یورو در اندازه‌گیری لات (EWGLOT) (https://www.euroonline.org/web/ewg/37/ewgon-lot-sizing-ewg-lot) اشاره کرد. در کتاب پچت و ولزی (۲۰۰۶) بحث کاملی درباره مشکلات اندازه‌گیری بزرگ ارائه شده است. همچنین بررسی روش‌های حل را نیز در کتاب Jans و Degraeve (۲۰۰۷) می‌توان یافت.

فصل ۱

مساله برش موجودی[۱]

۱.۱ مقدمه

در فرایند تولید بسياري از صنايع نياز است تا قطعات كوچكتري با برش اجسام بزرگتر حاصل گردند و يا به طور معادل قطعه هاي كوچكتري در يك جسم بزرگتر جاي داده شوند. در اين عمل معموً لا بخش هايي از جسم بزرگتر به قطعاتي تبديل مي شوند كه قابل استفاده در هيچ يك از محصولات توليدي نبوده و به عنوان ضايعات و دور ريز محسوب مي شوند. كاهش چنين ضايعاتي نقش مهمي دركاهش هزينه ها داشته و به عنوان يكي از موضوعات علم تحقيق در عمليات و تحت عنوان مسئله برش توجه بسياري از محققان را در نيم قرن گذشته به خود جلب كرده است. در صنايع بسياري مانند صنايع توليد كننده بدنه اتومبيل ، لوازم خانگي، سازه هاي ساختماني، كشتي و هواپيما سازي، كاغذ، پوشاك، چرم، سنگ بري ويا در فعاليتهايي مانند حمل ونقل، انبارداري، بسته بندي، چاپ مي توان مسئله برش و يا مسائل نزديك به آن را مشاهده نمود. از طرف ديگر، چنانچه فرآيند برش بدون استفاده از روش هاي علمي صورت گيرد، به خصوص در هنگامي كه تعداد وانواع قطعات مورد نياز زياد و متغير باشد معمولا مقادير زيادي ضايعات ايجاد خواهد شد. زيرا تعداد الگوهايي كه مي توان صفحات يا ميله هاي بزرگ را به تكه

[۱] Cutting stock problem

هاي كوچكتر مورد نياز تقسيم كرد بسيار زياد بوده و تعداد كمي از اين الگو ها ، داراي ضايعات كم هستند. طبيعي است كه فقط با اتكا به ادراك شهودي و تجربه يک فرد احتمال انتخاب سبک هاي برش بهينه از بين تعداد بسيار زياد آنها، بسيار كم خواهد بود. بنابر اين لازم است تا الگوريتمي ارائه گردد كه براي هر تركيبي از قطعات بتواند به نحو موثر و كارا روشي را ارائه نمايد تا با برش طبق آن ،ضمن تامين قطعات مورد نياز، حتي الامكان به حداقل درصد ضايعات دست يافت.

پیشرفت‌های زیادی در رابطه با فرمولاسیون‌ها و روش‌های حل این دو مساله صورت گرفته است. اکثر تحقیقات بر روی حل این مسائل به طور جداگانه انجام شده است. با این حال، با پیشرفت سریع در نظریه بهینه‌سازی، نرم‌افزار، سخت‌افزار و... درک بهتری از این مسائل و همچنین وابستگی بین آنها به ما داده است. در سال‌های اخیر و در موارد عملی، به ادغام این دو مساله توجه بیشتری شده است. این ادغام یعنی مساله اندازه‌گیری یکپارچه و مساله برش موجودی، موضوع اصلی در این پایان‌نامه می‌باشد.

مسئله اندازه‌گیری (LSP)، تجارت بین هزینه‌های نگهداری و نگهداری موجودی را برای تعیین حداقل هزینه یک طرح، برای یک (یا چندین) ماشین (ها) برای پاسخگویی به تقاضا مورد بررسی قرار می‌دهد. همچنین این مساله را می‌توان با توجه به ویژگی‌های مختلف طبقه‌بندی کرد، مانند تعداد سطوح ساختار تولید (تک یا چند سطح)، تقاضا (دائمی یا پویا)، افق زمانی (محدود یا بی‌نهایت) و توجه به محدودیت‌های ظرفیت و زمان راه‌اندازی. مقالات بسیاری در مورد مسئله lot-zing در محیط‌های مختلف، ارائه شده است. مقالات بسیاری در مورد مسأله lot-zing شده اند که از جمله آنها می‌توان به مقالات [۲۱]، [۲]، [۲۲]، [۵]، [۱]. اشاره کرد. همچنین در کتاب [۲۳] و [۴] بحث کاملی درباره مشکلات اندازه‌گیری بزرگ و روش‌های حل آن ارائه شده است.

در مساله برش موجودی (CSP) قطعات کوچکتر به عنوان لیست سفارشات و قطعات بزرگ تر به عنوان مواد خام شناخته می شوند . هدف اصلي، کمينه کردن ضايعات حاصل از برش به منظور تامين کامل ليست سفارشات از مواد خام است . به همین دلیل این مسئله را مسئله کاهش ضایعات نیز می نامند. اهمیت اقتصادی و عملیاتی مسأله برش و مشکلات حل آن، باعث پیدایش مقالاتی در این زمینه گشته است [۹؛ ۱۴؛ ۱۵؛ ۱۶؛ ۱۷؛ ۱۸؛ ۱۹؛ ۲۰]. مساله برش موجودی را بر اساس چهار ویژگی ابعاد (یعنی تعداد ابعاد مربوطه در فرآیند برش)، نوع تخصیص (یعنی انتخاب اشیاء و قطعات)، دسته‌بندی اشیاء بزرگ (یعنی انواع اشیاء) و مجموعه‌ای از قطعات کوچک (یعنی انواع قطعات) تقسیم‌بندی می‌کنیم. پس از آن [۴] تغییرات در نوع

شناسی، جنبه‌های پالایش از مشکلات مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است.

این ادبیات به طور جداگانه از طریق مدل‌هایی که فقط در تجارت اصلی در هر مشکلی دخالت می‌کند، با مشکل بزرگ اندازه‌گیری و برداشتن مشکل سهام کنار می‌رود. با این حال، برخی از بررسی مقالات [۱۳؛ ۱۴؛ ۱۸] اشاره‌گر تمایل است که برخورد با مشکلات مختلف به صورت یکپارچه یک جنبه مهم از تحقیقات آینده است. در طول سال‌های اخیر، این گرایش در مورد مسائل مربوط به اندازه‌گیری و برش سهام، و تجزیه و تحلیل موارد عملی که با توجه به مشارکت نگرانی‌های صنعتی مربوطه، به یک انگیزه بیشتر منتهی شد، مشاهده شد. ایده اصلی یکپارچه‌سازی مقیاس بزرگ و برش مشکل سهام تصمیمات مربوط به هر دليلي را به طور همزمان در نظر بگيرد تا بتواند وابستگي متقابل بين اين تصميم‌ها را براي دستيابي به يک راه حل بهتر جهاني به دست آورد. وقتی نویسندگان مختلف به یک مسأله اندازه‌گیری و برش یکپارچه اشاره می‌کنند، اغلب فرض‌های مختلفی را نسبت به سطح یکپارچگی در نظر می‌گیرند و از این رو مدل‌های کاملا متفاوت را در نظر می‌گیرند. ما یک فرمول عمومی برای این پیشنهاد ارائه می‌دهیم مشکل ترکیبی که دو جنبه اصلی ادغام را در نظر می‌گیرد،

الف. یکپارچگی در دوره‌های زمانی

ب. یکپارچگی بین سطوح تولید.

این مدل فراهم می‌کند یک ابزار است که به ما اجازه می‌دهد تا به روشنی مدل‌های مختلف ارائه شده در ادبیات را طبقه‌بندی کنیم. طبقه‌بندی با اولین ارائه یک فرمول عمومی انجام می‌شود. یک مدل یکپارچه شامل سه سطح تولید و چندین دوره زمانی، با هدف رسیدن به بالاترین میزان ادغام بین اندازه و اندازه مشکل برش سهام است. مدل‌های ادبیات براساس ویژگی‌های آنها با توجه به افق زمانی و سطح تولید طبقه‌بندی می‌شوند.

مسائل مهم دیگر، مربوط به اشیاء، قطعات و محصولات نهایی، همچنین توجه به محدودیت‌های ظرفیت و تنظیمات در سطوح مختلف نیز ارزیابی می‌شود. ارائه یک مدل کلی یکپارچه و طبقه‌بندی مدل‌های مختلف یکپارچه در ادبیات کنونی، نقش اصلی این مقاله است. به طور کامل از اطلاعات ما، هیچ بررسی عمومی و تجزیه و تحلیل از اندازه یکپارچه و برش مشکلات سهام وجود دارد تا کنون انجام شده است علاوه بر این، این تحلیل همچنین به ما اجازه می‌دهد که زمینه‌های جالب برای تحقیقات آینده را مشخص کنیم. دامنه مقاله محدود به جنبه‌های مدل‌سازی مربوط به مدل‌های یکپارچه است. بحث مفصلی از

رویکردهای راه حل از این قرار است. این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲.۱، مدل‌های مشکل اندازه‌گیری و برش سهامی که براساس این کار هستند، ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته است. در این بخش، یکپارچگی اندازه‌گیری و برش مقدماتی در این مقاله ارائه شده است. بخش ۲.۲.۱ ملاک‌های طبقه‌بندی مورد استفاده و طبقه‌بندی و بحث در مورد مطالعات بر روی مشکلات یکپارچه را ارائه می‌دهد. در نهایت، بخش ۳.۲.۱ نتایج حاصل از مقاله و جهت تحقیقات آینده را ارائه می‌دهد.

۲.۱ مدل های ریاضی[۱]

در این بخش، مدل‌های اساسی برای مساله اندازه گیری بزرگ و همچنین مساله برش ارائه شده است. همچنین بحث مختصری راجع به تعمیم هرکدام از مسائل انجام خواهیم داد.

۱.۲.۱ بحث در مورد مسأله اندازه‌گیری لات[۲]

مشکل عمده اندازه‌گیری برای اولین بار توسط [۲۴] برای یک آیتم و توسط [۱۷] برای چندین مورد با محدودیت‌های ظرفیت معرفی شد. در این بخش، ما یک مسأله اندازه‌گیری ظرفیت با زمان راه‌اندازی (CL) که توسط [۲۰] ارائه شده است را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم‌گیری زیر را در نظر بگیرید :

مجموعه

T : مجموعه‌ای از دوره‌های زمانی (index t)

I : مجموعه‌ای از آیتم‌ها (index i)

پارامترها

sc_t^i : هزینه نصب آیتم i در دوره t

vc_t^i : هزینه تولید واحد آیتم i در دوره t

[۱] Mathematical Models
[۲] Discussion of the Lot-Sizing Problem

hc_t^i : هزینه نگه داشتن واحد آیتم i در دوره t

st_t^i : زمان ساخت آیتم i در دوره t

vt_t^i : زمان تولید واحد مورد i در دوره t

d_t^i : تقاضای آیتم i در دوره t

sd_{tr}^i : مجموع تقاضای آیتم i از دوره t به دوره r

cap_t : ظرفیت (محدودیت زمانی) موجود برای تولید آیتم در دوره t

متغیرهای تصمیم‌گیری

X_t^i : مقدار تولید آیتم i در دوره t

S_t^i : موجودی برای آیتم i در پایان دوره t

Y_t^i : متغیر باینری نشان‌دهنده تولید شدن یا نشدن آیتم i در دوره t است.

$$\min \sum_{t\in T}\sum_{i\in I}(sc_t^i\, Y_t^i + vc_t^i\, X_t^i + hc_t^i\, S_t^i) \tag{۱.۱}$$

$$sd_{tT}^i + X_t^i = d_t^i + S_t^i \qquad \forall i, \forall t \tag{۲.۱}$$

$$X_t^i \leqslant sd_{Tt}^i\, Y_t^i \qquad \forall i, \forall t \tag{۳.۱}$$

$$\sum_{i\in T}(ct_t^i\, Y_t^i + vt_t^i\, X_t^i) \leqslant cap_t \qquad \forall t \tag{۴.۱}$$

$$Y_t^i \in \{۰, ۱\} \qquad \forall i, \forall t \tag{۵.۱}$$

$$X_t^i, S_t^i \in \mathbb{R}^+ \tag{۶.۱}$$

تابع هدف (۱.۱) کل هزینه راه‌اندازی، هزینه تولید و نگهداری موجودی را به حداقل می‌رساند. محدودیت‌های (۲.۱) محدودیت‌های تنظیم کننده تقاضا هستند: که از موجودی دوره قبلی و تولید دوره جاری به منظور برآورده کردن تقاضای فعلی استفاده می‌کند. محدودیت‌های (۳.۱) متغیر تنظیم را به یکی تحمیل می‌کنند اگر هر تولیدی در دوره رخ دهد. محدودیت‌های بعدی (۴.۱) باعث می‌شود که کل تولید و زمان راه‌اندازی بیش از ظرفیت موجود در هر دوره نباشد. در نهایت، محدودیت‌ها (۵.۱) و (۶.۱) محدودیت‌های یکپارچگی و نامنفی بودن می‌باشند. مدل CL یک سیستم سطح تکمیلی را نشان می‌دهد که مربوط به یک مسأله است که محصول نهایی به‌طور مستقیم پس از پردازش در یک عملیات به دست می‌آید. تقاضای مربوطه برای محصولات نهایی به عنوان تقاضای مستقل شناخته می‌شود. از سوی دیگر، در سیستم چند سطحی، در میان مواردی که در لایحه ماده وجود دارد، ارتباط وجود دارد. تولید محصولات نهایی، تقاضا برای اجزای تشکیل‌دهنده را نشان می‌دهد که تقاضای وابسته را نشان می‌دهد. در مدل چند سطحی، محدودیت تقاضا (۲.۱) تغییر می‌یابد تا بین تقاضای وابسته و مستقل تفاوت کند. برای فرمول‌بندی یک مسأله چند سطحی، داده‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$S(i)$: مجموعه‌ای از جانشینان مستقیم آیتم i ؛ (index I)

r_L^i : تعداد اقلام مورد استفاده i در یک واحد از آیتم l .

i می تواند تقاضای مستقل خود و همچنین تقاضای وابسته خود را که توسط تولید جانشینان مستقیم آن ایجاد شده است، داشته باشد. محدودیت تنظیم کننده تقاضای جدید به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$s_{t-۱}^i + X_t^i = d_t^i + \sum_{I \in S(i)} r_L^i \, X_t^L \qquad \forall i, \forall t \qquad (۷.۱)$$

در میان فرمت‌های متنوع مسأله اندازه‌گیری بزرگ، ما استفاده از چند دستگاه برای تولید موارد و همچنین امکان انبار کردن بخشی از تقاضا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. [۲؛ ۵؛ ۲۰؛ ۲۵؛ ۲۶] ساختار راه‌اندازی در محدودیت ظرفیت، یکی دیگر از مواردی است که پیچیدگی lshgi را مورد بررسی قرار می‌دهد [۱۵]. راه‌اندازی یک محصول می‌تواند وابسته یا مستقل از محصول قبلی در دنباله تولید باشد [۲۵]، یا راه‌اندازی نهایی در یک دوره می‌تواند به دوره بعدی منتقل شود [۱۵؛ ۱۷]. فرمول‌های جایگزین برای مسأله اندازه‌گیری بزرگ در ادبیات ارائه شده است. ما اشاره به اصلاح ساختار شبکه ارائه شده توسط [۱۶] که مشکل بزرگ‌سازی را به عنوان یک مشکل کوتاه‌ترین مسیر و اصلاح فرم محل کارخانه ساده [۱۲] را اصلاح می‌کند.

این اصلاحیه‌ها فرمول‌های قوی هستند، زیرا در مقایسه با فرمول‌های اصلی، مرزهای پایین‌تر را فراهم می‌کنند. گسترش این اصلاحات در الگوریتم‌های تجزیه به طور موفقیت‌آمیز برای به دست آوردن مرزهای پایین‌تر بهبود یافته است [۵؛ ۱۸؛ ۱۹؛ ۲۱].

۲.۲.۱ بحثی پیرامون مسأله برش

برای مدل‌سازی CSP و عناصر اصلی آن، دو فرمول‌بندی در پژوهش‌ها در نظر گرفته شده است. اولی مورد یک فرمول جمع و جور برای مورد یک بعدی است و توسط [۱۵] پیشنهاد شده است. این فرمول‌بندی که به KT معروف است، همچنین به عنوان مدل انتساب عمومی برای CSP شناخته می شود [۱۰]. مجموعه P، پارامترها و متغیرهای تصمیم گیری برای مدل KT را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

مجموعه

P : مجموعه‌ای از قطعات (index p)

پارامترها

O : حداقل تعداد اشیاء مورد نیاز

L : طول جسم

l_p : طول قطعه p

d^p : تقاضا از قطعه p

متغیرهای تصمیم‌گیری

y_o : متغیر باینری که نشان می‌دهد که آیا شی مورد استفاده قرار می‌گیرد یا خیر.

h_o^p : تعداد واحدهای قطعه p برش از شیء o

مدل KT

$$\min \sum_{o=1}^{O} y_o \tag{۸.۱}$$

$$subject\ to:$$

$$\sum_{o=1}^{O} h_o^p \leqslant d^p \qquad \forall p \tag{۹.۱}$$

$$\sum_{p=1}^{P} L_p\, h_o^p \leqslant L\, y_o \qquad \forall o \tag{۱۰.۱}$$

$$y_o \in \{0, 1\} \qquad \forall o \tag{۱۱.۱}$$

$$h_o^p \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall o, \forall p \tag{۱۲.۱}$$

تابع هدف (۸.۱) تعداد اشیاء برش را به حداقل میرساند. محدودیت (۹.۱) تضمین می‌کند که تقاضا برای هر بخش تأمین می‌شود. محدودیت (۱۰.۱) محدودیت دکمه‌ای است و تضمین می‌کنند که اگر شیء o بریده شود، ترکیب قطعه‌هایی که جدا شده اند نمی‌تواند از اندازه آن فراتر رود. در نهایت، مجموعه محدودیت‌های (۱۱.۱) و (۱۲.۱) شرایط یکپارچگی و غیرمنفی بودن را اعمال می‌کند. در ادامه مدل CSP را معرفی می‌کنیم که بهترین مدل شناخته شده برای مساله برش است. این مدل توسط [۱۵] پیشنهاد شده است و به اختصار آن را GG می‌نامیم. این فرمولاسیون در مقایسه با مدل KT انعطاف‌پذیرتر است. به این معنا که می‌توان آن را به راحتی به مسائل چند بعدی و سایر توسیع‌های مسأله CSP تبدیل کرد. فرمول GG از ایده برش الگوها با محدودیت بر روی اشیا استفاده می‌کند. پارامترها و متغیرهای تصمیم‌گیری برای مدل GG را به صورت زیر در نظر بگیرید:

مجموعه

J : مجموعه‌ای از الگوهای برش (index j)

پارامترها

a_j^p : تعداد دفعاتی که قطعه p در الگوی j برش گنجانده شده است.

متغیرهای تصمیم‌گیری

Z_j : تعداد اشیایی که با توجه به الگوی برش j برش داده می‌شوند.

مدل GG

$$\min \sum_{j=1}^{J} Z_j \tag{۱۳.۱}$$

$$subject\ to$$

$$\sum_{j=1}^{J} a_j^p \geqslant d^p \quad \forall\, p \tag{۱۴.۱}$$

$$Z_j \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall\, Z \tag{۱۵.۱}$$

تابع هدف (۱۳.۱) تعداد اشیاء برش را به حداقل می‌رساند. محدودیت‌ها (۱۴.۱) اطمینان حاصل می‌کنند که تقاضا برای هر قطعه از طریق برش اشیاء موجود در انبار و با استفاده از الگوهای برش مختلف برآورده می‌شود. محدودیت‌ها (۱۵.۱) محدودیت‌های یکپارچگی هستند. فرمول GG را می‌توان با استفاده از اصل تجزیه دانتزیک و ولف به فرمول KT تبدیل کرد [۱۷؛ ۲۱]. اما با توجه به تعداد زیاد متغیرهای تصمیم‌گیری، حل این مسأله سخت به نظر می‌آید. به همین دلیل [۲۳] ابتدا مسأله برنامه‌نویسی خطی را با استفاده از روش تولید ستون حل کردند. ستون‌های Z_j و پارامترهای مرتبط با آن (۱۴.۱) به وسیله حل یک زیر مسأله تولید می‌شوند و ستون‌ها به منظور بهبود راه حل فعلی به مسأله اصلی اضافه می‌شوند. برای مسأله برش، زیر مسأله به مسأله کوله پشتی تبدیل می‌شود [۴؛ ۵]. زیرمجموعه‌ها، روش‌های دیگر راه حل نیز در پژوهش‌ها ارائه شده است [۲؛ ۸؛ ۹]. به طور معمول، حل مسأله آرامش‌بخش است و یک راه حل صحیح می‌تواند با استفاده از اکتشافی بر اساس روش تقریبی کسر و روش‌های گرد کردن [۹؛ ۱۰؛ ۱۴] و یا توسط یک فرآیند شاخه‌ای و قیمت است که فرآیند تولید ستون را در یک رویکرد شاخه‌ای و وابسته تعبیه می‌کند [۵؛ ۶؛ ۷؛ ۸]. فرمولاسیون‌های جایگزین برای مسأله سهام برش پیشنهاد شده است، مانند مدل یکپارچه [۱۴]. CSP در فرم استاندارد خود، تعیین می‌کند که چگونه اجسام بزرگ را می‌توان به قطعات کوچکتر تقسیم کرد به طوریکه تقاضا برای قطعات برآورده شود. در طول سال‌ها، مدل استاندارد گسترش یافته است و جنبه‌های مختلفی که در واقعیت یافت می‌شود را مورد بررسی قرار داده است. بعضی از مواردی که برای مدل عمومی یکپارچه مورد توجه

هستند، در زیر شرح داده شده است. استفاده از انواع مختلف اشیاء (به عنوان مثال با طول های مختلف، وزن یا ضخامت) یکی از ویژگی های مهم در برخی از صنایع می باشد و می تواند منجر به استفاده بهتر از مواد کلی شود. به طور کلی، اضافه کردن هزینه های مرتبط با اهداف مختلف ضروری است. [۵]. با اضافه کردن متفاوت اشیاء، ایجاد یک راه حل بهینه برای این مشکل دشوارتر می‌شود. اشیاء ممکن است در مقدار نامحدود در دسترس باشند [۳؛ ۵]، یا ممکن است در معرض سطح بالایی قرار گیرد [۲۰؛ ۲۱]. به طور کلی، پس از اینکه اشیاء از طریق فرآیند برش عبور می‌کنند، از دست دادن فرآیند اجتناب‌ناپذیر تولید می‌شود که در نهایت می‌تواند به یک زباله قابل توجه مواد خام تبدیل شود. با این حال، در بعضی موارد، از دست دادن تر و تمیز از یک الگوی برش، لزوما به عنوان مواد زائد تبدیل نمی‌شود. اگر اندازه آن به اندازه کافی بلند باشد، مواد خام را می‌توان در انبار ذخیره کرد تا بعدا به عنوان ورودی در روند برش برای تولید قطعات استفاده شود [۵؛ ۷]. در فرمت‌های مورد بحث تاکنون، هزینه مواد خام تاثیر زیادی در مشکل برداشت سهام دارد. با این حال، در بعضی از کاربردهای صنعتی مانند صنایع کاغذ، مواد خام دارای ارزش کم در واحد هستند، در حالی که چند عملیات پردازش پیچیده لازم است. محصولات نهایی را به دست آمده در چنین مواردی معمولا نامناسب بودن تعریف معیار تصمیم برای به حداقل رساندن هزینه‌های ترخیص یا هزینه‌های اجناس است و یک معیار واقعی‌تر، به حداقل رساندن سایر هزینه‌های کنترل است ([۴]). یک مورد مهم این است که ترکیب هزینه‌های مربوط به استفاده از یک الگوی برش جدید d متفاوت از قبلی، از آنجا که یک راه اندازی ضروری است هر زمان که یک الگوی جدید برش آغاز می‌شود و تجهیزات برش برای این الگوی برش جدید آماده می‌شود. راه اندازی این نوع شامل کاهش ظرفیت تولید، هزینه‌های اضافی و مصرف منابع است. در چنین مواردی، به حداقل رساندن هزینه‌های نصب به حداقل رساندن هزینه‌ها و هزینه‌های زباله ([۱]) اضافه می‌شود. برای مدل‌سازی یک محدودیت راه اندازی در فرمول GG، ابتدا W_j را به عنوان یک متغیر باینری تعریف می‌کنیم که نشان می‌دهد اگر الگوی برش j استفاده می‌شود یا نه و M به عنوان یک عدد بزرگ است. محدودیت زیر به مدل GG اضافه شده است ([۲؛ ۱۳]):

$$Z_j \leqslant M\, W_j \qquad \forall j \tag{۱۶.۱}$$

محدودیت (۱۶.۱) تضمین می‌کند که تنظیم الگوی برش هر بار که یک الگوی برش حداقل یکبار استفاده می‌شود انجام شود. در برخی موارد، تعدادی از الگوهای برش به حداقل می‌رسد ([۷]) در موارد دیگر محدودیتی برای تعدادی از تنظیمات الگوی برش

اعمال می‌شود، در حالی که بهینه‌سازی برخی از اهداف دیگر مانند انحراف از تقاضا ([۵]) یا به حداقل رساندن تعداد اشیاء مورد استفاده ([۱۴]). روش‌های دیگری ابتدا یک هدف منظم را بهینه‌سازی می‌کنند، از جمله به حداقل رساندن تعداد اشیاء مورد استفاده یا زباله‌ها، و بعد راه حلی پیدا می‌کند که تعداد طرح‌های برش مورد استفاده را به حداقل برساند ([۹؛ ۱۱؛ ۱۲]). برخی از مقالات نیز یک مشکل چند هدفه را در نظر می‌گیرند ([۱۳؛ ۱۵]). یک بررسی اخیر در مورد برش با تنظیمات در ([۶]) یافت می‌شود.

۳.۲.۱ مدل کانتورروویچ[۱]

مدل زیر در [Kan60] و در نظرسنجی [dC02] شرح داده شده است. این فرمول انتصاب در [Pee02] نامیده می‌شود. اجازه دهیم N برابر حد مجاز تعداد طول سهام مورد نیاز در یک راه حل بهینه باشد و x_{ij} $(i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,N)$ تعداد آیتم‌های نوع i در $j*$امین طول سهام قرار دهید $y_j = 1$ اگر طول سهام $j*$ در راه حل استفاده شود، در غیر این صورت $y_j = 0$.

$$Z_{kant} = \min \sum_{j=1}^{N} y_i \tag{1.17}$$

$$s.t$$

$$\sum_{i=1}^{m} l i x_{ij} \leqslant L y_i \quad ; \quad j = 1,\cdots,N \tag{1.18}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \geqslant b_i \quad ; \quad i = 1,\cdots,m \tag{1.19}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^{+} \quad , \quad y_i \in B \qquad \forall i,j \tag{1.20}$$

آرامش مداوم این مدل (زمانی که همه متغیرها مجاز به گرفتن ارزش واقعی) بسیار ضعیف است. مثال زیر با ضایعات بزرگ را در نظر بگیرید

$$\varepsilon \to +0 \quad ; \quad L_1 = \frac{L}{2} + \varepsilon \quad : m = 1$$

[۱] The Model of Kantorovich

ارزش عاملی آرامش $Z_{kant} = Z_{kant}(\frac{۱}{۲} + \frac{\varepsilon}{L})$ است.

در واقع برابر با ماده $\frac{\sum l_I \, b_i}{L}$ است. همانطور که آرامش قوی‌تر وجود دارد، استفاده از این مدل به عنوان یک چارچوب در یک چارچوب شمارنده مفید نیست. علاوه بر این، مدل تقارن زیادی دارد: با مبادله مقادیر مربوط به طول سهام مختلف، راه حل معادل آن به دست می‌آید که به طور کلی منجر به افزایش تلاش در رویکرد شمارشی می‌شود.

۴.۲.۱ مدل تولید ستون گیلمور و کوموری[۱]

دلیل ضعف آرام‌سازی مدل (۱۷.۱) - (۲۰.۱) این است که تعداد اقلام در طول سهام و فرکانس الگوی y_i می‌تواند غیر عدد صحیح باشد. تجزیه دنتزیک و ولف بر روی محدودیت کوله پشتی (۱۸.۱) اعمال می‌شود، هر بردار $(X_{۱j}, \cdots, X_{mj})$; $j = ۱, \cdots, N$ را محدود می‌کند در داخل کوله‌پشتی کلاه گیس، که مجموعه‌ای از ترکیب خطی از تمام الگوهای برش قابل اجرا است. یک الگوی برش توضیح می‌دهد که تعداد موارد هر کدام از یک طول سهام کاهش می‌یابد. بردارهای ستونی

$$a^j = (a_{۱j}, \cdots, a_{mj}) \in \mathbb{Z}^m \quad ; \quad j = ۱, \cdots, N$$

قرار دهید، که نشان دهنده تمام الگوهای برش ممکن است. برای اینکه یک الگوی برش معتبر باشد، باید a^jباشد ، یک جی باید برآورده شود

$$\sum_{i=۱}^{m} l_i \, a_{ij} \leqslant L \tag{۲۱.۱}$$

(وضعیت کوله پشتی). علاوه بر این، ما فقط الگوهای مناسب را در نظر می گیریم:

$$a_{ij} \leqslant b_i \quad ; \quad i = ۱, \cdots, m \quad ; \quad j = ۱, \cdots, n \tag{۲۲.۱}$$

به این دلیل که فضای جستجو از آرامش مستمر در مواردی که تقاضاها کمی کوچک است، کاهش می‌یابد.

$$Z_{G\&G}^{۱D-csp} = \min \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \tag{۲۳.۱}$$

[۱] Column Gilmore and Gomory

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \qquad i = 1, \cdots, m \tag{۲۴.۱}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}^+ \qquad j = 1, \cdots, m \tag{۲۵.۱}$$

تعداد زیادی از متغیرها/ستون‌ها به صراحت برای مسائل عملی قابل دسترسی نیستند. معمولا، الگوهای ضروری در طول یک فرآیند راه حل تولید می‌شوند، از این رو تولید ستون term است. با این حال، تعداد الگوهای مختلف در یک راه حل نمیتواند بیشتر از تعداد طول سهام باشد و معمولا با تعداد قطعات قطعه قابل مقایسه است. مدل آرامش بسیار قوی دارد. حدس و گنجانده شده است MIRUP، [ST95b] فاصله بین مقادیر بهینه $Z^{1D-csp}_{G\&G}$ و مقدار آرام‌سازی بهینه $Z^{1D-csp}_{G\&G}$ که با اجازه دادن به متغیرهای متغیر غیرقطعی به دست می‌آید همیشه کمتر از ۲ است. در واقع، هیچ نمونه‌ای با فاصله بیش از ۷/۶ [RS02] شناخته نشده است. علاوه بر این، نمونه‌هایی با شکاف کوچکتر از ۱ اکثریت قریب به اتفاق را تشکیل می‌دهند. این‌ها نمونه‌هایی از Integer Round-Up Property (IRUP) نامیده می‌شوند. نمونه‌هایی با شکاف بزرگتر یا برابر با ۱ نمونه غیر IRUP نامیده می‌شوند. در مدل تجزیه شده تعداد زیادی از متغیرها وجود دارد. اما بدون تغییر مقدار متغیر می‌توان بدون تغییر راه حل مبادله کرد، یعنی مدل تقارن ندارد. این و استحکام آرامش برای یک رویکرد شمارنده مفید است.

۵.۲.۱ مدل‌های دیگر از پژوهش‌ها[1]

در نظرسنجی [dC02] مدل‌های زیر شرح داده می‌شود:

۱. **فرمولاسیون نمایه با موقعیت**[2]متغیرهایی که با اقلام یک نوع مشخص مطابقت دارند، با موقعیت فیزیکی آن‌ها در داخل اشیای بزرگ اشغال می‌شوند. فرمولاسیون این نوع در برش دو و سه بعدی غیرگیوتین و در برنامه ریزی (''فرمولاسیون زمان بندی شده'') استفاده شده است.

الف. مدل جریان قوس [dC98] پراکندگی موقعیت‌های احتمالی یک شروع و پایان یک مورد را به یک الگوی نشان می‌دهد. قوس‌های جلو نشان‌دهنده آیتم‌ها یا زباله‌ها و قوس‌های عقب نشان‌دهنده طول سهام هستند.

[1] Other Models from the Literature
[2] Position-indexed formulations

بنابراین، متغیر $\{L_۱, \cdots, L_m\}$ $p_۲ - p_۱ \in$ برای $xp_۱, p_۲$ نشان می‌دهد که چند قطعه طول $p_۲ - p_۱$ در $p_۱$ در تمام الگوهای راه حل قرار دارد. تحت حفاظت جریان محدودیت‌ها، وزن جریان باید به حداقل برسد. نویسنده سه معیار را برای کاهش فضای جستجو و تقارن پیشنهاد کرد. این مدل معادل فرمول Gilmore-Gomory است: راه‌حل‌ها می‌توانند به راحتی تبدیل شوند، به عنوان مثال، جریان را می‌توان به مسیرهایی که الگوها را نشان می‌دهند، تجزیه می‌کنند. این مدل در [dC98] به عنوان مورد استفاده قرار گرفت. تعداد متغیرها شبه چند جمله‌ای است اما اکثر آن‌ها لازم نیست و نویسنده نسخهٔ ستون را اعمال می‌کند. علاوه بر این، برای هر موقعیت درگیر، محدودیت‌های حفاظت جریان ضروری هستند به عنوان مثال، محدودیت‌ها نیز تولید شده و مدل در دو رشد کرد جهت‌ها در [AdC03]، مدل Gilmore-Gomory مورد استفاده قرار گرفت (و به اصطلاح cycleflow نامیده می‌شود) اما در واقع شاخه‌ای بر روی متغیرهای فرمول جریان جریان قوس انجام شد، زیرا ممکن است الگوهایی را که به یک $xp_۱$ خاصی، $p_۲$ متغیر.

ب. یک مدل با آنالیزهای متوالی با یک تغییر غیرمجاز از مدل جریان قوس بدست می‌آید که هر محدودیت حفاظت جریان را با یک پیش فرض به ارمغان می‌آورد.

۲. **مدل‌های برش**[۱]هر متغیر تصمیم مربوط به یک عملیات برش بر روی یک قطعه از مواد است. با توجه به قطعهای از اندازه، آن را به قطعات کوچکتر تقسیم می‌کنیم، به عنوان بخش اول و بخش دوم از یک برش مشخص شده است. هر یک برش باید حداقل یک قطعه از اندازه دستور داده شود. عملیات برش را می‌توان بر روی قطعات سهام یا قطعات میانی انجام داد که از عملیات برش قبلی انجام می‌شود.مدل Dyckhoff [Dyc81] معرفی شده است، مدل‌ها دارای تعداد زیادی از متغیرها است اما تقارن زیادی در فضای راه حل دارند. به عقیده ما، راه حل عدد صحیح محاکمه نشده است. تنوع این مدل توسط Stadtler [Sta88] دارای یک ساختار جالب است: مجموعه‌ای از محدودیت‌ها را می‌توان به دو زیر مجموعه تقسیم کرد، اولین ساختار شبکه خالص و دوم از محدودیت‌های محدودیت‌های عمومی تعریف شده (GUB) تشکیل شده است. Stadtler مدل Gilmore-Gomory را یک مدل کامل برش می‌نامد.

[۱] One-cut models

فصل ۲

مساله برش موجودی یک بعدی[۱]

۱.۲ مقدمه

مسئله حداقل کردن ضایعات برش دربسیاری ازصنایع همچون صنایع فولاد و کاغذ کاربرد دارد و امروزه تحقیقات گسترده ای برروی آن درحال انجام است. باتوجه به ابعاد وسیع این مسئله ضایعات تولیدی دراین صنایع بسیارقابل توجه می باشد بطوریکه گاه تغییر کوچکی درالگوی برش می تواند تاثیر بسزایی درفاکتورهای تاثیر گذار تولیدی همچون قیمت تمام شده محصول و میزان مواد اولیه داشته باشد. ازطرفی اخیرا در رویکرد نوینی به موضوع کاهش ضایعات برش درقالب روش‌های حل مختلف تمرکز ویژه ای صورت گرفته است. در این فصل قصد داریم به بررسی یکی از صورت‌های این مسأله یعنی برش یک بعدی با تقاضا بپردازیم. فرض ما در این مسأله این است که یک میله به طول L متر داریم و می‌خواهیم آن را به قطعات کوچکتر با طول‌های $n_۱, \cdots, n_k$ تقسیم کنیم به‌طوریکه تمام قطعات را داشته باشیم. سپس مسأله را به حالتی تعمیم می‌دهیم که تعداد دلخواهی مفتول به طول L متر داریم و می‌خواهیم قطعاتی به طول $n_۱, \cdots, n_p$ با تقاضای $b_۱, ..., b_p$ تولید کنیم. هدف نوشتن یک مدل ریاضی است به طوریکه تا حدامکان ضایعات به حداقل برسد.

[۱] One-Dimensional Cutting Stock

۲.۲ تعریف مسأله

مسأله را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مدل را طوری طراحی کنید که مفتول L متری (که قطعه مادر نامیده می‌شود) را به قطعاتی به طول $l_{۱}, ..., l_p$ با تقاضای $n_{۱}, ..., n_p$ تقسیم کند به طوریکه ضایعات به حداقل برسد:

$n_{۱}$: تعداد قطعه‌های با طول $l_{۱}$،

$n_{۲}$: تعداد قطعه‌های با طول $l_{۲}$،

$n_{۳}$: تعداد قطعه‌های با طول $l_{۳}$،

$\vdots$

n_k : تعداد قطعه‌های با طول l_k.

معادله مورد نظر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$l_{۱}n_{۱} + l_{۲}n_{۲} + \cdots + l_k n_k = L \quad l_p \in \mathbb{N} \cup \{۰\} \quad p = ۱, ۲, \cdots, k. \qquad (۱.۲)$$

این معادله را معادله سیاله [۱] می‌نامیم. در ادامه سعی می‌کنیم که تمام جواب‌ها معادله (۱.۲) را پیدا کنیم اما چون جواب‌های کلی این معادله زیاد است بنابراین برای به دست آوردن آنها یک راه حل پیشنهاد می‌کنیم. روش را با ذکر یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $L = ۱۲$ و چهار قطعه ۳ متری، ۴ متری، ۵ متری و ۷ متری داریم:

$$۳n_{۱} + ۴n_{۲} + ۵n_{۳} + ۷n_{۴} = ۱۲ \qquad n_{۱}, n_{۲}, n_{۳}, n_{۴} \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$$

که در آن

[۱] diophontine

n_1 : تعداد قطعه‌های ۳ متری،

n_2 : تعداد قطعه‌های ۴ متری،

n_3 : تعداد قطعه‌های ۵ متری،

n_4 : تعداد قطعه‌های ۷ متری.

مسأله ۱: معادله سیاله زیر را داریم:

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4 = 12 \qquad n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$7n_4 \leqslant 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4 = 12 \Longrightarrow n_4 \leqslant \frac{12}{7}$$

چون n_4 عدد صحیح است پس

$$n_4 = [\frac{12}{7}] = 1.$$

بنابراین $n_4 \in \{0, 1\}$.

گام ۱: فرض می‌کنیم $n_4 = 0$:

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 12$$

$$5n_3 \leqslant 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 12$$

$$5n_3 \leqslant 12$$

$$n_3 = [\frac{12}{5}] \qquad \text{(چون } n_3 \text{ عدد صحیح است)}$$

$$n_3 = 2$$

پس $n_3 \in \{0, 1, 2\}$.

گام ۲: فرض می‌کنیم $n_۴ = ۱$:

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ + ۷ = ۱۲$$

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۵$$

$$۵n_۳ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳$$

$$۵n_۳ \leqslant ۵$$

$$n_۳ = ۱$$

گام ۳: فرض می‌کنیم $n_۳ = ۰$:

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۱۲$$

$$۴n_۲ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ = ۱۲$$

$$۴n_۲ \leqslant ۱۲$$

چون $n_۲$ عدد صحیح است:

$$n_۲ \leqslant [\frac{۱۲}{۴}] = ۳$$

پس $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$.

گام ۴: فرض می‌کنیم $n_۳ = ۱$:

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵ = ۱۲$$

$$۴n_۲ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ = ۷$$

$$۴n_۲ \leqslant ۷$$

چون $n_۲$ عدد صحیح است:

$$n_۲ \leqslant [\frac{۷}{۴}] = ۱$$

گام ۵: فرض می‌کنیم $n_3 = 2$:

$$3n_1 + 4n_2 + 10 = 12$$

$$4n_2 \leqslant 3n_1 + 4n_2 = 2$$

$$4n_2 \leqslant 2$$

$$n_2 \leqslant [\frac{2}{4}] = 0$$

گام ۶: فرض می‌کنیم $n_2 = 0$:

$$3n_1 = 12 \Longrightarrow n_1 = 4$$

پس $n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

گام ۷: ابتدا $n_4 = 0$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 12$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2\}$ ولی $n_3 = 2$ قابل قبول نیست چون

$$3n_1 + 4n_2 + 10 = 12.$$

بنابراین

$$3n_1 + 4n_2 = 2 \tag{2.2}$$

و به وضوح معادله (۲.۲) جواب ندارد. پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 1\}$ باشد.

اکنون $n_3 = 0$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین داریم

$$3n_1 + 4n_2 = 12.$$

با توجه به گام ۳ می‌دانیم که n_2 حداکثر می‌تواند $\{0, 1, 3\}$ باشد.

$n_۲ = ۳$ را انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ = ۰$$

از گام ۶ نتیجه گرفتیم $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \in n_۱$ ولی $n_۲ = ۱, ۲, ۳, ۴$ قابل قبول نیست پس $n_۱$ حداکثر می‌تواند صفر باشد.

$$n_۱ = ۰, \quad n_۲ = ۳, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۰$$

گام ۸: حال $n_۴ = ۰$ را انتخاب می‌کنیم. پس

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۱۲$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $\{۰, ۱, ۲\} \in n_۳$ ولی $n_۳ = ۲$ قابل قبول نیست چون

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۰ = ۱۲$$

داریم

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۲ \qquad (۳.۲)$$

و معادله (۳.۲) جواب ندارد پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۱\}$ باشد.

$n_۳ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۷$$

و از گام ۳ نتیجه گرفتیم $\{۰, ۱, ۲, ۳\} \in n_۲$ ولی $n_۲ = ۰, ۲, ۳$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند ۱ باشد.

$$۳n_۱ = ۳$$

از گام ۶ نتیجه گرفتیم $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \in n_۱$ ولی $n_۱ = ۰, ۲, ۳, ۴$ قابل قبول نیست پس $n_۱$ حداکثر می‌تواند یک باشد.

$$n_۱ = ۱, \quad n_۲ = ۱, \quad n_۳ = ۱, \quad n_۴ = ۰$$

گام ۹: حال $n_۴ = ۰$ را انتخاب می‌کنیم. پس

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۱۲$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲\}$ ولی $n_۳ = ۲$ قابل قبول نیست چون

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۰ = ۱۲$$

داریم

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۲ \tag{۴.۲}$$

و معادله (۴.۲) جواب ندارد پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۱\}$ باشد.

$n_۳ = ۰$ را انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۱۲$$

و از گام ۳ نتیجه گرفتیم $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۲ = ۲$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۱, ۳\}$ باشد. $n_۲ = ۰$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ = ۱۲$$

از گام ۶ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ ولی $n_۱ = ۰, ۱, ۲, ۳$ قابل قبول نیست پس $n_۱$ حداکثر می‌تواند ۴ باشد.

$$n_۱ = ۴, \quad n_۲ = ۰, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۰$$

گام ۱۰: حال $n_۴ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم. پس

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۵$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ = \{۰, ۱, ۲\}$ ولی $n_۳ = ۰, ۲$ قابل قبول نیست چون

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۰ = ۱۲$$

پس n_3 حداکثر می‌تواند ۱ باشد.

$n_3 = 1$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 = 0$$

و از گام ۳ و ۶ نتیجه گرفتیم n_1 و n_2 حداکثر می‌توانند صفر باشند.

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1, \quad n_4 = 1$$

گام ۱۱: مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \{3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4\} \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4 \leq 12 \\ & n_1, n_2, n_3, n_4 \in N \cup \{0\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

جواب‌های مساله (۵.۲) جواب‌های مسأله بالا است ولی ممکن است معادله سیاله جواب نداشته باشد. به عنوان مثال

$$3n_1 + 4n_2 = 2 \tag{6.2}$$

معادله (۶.۲) جواب ندارد. بنابراین برای این که مساله برش جواب‌های تقریبا بهینه داشته باشد لزومی ندارد که حتما $3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4 = 12$ بلکه کافی است $3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4 \leq 12$ که آن را معادله سیاله می‌نامیم. حال برای حل این مساله تفاوت عدد سمت راست که ۱۲ است و عدد مقدار سمت چپ

$$12 - (3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7n_4)$$

را خطا می‌نامیم.

مسأله ۲: حال چگونه از الگوها استفاد کنیم که ضایعات حداقل شود:

جدول ۱.۲: برش مفتول ضایعات ۱۲ متری است

ضایعات	تعداد قطعات ۳متری	تعداد قطعات ۴متری	تعداد قطعات ۵متری	تعداد قطعات ۷متری	شماره الگوها
۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۲
۲	۱	۰	۰	۱	۳
۲	۰	۰	۲	۰	۴
۰	۱	۱	۱	۰	۵
۰	۰	۳	۰	۰	۶
۱	۱	۲	۰	۰	۷
۲	۲	۱	۰	۰	۸
۰	۴	۰	۰	۰	۹

آ) الگوهای انتخاب می‌کنیم که بدون ضایعات باشد مثلا الگوها ۱، ۵ و ۶:

جدول ۲.۲: برشی مفتول با الگوهای ۱، ۵ و ۶ که ضایعات صفر است

تعداد دفعات	ضایعات	تعداد قطعات ۳ متری	تعداد قطعات ۴ متری	تعداد قطعات ۵متری	تعداد قطعات ۷متری	شماره الگو
x_1	۰	۰	۰	۱	۱	۱
x_2	۰	۱	۱	۱	۰	۲
x_3	۰	۴	۰	۰	۰	۳

x_1 : تعداد دفعاتی که الگوی ۱ اجرا شده است.

x_2 : تعداد دفعاتی که الگوی ۲ اجرا شده است.

x_3 : تعداد دفعاتی که الگوی ۳ اجرا شده است.

سفارشات

۱۰ قطعه ۷ متری، ۴ قطعه ۵ متری، ۷ قطعه ۴ متری، ۸ قطعه ۳ متری لازم داریم. تعداد هر کدام از قطعات ذکر شده را بیابید.

محدودیت‌ها[۱]

تعداد قطعات ۷ متری: $x_1 \geqslant 10$

تعداد قطعات ۵ متری: $x_1 + x_2 \geqslant 4$

تعداد قطعات ۴ متری: $x_2 \geqslant 7$

تعداد قطعات ۳ متری: $x_2 + 4x_3 \geqslant 8$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$(x_1 - 10)$ تعداد قطعات ۷ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۷ متر است پس کل ضایعات ۷ متری اضافه شده: $7(x_1 - 10)$ متری

$(x_1 + x_2 - 6)$ تعداد قطعات ۵ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۵ متر است پس کل ضایعات ۵ متری اضافه شده: $5(x_1 + x_2 - 6)$ متری

$(x_2 - 7)$ تعداد قطعات ۴ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۴ متر است پس کل ضایعات ۴ متری اضافه شده: $4(x_2 - 7)$ متری

$(x_2 + 4x_3 - 8)$ تعداد قطعات ۳ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۳ متر است پس کل ضایعات ۳ متری اضافه شده: $3(x_2 + 4x_3 - 8)$ متری

کل ضایعات اضافه تولید شده برحسب متر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T(x_1, x_2, x_3) = 7(x_1 - 10) + 5(x_1 + x_2 - 4) + 4(x_2 - 7) + 3(x_2 + 4x_3 - 8).$$

[۱] constrant

بنابراین مساله زیر را داریم:

$$\min \quad T(x_۱, x_۲, x_۳) = ۱۲x_۱ + ۱۲x_۲ + ۱۲x_۳ - ۱۴۲$$

$$s.t$$

$$x_۱ - ۱۰ \geqslant ۰$$

$$x_۱ + x_۲ - ۴ \geqslant ۰$$

$$x_۲ - ۷ \geqslant ۰$$

$$x_۲ + ۴x_۳ - ۸ \geqslant ۰$$

$$[x \ , \ fval] = linprog(f \ , \ A, \ b \ , \ [] \ , \ [] \ , \ lb)$$

$$sol :$$

$$f = [۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲]$$

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۴ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ & -۷ & -۸ \end{bmatrix}, \quad lb = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^T$$

optimization terminated

$$x_۱ = ۱۰/۰۰۰۰$$

$$x_۲ = ۷/۰۰۰۰$$

$$x_۳ = ۰/۲۵۰۰$$

$fval =$

۲۰۷٫۰۰۰۰

بنابراین مقدار بهینه مسأله $۱۴۲ - ۲۰۷ = ۵۹$ می‌باشد.

ب) برای برش مفتول ۱۲ متری، الگوهایی را انتخاب می‌کنیم که بدون ضایعات باشد. مثلا الگوهای ۵، ۱ ،۹ ،۶.

جدول ۳.۲: برشی مفتول با الگوهای ۵، ۱، ۹، ۶ که ضایعات صفر است

تعداد دفعات	ضایعات	تعداد قطعات ۳متری	تعداد قطعات ۴ متری	تعداد قطعات ۵ متری	تعداد قطعات ۷ متری	شماره الگو
x_1	۰	۰	۰	۱	۱	۱
x_2	۰	۱	۱	۱	۰	۲
x_3	۰	۴	۰	۰	۰	۳
x_4	۰	۰	۳	۰	۰	۴

x_1 : تعداد دفعاتی که الگوی ۱ اجرا شده است.

x_2 : تعداد دفعاتی که الگوی ۲ اجرا شده است.

x_3 : تعداد دفعاتی که الگوی ۳ اجرا شده است.

x_4 : تعداد دفعاتی که الگوی ۴ اجرا شده است.

سفارشات

۱۰ عدد ۷ متری، ۴ عدد ۵ متری، ۷ عدد ۴ متری و ۸ عدد ۳ متری لازم داریم. تعداد مناسب هر کدام از قطعات ذکر شده را بیابید.

محدودیت‌ها[1]

[1] constrant

تعداد قطعات ۷ متری: $x_1 \geqslant 10$

تعداد قطعات ۵ متری: $x_1 + x_2 \geqslant 4$

تعداد قطعات ۴ متری: $x_2 + 3x_4 \geqslant 7$

تعداد قطعات ۳ متری: $x_2 + 4x_3 \geqslant 8$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$(x_1 - 10)$ تعداد قطعات ۷ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۷ متر است پس کل ضایعات ۷ متری اضافه شده: $7(x_1 - 10)$ متری

$(x_1 + x_2 - 4)$ تعداد قطعات ۵ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۵ متر است پس کل ضایعات ۵ متری اضافه شده: $5(x_1 + x_2 - 4)$ متری

$(x_2 + 3x_4 - 7)$ تعداد قطعات ۴ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۴ متر است پس کل ضایعات ۴ متری اضافه شده: $4(x_2 + 3x_4 - 7)$ متری

$(x_2 + 4x_3 - 8)$ تعداد قطعات ۳ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۳ متر است پس کل ضایعات ۳ متری اضافه شده: $3(x_2 + 4x_3 - 8)$ متری

کل ضایعات اضافه شده برحسب متر به صورت زیر می‌باشد:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 7(x_1 - 10) + 5(x_1 + x_2 - 4) + 4(x_2 + 3x_4 - 7) + 3(x_2 + 4x_3 - 8).$$

بنابراین مسأله برنامه ریزی زیر را داریم:

$$\min \quad T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 12x_4 - 142$$

$$s.t$$

$$x_1 - 10 \geqslant 0$$

$$x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0$$

$$x_۲ + ۳x_۴ - ۷ \geqslant ۰$$

$$x_۲ + ۴x_۳ - ۸ \geqslant ۰$$

$$[x\ ,\ fval] = linprog(f\ ,\ A,\ b\ ,\ []\ ,\ []\ ,\ lb)$$

$sol:$

$$f = [۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲]$$

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & -۱ & -۴ & ۰ \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ & -۷ & -۸ \end{bmatrix},\ lb = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^T$$

optimization terminated

$$x_۱ = ۱۰/۰۰۰۰$$

$$x_۲ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۳ = ۲/۰۰۰۰$$

$$x_۴ = ۲/۳۳۳۳$$

$fval =$

۱۷۲/۰۰۰۰

بنابراین مقدار بهینه برابر است با $۱۴۲ - ۱۷۲ = ۳۰$.

ج) برای برش مفتول ۱۲ متری، الگوهایی را انتخاب می‌کنیم که ضایعات حداکثر ۱ باشد. مانند الگوهای ۱،۲،۵،۶،۷،۹ .

$x_۱$: تعداد دفعاتی که الگوی ۱ اجرا شده است.

جدول ۴.۲: برشی مفتول با الگوهای ۱،۲،۵،۶،۷،۹ که به ضایعات حد اکثر ۱ باشد

تعداد دفعات	ضایعات	تعداد قطعات ۳متری	تعداد قطعات ۴متری	تعداد قطعات ۵متری	تعداد قطعات ۷متری	شماره الگو
x_1	۰	۰	۰	۱	۱	۱
x_2	۱	۰	۱	۰	۱	۲
x_3	۰	۱	۱	۱	۰	۳
x_4	۰	۰	۳	۰	۰	۴
x_5	۱	۱	۲	۰	۰	۵
x_6	۰	۴	۰	۰	۰	۶

x_2 : تعداد دفعاتی که الگوی ۲ اجرا شده است.

x_3 : تعداد دفعاتی که الگوی ۳ اجرا شده است.

x_4 : تعداد دفعاتی که الگوی ۴ اجرا شده است.

x_5 : تعداد دفعاتی که الگوی ۵ اجرا شده است.

x_6 : تعداد دفعاتی که الگوی ۶ اجرا شده است.

سفارشات

۱۰ قطعه ۷ متری، ۴ قطعه ۵ متری، ۷ قطعه ۴ متری و ۸ قطعه ۳ متری لازم داریم. تعداد هرکدام از قطعات ذکر شده را بیابید.

محدودیت‌ها

تعداد قطعات ۷ متری: $x_1 + x_2 \geqslant 10$

تعداد قطعات ۵ متری: $x_1 + x_2 \geqslant 4$

تعداد قطعات ۴ متری: $x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \geqslant 7$

تعداد قطعات ۳ متری: $x_3 + x_5 + 4x_6 \geqslant 8$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$(x_1 + x_2 - 10)$ تعداد قطعات ۷ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۷ متر است پس کل ضایعات ۷ متری اضافه شده: $7(x_1 + x_2 - 10)$ متری

$(x_1 + x_3 - 4)$ تعداد قطعات ۵ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۵ متر است پس کل ضایعات ۵ متری اضافه شده: $5(x_1 + x_3 - 4)$ متری

$(x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 - 7)$ تعداد قطعات ۴ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۴ متر است پس کل ضایعات ۴ متری اضافه شده: $4(x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 - 7)$ متری

$(x_3 + x_5 + 4x_6 - 8)$ تعداد قطعات ۳ متری اضافه تولید شده است. چون اندازه طول قطعه ۳ متر است پس کل ضایعات ۳ متری اضافه شده: $3(x_3 + x_5 + 4x_6 - 8)$ متری

کل ضایعات اضافه شده برحسب متر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 7(x_1 + x_2 - 10) + x_2 + 5(x_1 + x_3 - 4)$$
$$+ 4(x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 - 7) + 3(x_3 + x_5 + 4x_6 - 8) + x_5$$

$$\min \quad T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 + 12x_4 + 12x_5 + 12x_6 - 142$$

$s.t$

$$x_1 + x_2 - 10 \geqslant 0$$

$$x_1 + x_3 - 4 \geqslant 0$$

$$x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 - 7 \geqslant 0$$

$$x_3 + x_5 + 4x_6 - 8 \geqslant 0$$

$sol:$

$$f = [۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲]$$

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۱ & -۳ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & -۴ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ & -۷ & -۸ \end{bmatrix},$$

$$lb = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^T$$

optimization terminated

$$x_۱ = ۴/۰۰۰۰$$

$$x_۲ = ۶/۰۰۰۰$$

$$x_۳ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۴ = ۰/۳۳۳۳$$

$$x_۵ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۶ = ۲/۰۰۰۰$$

$$fval = ۱۴۸/۰۰۰۰$$

بنابر این مقدار بهینه برابر است با $۱۴۸ - ۱۴۲ = ۶$.

۳.۲ تعمیم مسأله قبل به دو قطعه

در این مسأله علاوه بر مفتول ۱۲ متری، یک مفتول به طول ۱۵ متر نیز به این مسأله اضافه شده است. نشان می دهیم با دو مفتول مادر با طول متفاوت جواب‌های بهتری نسبت به یك مفتول ۱۲ متری بدست می‌آوریم.

مسأله ۱: به همان روش مسأله ۱ برای مفتول ۱۲ متری جواب‌های (۷.۲) را بدست می آوریم. پس

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ + ۷n_۴ = ۱۵ \qquad n_۱, n_۲, n_۳, n_۴ \in \mathbb{N} \cup \{۰\} \qquad (۷.۲)$$

$$۷n_۴ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ + ۷n_۴ = ۱۵$$

$$n_۴ = [\frac{۱۵}{۷}]$$

چون $n_۴$ عدد صحیح است.

$$n_۴ = [\frac{۱۵}{۷}] = ۲$$

پس $n_۴ \in \{۰, ۱, ۲\}$.

گام ۱ فرض می‌کنیم $n_۴ = ۰$

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۱۵$$

$$۵n_۳ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۱۵$$

$$۵n_۳ \leqslant ۱۵$$

$$n_۳ = [\frac{۱۵}{۵}]$$

حداکثر $n_۳$ عبارت است از $[\frac{۱۵}{۵}]$ لذا

$$n_۳ = ۳$$

پس $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$

گام ۲ فرض می‌کنیم $n_4 = 1$

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 7 = 15$$

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 8$$

$$5n_3 \leqslant 3n_1 + 4n_2 + 5n_3$$

$$5n_3 \leqslant 8$$

$$n_3 \leqslant [\frac{8}{5}]$$

حداکثر n_3 عبارت است از $[\frac{8}{5}]$ لذا

$$n_3 = 1$$

گام ۳ فرض می‌کنیم $n_4 = 2$

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + 14 = 15$$

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 1$$

$$5n_3 \leqslant 3n_1 + 4n_2 + 5n_3$$

$$5n_3 \leqslant 1$$

$$n_3 \leqslant [\frac{1}{5}]$$

$$n_3 = 0$$

گام ۴ فرض می‌کنیم $n_3 = 0$

$$3n_1 + 4n_2 = 15$$

$$4n_2 \leqslant 3n_1 + 4n_2 = 15$$

$$4n_2 \leqslant 15$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۱۵}{۴}] = ۳$$

پس $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$

گام ۵ فرض می‌کنیم $n_۳ = ۱$

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵ = ۱۵$$

$$۴n_۲ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ = ۱۰$$

$$۴n_۲ \leqslant ۱۰$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۱۰}{۴}] = ۲$$

گام ۶ فرض می‌کنیم $n_۳ = ۲$

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۰ = ۱۵$$

$$۴n_۲ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ = ۵$$

$$۴n_۲ \leqslant ۵$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۵}{۴}] = ۱$$

گام ۷ فرض می‌کنیم $n_۳ = ۳$

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۵ = ۱۵$$

$$۴n_۲ \leqslant ۳n_۱ + ۴n_۲ = ۰$$

$$۴n_۲ \leqslant ۰$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۰}{۴}] = ۰$$

گام ۸ فرض می‌کنیم $n_۲ = ۰$

$$۳n_۱ = ۱۵$$

$$۳n_۱ = ۱۵$$

$$n_۱ = [۵]$$

پس $n_۱ = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

گام ۹ ابتدا $n_۴ = ۰$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۱۵$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۳ = ۲$ قابل قبول نیست چون

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۰ = ۱۵$$

داریم

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۵ \tag{۸.۲}$$

و معادله (۸.۲) جواب ندارد پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۱, ۳\}$ باشد.

$n_۳ = ۰$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۱۵$$

و از گام ۴ نتیجه گرفتیم $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۳ = \{۱, ۲\}$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۳\}$ باشد.

$n_۲ = ۰$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ = ۱۵$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم $n_۱ = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ولی $n_۱ = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ قابل قبول نیست پس

$n_۲$ حداکثر می‌تواند ۵ باشد.

$$n_۱ = ۵, \quad n_۲ = ۰, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۰$$

گام ۱۰ حال $n_۴ = ۰$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۱۵$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۳ = ۲$ قابل قبول نیست چون

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۱۰ = ۱۵$$

داریم

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۵ \tag{۹.۲}$$

و معادله (۹.۲) جواب ندارد پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۱, ۳\}$ باشد.

$n_۳ = ۰$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۱۵$$

و از گام ۴ نتیجه گرفتیم $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۳ = \{۱, ۲\}$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۳\}$ باشد.

$n_۲ = ۳$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ = ۳$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ولی $n_۱ = ۰, ۲, ۳, ۴, ۵$ قابل قبول نیست پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند ۱ باشد.

$$n_۱ = ۱, \quad n_۲ = ۳, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۰$$

گام ۱۱ حال $n_4 = 0$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 15$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ولی $n_3 = 2$ قابل قبول نیست چون

$$3n_1 + 4n_2 + 10 = 15$$

داریم

$$3n_1 + 4n_2 = 5 \tag{10.2}$$

و معادله (۱۰.۲) جواب ندارد پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 1, 3\}$ باشد.

$n_3 = 1$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 = 10$$

و از گام ۴ نتیجه گرفتیم $n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ولی $n_3 = \{0, 2, 3\}$ قابل قبول نیست. پس n_2 حداکثر می‌تواند ۱ باشد.

$n_2 = 1$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 = 6$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم $n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ولی $n_1 = 0, 1, 3, 4, 5$ قابل قبول نیست پس n_2 حداکثر می‌تواند ۲ باشد.

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 1, \quad n_4 = 0$$

گام ۱۲ حال $n_4 = 0$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 15$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ولی $n_3 = 2$ قابل قبول نیست چون

$$3n_1 + 4n_2 + 10 = 15$$

داریم

$$3n_1 + 4n_2 = 5 \tag{11.2}$$

و معادله (۱۱.۲) جواب ندارد پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 1, 3\}$ باشد.

$n_3 = 3$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 = 0$$

و از گام ۴ نتیجه گرفتیم $n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ولی $n_3 = \{1, 2, 3\}$ قابل قبول نیست. پس n_2 حداکثر می‌تواند ۰ باشد.

$n_2 = 0$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 = 0$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم $n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ولی $n_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ قابل قبول نیست پس n_2 حداکثر می‌تواند ۰ باشد.

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 0$$

گام ۱۳ حال $n_4 = 1$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 8$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ ولی $n_3 = 2, 3$ قابل قبول نیست پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 1\}$ باشد.

$n_3 = 0$ انتخاب می‌کنیم.

$$3n_1 + 4n_2 = 8$$

و از گام ۴ نتیجه گرفتیم $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۲ = \{۰, ۱, ۳, ۴\}$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند ۲ باشد.

$$۳n_۱ = ۰$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ولی $n_۱ = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ قابل قبول نیست پس $n_۱$ حداکثر می‌تواند ۰ باشد.

$$n_۱ = ۰, \quad n_۲ = ۲, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۱$$

گام ۱۴ حال $n_۴ = ۱$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ + ۵n_۳ = ۸$$

و از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۳ = ۲, ۳$ قابل قبول نیست پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۱\}$ باشد.

$n_۳ = ۱$ انتخاب می‌کنیم.

$$۳n_۱ + ۴n_۲ = ۳$$

و از گام ۴ نتیجه گرفتیم $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ ولی $n_۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند ۰ باشد.

$$۳n_۱ = ۳$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ولی $n_۱ = ۰, ۲, ۳, ۴, ۵$ قابل قبول نیست پس $n_۱$ حداکثر می‌تواند ۱ باشد.

$$n_۱ = ۱, \quad n_۲ = ۰, \quad n_۳ = ۱, \quad n_۴ = ۱$$

مسأله ۲: حال چگونه از الگوها استفاد کنیم که ضایعات حداقل می‌شود. الگوهای به طول ۱۵ متری انتخاب می‌کنیم که بدون ضایعات باشد مثلا ۶،۳،۲، ۱۴،۱۲،۱۰ برشی مفتول‌ها به طول ۱۲ متری و ۱۵ متری الگوهای

جدول ۵.۲: برشی مفتول ۱۵ متری تمام جواب‌های با ضایعات حداکثر ۲ است

ضایعات	تعداد قطعات ۳متری	تعداد قطعات ۴متری	تعداد قطعات ۵متری	تعداد قطعات ۷متری	شماره الگو
۱	۰	۰	۰	۲	۱
۰	۱	۰	۱	۱	۲
۰	۰	۲	۰	۱	۳
۱	۱	۱	۰	۱	۴
۲	۲	۰	۰	۱	۵
۰	۰	۰	۳	۰	۶
۱	۰	۲	۲	۰	۷
۲	۱	۰	۲	۰	۸
۲	۰	۲	۱	۰	۹
۰	۲	۱	۱	۰	۱۰
۱	۳	۰	۱	۰	۱۱
۰	۱	۳	۰	۰	۱۲
۲	۲	۲	۰	۰	۱۳
۰	۵	۰	۰	۰	۱۴

انتخاب می‌کنیم که ضایعات صفر است:

x_1 : چند بار الگو ۱ اجرا شده است.

x_2 : چند بار الگو ۲ اجرا شده است.

x_3 : چند بار الگو ۳ اجرا شده است.

x_4 : چند بار الگو ۴ اجرا شده است.

جدول ۶.۲: برشی مفتول با الگوهای (۲،۳،۶، ۱۰،۱۲،۱۴) که ضایعات صفر است

تعداد دفعات	ضایعات	تعداد قطعات ۳متری	تعداد قطعات ۴متری	تعداد قطعات ۵متری	تعداد قطعات ۷متری	شماره الگو
y_1	۰	۱	۰	۱	۱	۱
y_2	۰	۰	۲	۰	۱	۲
y_3	۰	۰	۰	۳	۰	۳
y_4	۰	۲	۱	۱	۰	۴
y_5	۰	۱	۳	۰	۰	۵
y_6	۰	۵	۰	۰	۰	۶

جدول ۷.۲: مفتول‌ها به طول ۱۲ متری و ۱۵ متری با الگوهای که ضایعات صفر است

تعداد دفعات	ضایعات	تعداد قطعات ۳متری	تعداد قطعات ۴متری	تعداد قطعات ۵متری	تعداد قطعات ۷متری	شماره الگو
x_1	۰	۰	۰	۱	۱	۱
x_2	۰	۱	۱	۱	۰	۲
x_3	۰	۴	۰	۰	۰	۳
x_4	۰	۰	۳	۰	۰	۴
y_1	۰	۱	۰	۱	۱	۵
y_2	۰	۰	۲	۰	۱	۶
y_3	۰	۰	۰	۳	۰	۷
y_4	۰	۲	۱	۱	۰	۸
y_5	۰	۱	۳	۰	۰	۹
y_6	۰	۵	۰	۰	۰	۱۰

y_1 : چند بار الگو ۵ اجرا شده است.

y_2 : چند بار الگو ۶ اجرا شده است.

y_3 : چند بار الگو ۷ اجرا شده است.

y_4 : چند بار الگو ۸ اجرا شده است.

y_5 : چند بار الگو ۹ اجرا شده است.

y_6 : چند بار الگو ۱۰ اجرا شده است.

سفارشات

۱۰ عدد ۷ متری لازم داریم، ۴ عدد ۵ متری لازم داریم، ۷ عدد ۴ متری لازم داریم، ۸ عدد ۳ متری لازم داریم. چند عدد ۷ متری می‌شود، چند عدد ۵ متری می‌شود، چند عدد ۴ متری می‌شود و چند عدد ۳ متری می‌شود .

محدودیت‌ها[1]

تعداد قطعات ۷ متری: $x_1 + y_1 + y_2 \geqslant 10$

تعداد قطعات ۵ متری: $x_1 + x_2 + y_1 + 3y_3 + y_4 \geqslant 4$

تعداد قطعات ۴ متری: $x_2 + 3x_4 + 2y_2 + y_4 + 3y_5 \geqslant 7$

تعداد قطعات ۳ متری: $x_2 + 4x_3 + y_1 + 2y_4 + y_5 + 5y_6 \geqslant 8$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$(x_1 + y_1 + y_2 - 10)$ تعداد قطعات ۷ متری اضافه تولید شده چون اندازه طول قطعه ۷ متر است پس کل ضایعات ۷ متری اضافه شده: $7(x_1 + y_1 + y_2 - 10)$ متری

$(x_1 + x_2 + y_1 + 3y_3 + y_4 - 4)$ تعداد قطعات ۵ متری اضافه تولید شده چون اندازه طول قطعه ۵ متر است پس کل ضایعات ۵ متری اضافه شده: $5(x_1 + x_2 + y_1 + 3y_3 + y_4 - 4)$ متری

$(x_2 + 3x_4 + 2y_2 + y_4 + 3y_5 - 7)$ تعداد قطعات ۴ متری اضافه تولید شده چون اندازه طول قطعه

[1] constrant

۴ متر است پس کل ضایعات ۴ متری اضافه شده: $۴(x_۲ + ۳x_۴ + ۲y_۲ + y_۴ + ۳y_۵ - ۷)$ متری $(x_۲ + ۴x_۳ + y_۱ + ۲y_۴ + y_۵ + ۵y_۶ - ۸)$ تعداد قطعات ۳ متری اضافه تولید شده چون اندازه طول قطعه ۳ متر است پس کل ضایعات ۳ متری اضافه شده: $۳(x_۲ + ۴x_۳ + y_۱ + ۲y_۴ + y_۵ + ۵y_۶ - ۸)$ متری

کل ضایعات اضافه شده برحسب متر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵, y_۶) = ۷(x_۱ + y_۱ + y_۲ - ۱۰) + ۵(x_۱ + x_۲ + y_۱ + ۳y_۳ + y_۴ - ۴)$$
$$+ ۴(x_۲ + ۳x_۴ + ۲y_۲ + y_۴ + ۳y_۵ - ۷) + ۳(x_۲ + ۴x_۳ + y_۱ + ۲y_۴ + y_۵ + ۵y_۶ - ۸)$$

بنابراین مسأله زیر را داریم:

$$\min \quad T(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵, y_۶) = ۱۲x_۱ + ۱۲x_۲ + ۱۲x_۳ + ۱۲x_۴$$
$$+ ۱۵y_۱ + ۱۵y_۲ + ۱۵y_۳ + ۱۵y_۴ + ۱۵y_۵ + ۱۵y_۶ - ۱۴۲$$
$$x_۱ + y_۱ + y_۲ - ۱۰ \geqslant ۰$$
$$x_۱ + x_۲ + y_۱ + ۳y_۳ + y_۴ - ۴ \geqslant ۰$$
$$x_۲ + ۳x_۴ + ۲y_۲ + y_۴ + ۳y_۵ - ۷ \geqslant ۰$$
$$x_۲ + ۴x_۳ + y_۱ + ۲y_۴ + y_۵ + ۵y_۶ - ۸ \geqslant ۰$$

$$[x\ ,\ fval] = linprog(f\ ,\ A,\ b\ ,\ []\ ,\ []\ ,\ lb)$$

$$sol:$$

$$f = [۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۲ \quad ۱۵ \quad ۱۵ \quad ۱۵ \quad ۱۵ \quad ۱۵ \quad ۱۵]$$

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & -۳ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & -۳ & ۰ & -۲ & ۰ & -۱ & -۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۴ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۲ & -۱ & -۵ \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ & -۷ & -۸ \end{bmatrix},\ lb = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

optimization terminated

$$x_۱ = ۳/۷۲۴۲$$

$$x_۲ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۳ = ۰/۶۵۶۹$$

$$x_۴ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۵ = ۲/۷۷۵۸$$

$$x_۶ = ۳/۵۰۰۰$$

$$x_۷ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۸ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_۹ = ۰/۰۰۰۰$$

$$x_{۱۰} = ۰/۵۱۹۳$$

$$fval = ۱۵۴/۵۰۰۰$$

بنابراین مقدار بهینه مسأله ۱۴۲ $-$ ۱۵۴/۵ $=$ ۱۲/۵ می‌باشد.

۴.۲ تعمیم معادله سیاله

معادله برای دو قطعه مادر ۱۲ متری و ۱۵ متری به صورت زیر است:

$$۳n_۱k_۱ + ۳m_۱k_۲ + ۴n_۲k_۳ + ۴m_۲k_۴ + ۵n_۳k_۵ + ۵m_۳k_۶ + ۷n_۴k_۷$$

$$+ ۷m_۴k_۸ = ۱۲l_۱ + ۱۵l_۲$$

$$k_۱ + k_۲ = ۱$$

$$k_۳ + k_۴ = ۱$$

$$k_۵ + k_۶ = ۱$$

$$k_۷ + k_۸ = ۱$$

$$l_۱ + l_۲ = ۱$$

$$l_۱, l_۲, k_i \in \{۰, ۱\} \qquad i = ۱, \cdots ۸$$

$$n_i, m_i \in \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$$

مساله فوق یک مساله غیر خطی عدد صحیح است که می‌توان با روش‌هایی از قبیل شاخه کران یا روش‌های دیگر آن را حل نمود.

فصل ۳

مساله برش موجودی دو بعدی و سه بعدی

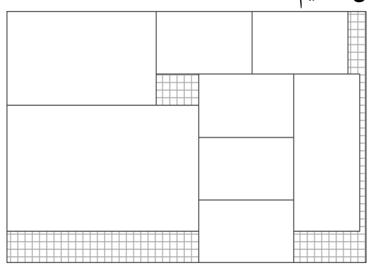
۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا مسأله برش دو بعدی با تقاضا را مورد بررسی قرار می دهیم. در این مسأله باید با برش ورق های مستطیل شکل بزرگ، مستطیل های کوچکتر مورد نیاز به نحوی تولید شوند که ضمن تامین تقاضاهای آنها ضایعات با تعداد ورق های مصرفی حداقل گردد. حل این مسئله در هر صنعتی که برش صفحات در آن مورد نیاز می باشد از نظر کاهش ضایعات حائز اهمیت خواهد بود . در اکثر مقالات ، تقاضای قطعات در نظر گرفته نشده و تنها به مسأله حداقل کردن ضایعات در یك ورق پرداخته شده است. به عنوان مثال فرض کنید یک مستطیل $N \times M$ متری داریم و می‌خواهیم آن را به صورت مستطیل‌های کوچک $A_۱, A_۲, A_۳, \cdots, A_k$ با طول و عرض به ترتیب m_i و n_i تقسیم کنیم به طوریکه اگر این الگوها در مستطیل مادر چیده شوند، ضایعات کل کمترین مقدار باشند.

$$A_i = n_i \times m_i \qquad i = ۱, \cdots, k$$

۲.۳ مسأله

در برش دو بعدی، الگوی مادر به صورت مستطیل بزرگ است که می‌خواهیم آن را به مستطیل‌های کوچکتر تقسیم کنیم. به عنوان مثال فرض کنیم مستطیل مادر با ابعاد ۳۰۰ × ۴۰۰ سانتی‌متر است و سفارشات به صورت جدول زیر داده شده‌اند. طبق جدول زیر چهار سفارش داریم:



تعداد سفارش	عرض × طول
۱	۳۰×۲۰
۲	۴۵×۳۰
۳	۵۵×۴۵
۴	۶۰×۵۰

مسأله ۱) زمانی که فقط بخواهیم از عرض ورق فلزی مادر و عرض سفارشات بصورت تقریبا بهینه استفاده می‌کنیم:

معادله زیر همان معادله سیاله می‌باشد. اکنون به حل این معادله می‌پردازیم و تمام جواب‌های آن را مشخص می‌کنیم.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 50n_4 = 300$$

$$45n_4 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 50n_4 = 300$$

$$50n_4 \leqslant 300$$

$$n_4 \leqslant [\frac{300}{50}] = 6$$

گام ۱: فرض می‌کنیم $n_4 = 0$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 300$$

$$45n_3 \leqslant 3n_1 + 4n_2 + 45n_3 = 300$$

$$45n_3 \leqslant 300$$

$$n_3 = [\frac{300}{45}] = 6$$

پس $n_3 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

گام ۲: فرض می‌کنیم $n_4 = 1$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 50 = 300$$

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 250$$

$$45n_3 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 250$$

$$45n_3 \leqslant 250$$

$$n_3 = [\frac{250}{45}] = 5$$

گام ۳: فرض می‌کنیم $n_4 = 2$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 100 = 300$$

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 200$$

$$45n_3 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 200$$

$$45n_3 \leqslant 200$$

$$n_3 = [\frac{200}{45}] = 4$$

گام ۴: فرض می‌کنیم $n_4 = 3$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 150 = 300$$

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 150$$

$$45n_3 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 50n_3 = 150$$

$$45n_3 \leqslant 150$$

$$n_3 = [\frac{150}{45}] = 3$$

گام ۵: فرض می‌کنیم $n_4 = 4$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 200 = 300$$

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 100$$

$$45n_3 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 100$$

$$45n_3 \leqslant 100$$

$$n_3 = [\frac{100}{45}] = 2$$

گام ۶: فرض می‌کنیم $n_4 = 5$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 250 = 300$$

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 50$$

$$45n_3 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 50n_3 = 50$$

$$45n_3 \leqslant 50$$

$$n_3 = [\frac{50}{50}] = 1$$

گام ۷: فرض می‌کنیم $n_4 = 6$.

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 + 300 = 300$$

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 0$$

$$45n_3 \leqslant 20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 0$$

$$۴۵n_۳ \leqslant ۰$$

$$n_۳ = [\frac{۰}{۴۵}] = ۰$$

گام ۸: فرض می‌کنیم $n_۳ = ۰$.

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۳۰۰$$

$$۳۰n_۲ \leqslant ۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۳۰۰$$

$$۳۰n_۲ \leqslant ۳۰۰$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۳۰۰}{۳۰}] = ۱۰$$

پس $n_۲ \in \{۰, ۱, \cdots, ۱۰\}$.

گام ۹: فرض می‌کنیم $n_۳ = ۱$.

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵ = ۳۰۰$$

$$۳۰n_۲ \leqslant ۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۲۵۵$$

$$۳۰n_۲ \leqslant ۲۵۵$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۲۵۵}{۳۰}] = ۸$$

گام ۱۰: فرض می‌کنیم $n_۳ = ۲$.

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۹۰ = ۳۰۰$$

$$۳۰n_۲ \leqslant ۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۲۱۰$$

$$۳۰n_۲ \leqslant ۲۱۰$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۲۱۰}{۳۰}] = ۷$$

گام ۱۱: فرض می‌کنیم $n_3 = 3$.

$$20n_1 + 30n_2 + 135 = 300$$

$$30n_2 \leqslant 20n_1 + 30n_2 = 165$$

$$30n_2 \leqslant 165$$

$$n_2 \leqslant [\frac{165}{30}] = 5$$

گام ۱۲: فرض می‌کنیم $n_3 = 4$.

$$20n_1 + 30n_2 + 180 = 300$$

$$30n_2 \leqslant 20n_1 + 30n_2 = 120$$

$$30n_2 \leqslant 120$$

$$n_2 \leqslant [\frac{120}{30}] = 4$$

گام ۱۳: فرض می‌کنیم $n_3 = 5$.

$$20n_1 + 30n_2 + 225 = 300$$

$$30n_2 \leqslant 20n_1 + 30n_2 = 75$$

$$30n_2 \leqslant 75$$

$$n_2 \leqslant [\frac{75}{30}] = 2$$

گام ۱۴: فرض می‌کنیم $n_3 = 6$.

$$20n_1 + 30n_2 + 270 = 300$$

$$30n_2 \leqslant 20n_1 + 30n_2 = 30$$

$$30n_2 \leqslant 30$$

$$n_۲ \leqslant [\frac{۳۰}{۳۰}] = ۱$$

گام ۱۵: فرض مي‌کنيم $n_۲ = ۰$.

$$۲۰n_۱ = ۳۰۰$$
$$n_۲ = [\frac{۳۰۰}{۲۰}] = ۱۵$$

پس $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۵\}$.

گام ۱۶: ابتدا $n_۴ = ۰$ انتخاب می‌کنیم پس

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵n_۳ = ۳۰۰$$

ازگام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۶\}$ ولی $n_۳ = ۱, ۳, ۵$ قابل قبول نیست. اگر $n_۳ = ۱$

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵n_۳ = ۳۰۰$$

داریم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۲۵۵ \qquad (۱.۳)$$

اگر $n_۳ = ۳$

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۱۳۵ = ۳۰۰$$

داریم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۱۶۵ \qquad (۲.۳)$$

اگر $n_۳ = ۵$

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۲۲۵ = ۳۰۰$$

داریم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۷۵ \tag{۳.۳}$$

و معادله‌های (۴.۳)، (۵.۳) و (۶.۳) جواب ندارد پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۲, ۴, ۶\}$ باشد.

$n_۳ = ۰$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۳۰۰$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$ ولی $n_۲ = ۳, ۹$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ باشد.

$n_۲ = ۰$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ = ۳۰۰$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۵\}$ ولی $n_۱ = ۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۴$ قابل قبول نیست

پس $n_۱ = ۱۵$

$$n_۱ = ۱۵, \quad n_۲ = ۰, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۰$$

ابتدا $n_۴ = ۰$ انتخاب می‌کنیم پس

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵n_۳ = ۳۰۰$$

از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۶\}$ ولی $n_۳ = ۱, ۳, ۵$ قابل قبول نیست. اگر $n_۳ = ۱$

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵n_۳ = ۳۰۰$$

داریم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۲۵۵ \tag{۴.۳}$$

اگر $n_۳ = ۳$

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۱۳۵ = ۳۰۰$$

داریم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۱۶۵ \tag{۵.۳}$$

اگر $n_۳ = ۵$

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۲۲۵ = ۳۰۰$$

داریم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۷۵ \tag{۶.۳}$$

و معادله‌های (۴.۳)، (۵.۳) و (۶.۳) جواب ندارد پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۲, ۴, ۶\}$ باشد.

$n_۳ = ۰$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۳۰۰$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$ ولی $n_۲ = ۳, ۹$ قابل قبول نیست. پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ باشد.

$n_۲ = ۰$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ = ۳۰۰$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۵\}$ ولی $n_۲ = ۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۴$ قابل قبول نیست پس $n_۲ = ۱۵$

$$n_۱ = ۱۵, \quad n_۲ = ۰, \quad n_۳ = ۰, \quad n_۴ = ۰$$

حال $n_۴ = ۰$ انتخاب می‌کنیم پس

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵n_۳ = ۳۰۰$$

از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۶\}$ ولی $n_۳ = ۱, ۳, ۵$ قابل قبول نیست. پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۲, ۴, ۶\}$ باشد.

$n_3 = 2$ انتخاب می‌کنیم

$$20n_1 + 30n_2 = 210$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_2 \in \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ ولی $n_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ قابل قبول نیست. پس n_2 حداکثر می‌تواند $\{5, 7\}$ باشد.

$n_2 = 5$ انتخاب می‌کنیم

$$20n_1 = 60$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$ ولی $n_1 = 0, 1, 2, 4, \cdots, 15$ قابل قبول نیست

پس $n_1 = 3$

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 5, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 0$$

حال $n_4 = 0$ انتخاب می‌کنیم پس

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 300$$

از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$ ولی $n_3 = 1, 3, 5$ قابل قبول نیست. پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 2, 4, 6\}$ باشد.

$n_3 = 2$ انتخاب می‌کنیم

$$20n_1 + 30n_2 = 210$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_2 \in \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ ولی $n_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ قابل قبول نیست. پس n_2 حداکثر می‌تواند $\{5, 7\}$ باشد.

$n_2 = 7$ انتخاب می‌کنیم

$$20n_1 = 0$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$ ولی $n_1 = 1, 2, \cdots, 15$ قابل قبول نیست پس

$n_1 = 0$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 7, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 0$$

حال $n_4 = 0$ انتخاب می‌کنیم پس

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 300$$

از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$ ولی $n_3 = 1, 3, 5$ قابل قبول نیست. پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 2, 4, 6\}$ باشد.

$n_3 = 4$ انتخاب می‌کنیم

$$20n_1 + 30n_2 = 120$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_2 \in \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ ولی $n_2 = 1, 3, 6, 8, 9, 10$ قابل قبول نیست.

پس n_2 حداکثر می‌تواند $\{0, 4, 2\}$ باشد.

$n_2 = 0$ انتخاب می‌کنیم

$$20n_1 = 120$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_1 \in \{0, 1, 2, \cdots, 15\}$ ولی $n_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, \cdots, 15$ قابل قبول نیست پس $n_1 = 6$

$$n_1 = 6, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 4, \quad n_4 = 0$$

حال $n_4 = 0$ انتخاب می‌کنیم پس

$$20n_1 + 30n_2 + 45n_3 = 300$$

از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_3 \in \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$ ولی $n_3 = 1, 3, 5$ قابل قبول نیست. پس n_3 حداکثر می‌تواند $\{0, 2, 4, 6\}$ باشد.

$n_۳ = ۴$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۱۲۰$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$ ولی $n_۲ = ۱, ۳, ۶, ۸, ۹, ۱۰$ قابل قبول نیست.

پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۴, ۲\}$ باشد.

$n_۲ = ۲$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ = ۶۰$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۵\}$ ولی $n_۱ = ۰, ۱, ۲, ۴, \cdots, ۱۵$ قابل قبول نیست

پس $n_۱ = ۳$

$$n_۱ = ۳, \quad n_۲ = ۲, \quad n_۳ = ۴, \quad n_۴ = ۰$$

حال $n_۴ = ۰$ انتخاب می‌کنیم پس

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ + ۴۵n_۳ = ۳۰۰$$

از گام ۱ نتیجه گرفتیم $n_۳ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۶\}$ ولی $n_۳ = ۱, ۳, ۵$ قابل قبول نیست. پس $n_۳$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۲, ۴, ۶\}$ باشد.

$n_۳ = ۴$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ + ۳۰n_۲ = ۱۲۰$$

از گام ۸ نتیجه گرفتیم که $n_۲ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۰\}$ ولی $n_۲ = ۱, ۳, ۶, ۸, ۹, ۱۰$ قابل قبول نیست.

پس $n_۲$ حداکثر می‌تواند $\{۰, ۴, ۲\}$ باشد.

$n_۲ = ۴$ انتخاب می‌کنیم

$$۲۰n_۱ = ۰$$

از گام ۱۵ نتیجه گرفتیم $n_۱ \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۵\}$ ولی $n_۱ = ۱, ۲ \cdots, ۱۵$ قابل قبول نیست پس

$$n_{۱} = ۰$$

$$n_{۱} = ۰, \quad n_{۲} = ۴, \quad n_{۳} = ۴, \quad n_{۴} = ۰$$

مسأله ۲) برش بر اساس استفاده از عرض مستطیل مادر و عرض سفارشات با ضایعات صفر:

جدول ۱.۳: برش بر اساس استفاده از عرض مستطیل مادر و عرض سفارشات با ضایعات صفر

ضایعات عرض	۲۰س	۳۰س	۴۵س	۵۰س	شماره الگوها
۰	۰	۰	۰	۶	۱
۰	۱	۱	۰	۵	۲
۰	۲	۲	۰	۴	۳
۰	۵	۰	۰	۴	۴
۰	۰	۲	۲	۳	۵
۰	۳	۰	۲	۳	۶
۰	۱	۰	۴	۲	۷
۰	۱	۶	۰	۲	۸
۰	۱۰	۰	۰	۲	۹
۰	۲	۱	۴	۱	۱۰
۰	۰	۱	۶	۰	۱۱
۰	۰	۴	۴	۰	۱۲
۰	۶	۰	۴	۰	۱۳
۰	۳	۲	۴	۰	۱۴
۰	۰	۷	۲	۰	۱۵
۰	۳	۵	۲	۰	۱۶
۰	۰	۱۰	۰	۰	۱۷
۰	۲	۸	۰	۰	۱۸
۰	۶	۶	۰	۰	۱۹
۰	۸	۴	۰	۰	۲۰
۰	۱۴	۲	۰	۰	۲۱
۰	۱۵	۰	۰	۰	۲۲

الگوهایی را انتخاب می‌کنیم که بدون ضایعات باشد. به عنوان مثال الگوهای ۱, ۵, ۱۳, ۱۸, ۲۲.

سفارشات

سفارش اول: ۱۰ قطعه ۶۰ × ۵۰ سانتی‌متری، سفارش دوم: ۴ قطعه ۵۵ × ۴۵ سانتی‌متری، سفارش سوم: ۷ قطعه ۴۵ × ۳۰ سانتی‌متری، سفارش چهارم: ۸ قطعه ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متری.
تعداد قطعات مناسب هر سفارش را بیابید.

جدول ۲.۳: برش بر اساس استفاده از عرض مستطیل مادر و عرض سفارشات با ضایعات صفر با الگوهای ۱،۵،۱۳، ۱۸،۲۲

تعداد دفعات	ضایعات‌عرض	عرض سفارشات				شماره الگوها
		۲۰س	۳۰س	۴۵س	۵۰س	
x_1	۰	۰	۰	۰	۶	۱
x_2	۰	۰	۲	۲	۳	۲
x_3	۰	۶	۰	۴	۰	۳
x_4	۰	۳	۸	۰	۰	۴
x_5	۰	۱۵	۰	۰	۰	۵

محدودیت‌ها

تعداد قطعات سفارش اول: $6x_1 + 3x_2 \geqslant 10$

تعداد قطعات سفارش دوم: $2x_2 + 4x_3 \geqslant 4$

تعداد قطعات سفارش سوم: $2x_2 + 8x_4 \geqslant 7$

تعداد قطعات سفارش چهارم: $6x_3 + 3x_4 + 15x_5 \geqslant 8$

$$x_1, x_2, x_3 x_4, x_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

چند سانتی‌متر ضایعات در عرض‌ها تولید می‌شود:

چقدر از ضایعات برابر 60×50 سانتی‌متر است: $(6x_1 + 3x_2 - 10)$

چقدر از ضایعات برابر 55×45 سانتی‌متر است: $(2x_2 + 4x_3 - 4)$

چقدر از ضایعات برابر 45×30 سانتی‌متر است: $(2x_2 + 8x_4 - 7)$

چقدر از ضایعات برابر 30×20 سانتی‌متر است: $(6x_3 + 3x_4 + 15x_5 - 8)$

ضایعات کل:

$$T(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵) = ۵۰(۶x_۱ + ۳x_۲ - ۱۰) + ۴۵(۲x_۲ + ۴x_۳ - ۴) + ۳۰(۲x_۲ + ۸x_۴ - ۷)$$
$$+ ۲۰(۶x_۳ + ۳x_۴ + ۱۵x_۵ - ۸)$$

$$\min \quad T(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵) = ۳۰۰x_۱ + ۳۰۰x_۲ + ۳۰۰x_۳ + ۳۰۰x_۴ + ۳۰۰x_۵ - ۱۰۵۰$$

$$s.t$$

$$۶x_۱ + ۳x_۲ - ۱۰ \geqslant ۰$$

$$۲x_۲ + ۴x_۳ - ۴ \geqslant ۰$$

$$۲x_۲ + ۸x_۴ - ۷ \geqslant ۰$$

$$۶x_۳ + ۳x_۴ + ۱۵x_۵ - ۸ \geqslant ۰$$

$$x_۱, x_۲, x_۳x_۴, x_۵ \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$$

$$[x\ ,\ fval] = linprog(f\ ,\ A\ ,\ b\ ,\ []\ ,\ []\ ,\ lb)$$

$$b = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ & -۷ & -۸ \end{bmatrix},\ lb = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^T,\ A = \begin{bmatrix} -۶ & -۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ & -۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۶ & -۲ & -۱۵ \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} ۳۰۰ & ۳۰۰ & ۳۰۰ & ۳۰۰ & ۳۰۰ \end{bmatrix},$$

Optimization terminated.

$$x_1 = 0/6667$$

$$x_2 = 2/0000$$

$$x_3 = 0/0000$$

$$x_4 = 0/3750$$

$$x_5 = 0/4833$$

$$Fval = 1/0575e + 03$$

مسأله ۳) برش بر اساس استفاده از عرض مستطیل مادر و طول سفارشات با ضایعات صفر :

مشابه مسأله قبل با حل معادله سیاله داریم

$$30n_1 + 45n_2 + 55n_3 + 60n_4 = 300$$

جدول ۳.۳: برش بر اساس استفاده از طول مستطیل مادر و طول سفارشات با ضایعات صفر

شماره الگوها	۶۰س	۵۵س	۴۵س	۳۰س	ضایعات طول
۱	۵	۰	۰	۰	۰
۲	۴	۰	۰	۲	۰
۳	۳	۰	۰	۴	۰
۴	۳	۰	۰	۲	۰
۵	۲	۰	۲	۳	۰
۶	۱	۰	۴	۲	۰
۷	۰	۳	۱	۳	۰
۸	۰	۰	۶	۱	۰
۹	۰	۰	۰	۱۰	۰

الگوهایی را انتخاب می‌کنیم که بدون ضایعات باشد مثلا الگوهای ۷،۲،۱ ،۹،۸.

جدول ۴.۳: برش بر اساس استفاده از طول مستطیل مادر و طول سفارشات با ضایعات صفر با الگوهای ۷،۲،۱، ۹، ۱۰

تعداد دفعات	ضایعات	طول سفارات				شماره الگو
		۳۰س	۴۵س	۵۵س	۶۰س	
$x_۱$	۰	۰	۰	۰	۵	۱
$x_۲$	۰	۲	۰	۰	۴	۲
$x_۳$	۰	۳	۱	۳	۰	۳
$x_۴$	۰	۱	۶	۰	۰	۴
$x_۵$	۰	۱۰	۰	۰	۰	۵

سفارشات

سفارش اول: ۱۰ قطعه ۶۰×۵۰ سانتی‌متری، سفارش دوم: ۴ قطعه ۵۵×۴۵ سانتی‌متری، سفارش سوم: ۷ قطعه ۴۵×۳۰ سانتی‌متری، سفارش چهارم: ۸ قطعه ۳۰×۲۰ سانتی‌متری. تعداد قطعات مناسب هر سفارش را بیابید.

محدودیت‌ها[۱]

تعداد قطعات سفارش اول: $۵x_۱ + ۴x_۲ \geqslant ۱۰$

تعداد قطعات سفارش دوم: $۳x_۳ \geqslant ۴$

تعداد قطعات سفارش سوم: $x_۳ + ۶x_۴ \geqslant ۷$

تعداد قطعات سفارش چهارم: $۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ + ۱۰x_۵ \geqslant ۸$

$$x_۱, x_۲, x_۳x_۴, x_۵ \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$$

چقدر ضایعات تولید می‌شود:

چقدر از ضایعات برابر ۶۰×۵۰ سانتی‌متر است: $(۵x_۱ + ۴x_۲ - ۱۰)$

[۱] constrant

چقدر از ضایعات برابر ۵۵ × ۴۵ سانتی‌متر است: $(۳x_۳ - ۴)$

چقدر از ضایعات برابر ۴۵ × ۳۰ سانتی‌متر است: $(x_۳ + ۶x_۴ - ۷)$

چقدر از ضایعات برابر ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متر است: $(۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ + ۱۰x_۵ - ۸)$

کل ضایعات:

$$T(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵) = ۶۰(۵x_۱ + ۴x_۲ - ۱۰) + ۵۵(۳x_۳ - ۴) + ۴۵(x_۳ + ۶x_۴ - ۷)$$
$$+ ۳۰(۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ + ۱۰x_۵ - ۸)$$

بنابراین مسأله برنامه ریزی زیر را داریم:

$$\min \quad T(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) = ۳۰۰x_۱ + ۳۰۰x_۲ + ۳۰۰x_۳ + ۳۰۰x_۴ + ۳۰۰x_۵ - ۱۰۵۰$$

$$s.t$$

$$۵x_۱ + ۴x_۲ \geqslant ۱۰$$

$$۳x_۳ \geqslant ۴$$

$$x_۳ + ۶x_۴ \geqslant ۷$$

$$۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ + ۱۰x_۵ \geqslant ۸$$

$$x_۱, x_۲, x_۳x_۴, x_۵ \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$$

$$[x\ ,\ fval] = linprog(f\ ,\ A\ ,\ b\ ,\ []\ ,\ []\ ,\ lb)$$

$$b = \begin{bmatrix} -۱۰ & -۴ & -۷ & -۸ \end{bmatrix}, \ lb = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}^T, \ A = \begin{bmatrix} -۵ & -۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۳ & -۱ & -۱۰ \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} ۳۰۰ & ۳۰۰ & ۳۰۰ & ۳۰۰ & ۳۰۰ \end{bmatrix},$$

Optimization terminated.

$$x_۱ = ۱/۳۱۷۷$$

$$x_۲ = ۰/۸۵۲۸$$

$$x_۳ = ۱/۳۳۳۳$$

$$x_۴ = ۰/۹۴۴۴$$

$$x_۵ = ۰/۱۳۵۰$$

$$Fval = ۱/۳۷۵e + ۰۳$$

۳.۳ تعمیم مسأله‌های ۱ و ۲

تعمیم مسأله برای زمانی‌که از عرض مستطیل مادر و طول یا عرض سفارشات برای چیدن استفاده می‌کنیم:

$$۲۰n_۱k_۱ + ۳۰n_۲k_۲ + ۴۵n_۳k_۳ + ۳۰n_۴k_۴ + ۵۵n_۵k_۵ + ۴۵n_۶k_۶ + ۶۰n_۷k_۷ + ۵۰n_۸k_۸ = ۳۰۰$$

$$k_۱ + k_۲ = ۱$$

$$k_۳ + k_۴ = ۱$$

$$k_۵ + k_۶ = ۱$$

$$k_{۷} + k_{۸} = ۱$$

$$k_i \in \{۰, ۱\} \qquad i = ۱, \cdots, ۸ \qquad n_i \in \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$$

که مساله بالا یک مساله غیر خطی عدد صحیح است که می‌توان آن را با روش‌هایی از قبیل شاخه کران در نرم‌افزار غیر خطی عدد صحیح یا روش‌های دیگر حل کرد.

مسأله ۴) زمانی که بخواهیم از طول ورق فلزی مادر و طول سفارشات برای چیدن استفاده کنیم: حل معادله سیاله زیر به همان روش قبل امکان‌پذیر می‌باشد.

$$۳۰m_{۱} + ۴۵m_{۲} + ۵۵m_{۳} + ۶۰m_{۴} = ۴۰۰$$

برش بر اساس استفاده از طول مستطیل مادر به صورت تقریبا بهینه:

جدول ۵.۳: برش بر اساس استفاده از طول مستطیل مادر و طول سفارشات با ضایعات صفر

ضایعات طول	۳۰س	۴۵س	۵۵س	۶۰س	شماره الگوها
۰	۰	۱	۱	۵	۱
۰	۲	۱	۱	۴	۲
۰	۰	۰	۴	۳	۳
۰	۴	۱	۱	۳	۴
۰	۲	۰	۴	۲	۵
۰	۰	۵	۱	۲	۶
۰	۶	۱	۱	۲	۷
۰	۸	۶	۰	۱	۸
۰	۶	۰	۴	۰	۹
۰	۴	۵	۱	۰	۱۰

الگوهایی را انتخاب می‌کنیم که بدون ضایعات باشد. مثلا الگوهای ۷،۲،۱ ،۹،۱۰.

جدول ۶.۳: برش بر اساس استفاده از طول مستطیل مادر و طول سفارشات با ضایعات صفر با الگوهای ۷،۲،۱ ،۹،۱۰

تعداد دفعات	ضایعات	طول سفارات				شماره الگو
		۳۰س	۴۵س	۵۵س	۶۰س	
x_1	۰	۰	۱	۱	۵	۱
x_2	۰	۲	۱	۱	۴	۲
x_3	۰	۶	۱	۱	۲	۳
x_4	۰	۶	۰	۴	۰	۴
x_5	۰	۴	۵	۱	۰	۵

سفارشات

سفارش اول: ۱۰ قطعه ۶۰ × ۵۰ سانتی‌متری، سفارش دوم: ۴ قطعه ۵۵ × ۴۵ سانتی‌متری، سفارش سوم: ۷ قطعه ۴۵ × ۳۰ سانتی‌متری، سفارش چهارم: ۸ قطعه ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متری. تعداد قطعات مناسب هر سفارش را بیابید.

محدودیت‌ها

تعداد قطعات سفارش اول: $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geqslant 10$

تعداد قطعات سفارش دوم: $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \geqslant 4$

تعداد قطعات سفارش سوم: $x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 \geqslant 7$

تعداد قطعات سفارش چهارم: $2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 \geqslant 8$

$$x_1, x_2, x_3 x_4, x_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

چقدر ضایعات تولید می‌شود:

چقدر از ضایعات برابر ۶۰ × ۵۰ سانتی‌متر است: $(5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10)$

چقدر از ضایعات برابر ۵۵ × ۴۵ سانتی‌متر است: $(x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 - 4)$

چقدر از ضایعات برابر ۴۵ × ۳۰ سانتی‌متر است: $(x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 - 7)$

چقدر از ضایعات برابر ۳۰ × ۲۰ سانتی‌متر است: $(2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 - 8)$

کل ضایعات:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 60(5x_1 + 4x_2 + 2x_3) + 55(x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5) + 45(x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5)$$
$$+ 30(2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5)$$

$$\min \quad T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 400x_5 - 1050$$

$$s.t$$

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10 \geqslant 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 - 4 \geqslant 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 - 7 \geqslant 0$$

$$2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 - 8 \geqslant 0$$

$$x_1, x_2, x_3 x_4, x_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$[x\ ,\ fval] = linprog(f\ ,\ A\ ,\ b\ ,\ []\ ,\ []\ ,\ lb)$$

$$b = \begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 & -8 \end{bmatrix},\ lb = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -6 & -4 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 400 & 400 & 400 & 400 & 400 \end{bmatrix},$$

Optimization terminated.

$$x_1 = 1/0866$$

$$x_2 = 1/0576$$

$$x_3 = 0/1683$$

$$x_4 = 0/1875$$

$$x_5 = 0/9375$$

$$Fval = 1/37500e + 03$$

مسأله ۵) وقتی که فقط بخواهیم از طول ورق فلزی مادر و عرض سفارشات به صورت تقریبا بهینه استفاده کنیم:

$$30m_1 + 45m_2 + 55m_3 + 60m_4 = 300$$

به روش مشابه مساله ۲ می‌توانیم حل کنیم.

۴.۳ تعمیم مسأله‌های ۴ و ۵

تعمیم مسأله وقتی که فقط از طول مستطیل مادر و هم از طول یا عرض سفارشات برای چیدن استفاده کنم:

$$20m_1s_1 + 30m_2s_2 + 45m_3s_3 + 30m_4s_4 + 55m_5s_5 + 45m_6s_6 + 60m_7s_7 + 50m_8s_8 = 400$$

$$s_۱ + s_۲ = ۱$$

$$s_۳ + s_۴ = ۱$$

$$s_۵ + s_۶ = ۱$$

$$s_۷ + s_۸ = ۱$$

$$s_i \in \{۰, ۱\} \qquad i = ۰, \cdots, ۸ \qquad m_i \in \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$$

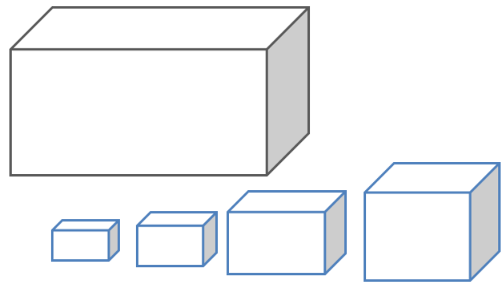
مساله بالا یک مساله غیر خطی عدد صحیح است که می‌توان با روش‌هایی از قبیل شاخه کران در نرم‌افزار غیر خطی اعداد صحیح آن را حل نمود.

۵.۳ برش موجودی سه بعدی

در این بخش مسأله برش و چیدن سه بعدی را مورد بررسی قرار میدهیم. در حقیقت مسأله به صورت ساده این است که یک اتاق مکعب مستطیل شکل داریم و می‌خواهیم جعبه‌های (box) مکعب مستطیل کوچک با ابعاد متفاوت را طوری در این اتاق بچینیم که بیشترین جعبه‌ها در این اتاق قرار گیرد. برای این منظور در این پایان‌نامه سعی می‌کنیم که ابتدا قاعده جعبه‌های مکعب مستطیل شکل را به صورت تقریبا بهینه بررسی و کف اتاق بچینیم. برای این کار از برش و چیدن دو بعدی ابتدای فصل استفاده می‌کنیم و سپس به صورت طبقه طبقه جعبه‌ها را می‌چینیم. بنابراین اصل این فصل بر اساس چیدن دو بعدی است.

۶.۳ تعریف

مساله برش اشیا بزرگ برای تولید اشیا کوچکتر تا حد زیادی مورد بررسی قرار گرفته است [۴۰]، مخصوصا وقتی که اشیاء یک یا دو بعدی باشند. ما در این فصل بر روی مسأله سه بعدی تمرکز می‌کنیم، اشیاء بزرگ که باید برش داده شوند را مخزن و اجسام کوچک (که تولید می‌شوند) جعبه‌ها یا اقلام می‌نامیم. برش گیوتین یک نوع برش است که موازی با



شکل ۱.۳: مکعب مستطیل کل با جعبه‌های

یکی از اضلاع مخزن است و از یک ضلع شروع شده و به ضلع مخالف می رود.برای مسائلی که در اینجا درنظر گرفته شده، نه تنها اولین برش بلکه همه برش های بعدی که بر روی قسمت های کوچکتر زده می شوند نیز باید از نوع گیوتین باشند. برش k –staged (یا برش مرحله (ام-k یک دنباله از حداکثر k برش است که هر مرحله از آن مجموعه ای از برش های گیوتین موازی است که بر روی اشیاء به دست آمده در مرحله قبل انجام می شود. علاوه بر این، برش ها در هر مرحله باید با برش هایی که در مرحله قبل انجام می شود، متعامد باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم این برش‌ها بی نهایت نازک هستند. هر روش ممکن برای برش مخزن، الگوی برش نامیده می‌شود. برای نشان دادن این الگوها فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ با مختصات xyz را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که طول، عرض و ارتفاع یک شی در محورهای x، y و z قابل بیان باشند. گوییم مخزن B دارای ابعاد (H, W, L) است ($B = (H, W, L)$) ، اگر طول، عرض و ارتفاع آن به ترتیب برابر L، W و H باشد. مسائل مورد توجه در این فصل عبارتند از:

مسأله سه بعدی knapsack

در این مساله به ما یک مخزن $B = (H, W, L)$ و یک لیست T از n نوع جعبه با ابعاد (h_i, w_i, l_i) داده می‌شود. می‌خواهیم B را طوری برش بزنیم که حداکثر تعداد جعبه‌های لیست T را تولید کنیم. در اینجا، هیچ محدودیتی بر روی تعداد جعبه‌هایی که قرار است تولید شود، اعمال نمیکنیم (بعضی از حالت‌ها ممکن است رخ ندهد). در این مسأله، برخلاف مسأله برش، هیچ تقاضایی برای یک جعبه وجود ندارد. همچنین در مسأله برش که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت، جعبه i ام لیست با ابعاد (h_i, w_i, l_i) و تقاضای d_i را با نماد (h_i, w_i, l_i, d_i) مشخص می‌کنیم.

مسأله برش سه بعدی (3CS)

در این مسأله مخزن $B = (H, W, L)$ و مجموعه‌ای از n جعبه (d, h, w, l) داده شده است. تعیین کنید که چگونه کمترین تعداد برش‌ها را انجام دهیم بطوریکه تقاضای d_i برای هر کدام از n جعبه برآورده شود.

مسأله برش سه بعدی با حجم متغیر مخازن (3CSV)

در این مسأله مخازن $B_۱, ..., B_b$ و مجموعه‌ای از n جعبه (d, h, w, l) داده شده است. تعیین کنید چگونه برش مخازن را به منظور برآورده شدن تقاضای d_i برای هر کدام از n جعبه انجام دهیم، طوریکه تعداد مخازن مورد استفاده حداقل شود (بعضی از مخازن ممکن است استفاده نشوند).

۷.۳ الگوریتم برای مسأله k-staged 3DK

در این بخش یک الگوریتم برنامه ریزی پویا برای مسائل k-staged 3DK and 3DK^r ارائه می‌دهیم [۴۰]. در این روش برای هر مرحله یک مسیر برش متفاوت مانند $V - D - H - H$ در نظر گرفته می‌شود. یک مرحله برش ممکن است خالی باشد (زمانی که نیازی به برش نباشد)، که در این حالت بلافاصله برش بعدی در نظر گرفته می‌شود. در فرمول‌های بازگشتی بعدی $G(l^*, w^*, h^*, k, H)$، $G(l^*, w^*, h^*, k, V)$ و $G(l^*, w^*, h^*, k, D)$ مقدار جواب بهینه مرحله K ام برش گیوتین را برای یک مخزن با ابعاد (l^*, w^*, h^*) نشان می‌دهد. این پارامترهای V، H و D نشان‌دهنده جهت اولین مرحله برش است.

$$G(l^*, w^*, h^*, O, V \mathrm{or} H \mathrm{or} D) = g(l^*, w^*, h^*)$$

$$G(l^*, w^*, h^*, k, V) = \max \begin{cases} G(l^*, w^*, h^*, k-۱, D) \\ \max\{G(l', w^*, h^*, k-۱, D) + G(p(l^* - l'), w^*, h^*, k, V) \mid l' \in \tilde{P}\ ,\ l' \leqslant \frac{l^*}{۲} \end{cases}$$

$$G(l^*, w^*, h^*, k, H) = \max \begin{cases} G(l^*, w^*, h^*, k-۱, V) \\ \max\{G(l', w^*, h^*, k-۱, V) + G(l^*, q(w^*-w'), h^*, k, H) \mid w' \in \tilde{Q}\ ,\ w' \leqslant \frac{w^*}{۲} \end{cases}$$

$$G(l^*, w^*, h^*, k, D) = \max \begin{cases} G(l^*, w^*, h^*, k-۱, H) \\ \max\{G(l^*, w^*, h', k-۱, H) + G(l^*, w^*, r(h^*-h'), k, D) \mid h' \in \tilde{R}\ ,\ h' \leqslant \frac{h^*}{۲} \end{cases}$$

الگوریتم DPS3DK (برنامه‌نویسی پویا برای k-staged 3DK) در موارد زیر توضیح داده شده است فرمول‌های بازگشتی بالا چگونه حل می‌شوند. این بسیار شبیه به الگوریتم قبلی است. این الگوریتم ابتدا اولین مجموعه‌های $\tilde{P}$ $\tilde{Q}$ و $\tilde{R}$ را محاسبه می‌کند و حداکثر مقدار یک جعبه‌ای که می‌تواند بر روی ابعاد کوچک بریده شود را در $G(۰, i, j, I)$ نگه می‌دارد. سپس، الگوریتم برای هر مرحله b، بهترین راه حل برای برش تنها در یک جهت را محاسبه می کند و از این برای محاسبه بهترین راه حل برای مرحله بعدی و غیره اطلاعات استفاده می‌کند. این تفاوت اساسی بین الگوریتم DP3DK و DPS3DK است. در برخی موارد، بهترین راه حل برای مرحله $b-۱$، بهترین راه حل برای مرحله b است و هیچ برش دیگری در این مورد لازم نیست. در این حالت، مقدار صفر در متغیر guil ذخیره می‌شود.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

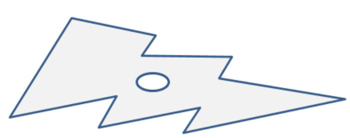
پیشنهادات

در این پایان نامه برای حل مسائل برش و چیدن، ابتدا آن را به یک مسأله بهینه سازی تبدیل کرده و سپس به حل مسأله بهینه سازی پرداختیم. حل مسأله برش با سایر روش‌های دیگر نیز از جمله پژوهش‌هایی است که می‌تواند انجام شود.

کارهای بعدی

(آ) ارائه روشی مناسب برای حل این مسائل به طوریکه مفتول مادر به تعداد زیاد و در ابعاد متفاوت باشد.

(ب) الگو ورق مادر به شکل دلخواهی باشد مانند چرم پوست حیوانات که می‌خواهیم از آن کیف یا سایر وسایل چرمی را تهیه کنیم که مسأله جدیدی است و مشکل تراز مساله قبل که ورق مادر مکعب مستطیل شکل بود.



(ج) ممکن است سفارشات ما شکل غیرهندسی دلخواهی داشته باشد مانند رویه کفش و کلاه یا لباس. بنابراین ارائه یک الگوریتم مناسب در این مبحث می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد.

نتیجه‌گیری

اولین الگوریتمی که در اینجا ارائه می‌کنیم – HFF۳ – می‌باشد [۴۰]. این الگوریتم برای مسأله ۲CS برای تولید سطوح و یک الگوریتم برای مسأله ۱CS برای بسته شدن این سطوح به مخازن استفاده می شود. ابتدا الگوریتم های مربوط به مسائل ۱CS و ۲CS را شرح می دهیم و سپس الگوریتم HFF۳ را ارائه می دهیم. الگوریتمی که برای مسأله 1CS استفاده می‌کنیم، با عنوان First Fit (FF) شناخته شده و الگوریتم اول کاهش‌پذیری (FFD) نام دارد. در اینجا فقط الگوریتمی را که ما برای 2CS استفاده می‌کنیم توصیف می‌کنیم. این مسأله را HFF۲ می‌نامند زیرا بر اساس الگوریتم Hybrid First Fit توسط chang ارائه شده است. برای راحتی، ما آن را به عنوان الگوریتم "بسته‌بندی" توصیف می‌کنیم. الگوریتم HFF2 شامل دو بخش HFF^l و HFF^w است. بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض می‌کنیم تقاضای مربوط به هر جعبه محدود است. برای نمونه (L, W, I, w) از مسأله CS2، الگوریتم HFFI آیتم ها را به صورت طولی $(l_۱ > l_۲ > \cdots > l_n)$ مرتب می‌کند. سپس، هر عنصر i را به صورت یک آیتم یک بعدی از اندازه w_i در نظر می‌گیرد و الگوریتم $FF(W, w)$ را اعمال می‌کند. برای به دست آوردن بسته‌بندی از این اقلام به گیرنده $s_۱, \cdots, s_m$، که ما آن را نوارها می‌نامیم. در نهایت، هر نوار s_i به صورت یک بعدی از اندازه $s_i = \max\{l_j : j \in s_i\}$، و الگوریتم $FFD(L, s)$ برای بسته کردن این نوارها به مخازن مستطیلی (2D) استفاده می‌شود. نوارهای الگوریتم HFF^l در جهت طول تولید می‌شود، در حالیکه HFF^w تولید نوار در جهت عرض الگوریتم می‌باشد. همچنین الگوریتم $HFF^۲$ هر دو گزینه را اجرا می‌کند و یک راه حل را با بهترین نتیجه ارائه می‌کند.

برای مقابله با مساله CS^r (نوع 3CS که در آن چرخش متعامد اجازه داده می‌شود) ما بوسیله HFF^x (به ترتیب HFF^y) نوع الگوریتم HFF2 را نشان می‌دهد که مستطیل‌ها را قبل از اعمال الگوریتم‌های HFF^l و HFF^w، برای به دست آوردن $w_i \leqslant l_i$ می‌چرخاند. الگوریتم $HFF۲^r$ این کار را انجام می‌دهد تا بهترین راه حل را پیدا کند.

الگوریتم HFF۳ در واقع یک حالت خاصی از الگوریتم H۳CS محسوب می‌شود. الگوریتم H۳CS ابتدا اقلام را بر اساس ارتفاع آن مرتب می‌کند. سپس، با استفاده از یک الگوریتم برای مسئله ۲CS، یک سطح جدید تولید می کند و بسته بندی اقلام بالاتر را به هر سطح تقسیم می کند. هنگامی که تمام سطوح تولید می شوند، آنها با الگوریتم مسأله

1CS بسته بندی می شوند. در این پایان‌نامه برای حل مسأله برش یک- دو-سه بعدی از برنامه‌ریزی عدد صحیح استفاده شد که در واقع حل مسأله معادله سیاله با تمام جواب‌های آن بود. سپس الگوریتمی پیشنهاد دادیم که تمام جواب‌ها را به صورت کاملا منظم نتیجه می‌داد و سپس از الگویی با ضایعات صفر یا بیشتر از صفر استفاده کردیم. همچنین ثابت کردیم که که با افزایش الگوها، ضایعات کاهش می‌یابد.

مراجع

[1] Buschkffuhl, L., Sahling, F., Helber, S., Tempelmeier, H., 2008. Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. OR Spectrum 32 (2), 231–261.

[2] Brahimi, N., Dauzere-Peres, S., Najid, N. M., Nordli, A., 2006. Single item lot sizing problems. European Journal of Operational Research 168 (1), 1 – 16.

[3] Jans, R., Degraeve, Z., 2004. Improved lower bounds for the capacitated lot sizing problem with setup times. Operations Research Letters 32 (2), 185 – 195.

[4] Oliveira, J. F., WFFascher, G., 2007. Cutting and packing. European Journal of Operational Research 183 (3), 1106–1108.

[5] Poldi, K. C., Arenales, M. N., 2009. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. Computers Operations Research 36 (6), 2074 – 2081.

[6] Aktin, T., Off zdemir, R. G., 2009. An integrated approach to the one-dimensional cutting

stock problem in coronary stent manufacturing. European Journal of Operational Research 196 (2), 737 – 743.

[7] Alem, D. J., Morabito, R., 2012. Production planning in furniture settings via robust optimization. Computers & Operations Research 39 (2), 139 – 150.

[8] Belov, G., Scheithauer, G., 2002. A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths. European Journal of Operational Research 141 (2), 274 – 294.

[9] Degraeve, Z., Jans, R., 2007. A new dantzig-wolfe reformulation and branch-and-price algorithm for the capacitated lot-sizing problem with setup times. Operations Research 55 (5), 909–920.

[10] Degraeve, Z., Peeters, M., 2003. Optimal integer solutions to industrial cutting-stock problems: Part 2, benchmark results. INFORMS Journal on Computing 15 (1), 58–81.

[11] Drexl, A., Kimms, A., 1997. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. European Journal of Operational Research 99 (2), 221 – 235.

[12] Dyckho , H., 1981. A new linear programming approach to the cutting stock problem. Operations Research 29 (6), 1092 – 1104.

[13] Dyckho , H., 1990. Cutting and packing a typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research 44 (2), 145 – 159.

[14] Foerster, H.,W¨ascher, G., 2000. Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problems. International Journal of Production Research 38 (7), 1657 – 1676.

[15] Gilmore, P. C., Gomory, R. E., 1963. A linear programming approach to the cutting stock problema - part ii. Operations Research 11 (6), 863 – 888.

[16] Gilmore, P. C., Gomory, R. E., 1965. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. Operations Research 13 (1), 94 – 120.

[17] Manne, A. S., 1958. Programming of economic lot sizes. Management Science 4 (2), 115 – 135.

[18] Molina, F., Morabito, R., de Araujo, S. A., 2016. Mip models for production lot-sizing problems with distribution costs and cargo arrangement. Journal of the Operational Research Society 67 (11), 1395 – 1407.

[19] Vanzela , M., Melega, G. M., Rangel, S., de Araujo, S. A., 2017. The integrated lot sizing and cutting stock problem with saw cycle constraints applied to furniture production. Computers Operations Research 79, 148 – 160.

[20] Trigeiro, W. W., Thomas, L. J., McClain, J. O., 1989. Capacitated lot sizing with setup times. Management Science 35 (3), 353–366.

[21] Karimi, B., Ghomi, S. M. T. F.,Wilson, J. M., 2003. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. Omega 31 (5), 365 – 378.

[22] Alves, C., Val´erio de Carvalho, J. M., 2008. A stabilized branch-and-price-and-cut algorithm for the multiple length cutting stock problem. Computers Operations Research 35 (4), 1315 – 1328.

[23] Brahimi, N., Dauzere-Peres, S., Najid, N. M., Nordli, A., 2006. Single item lot sizing problems. European Journal of Operational Research 168 (1), 1 – 16.

[24] Wagner, H. M., Whitin, T. M., 1958. Dynamic version of the economic lot size model. Management Science 5 (1), 89–96.

[25] Guimaraes, L., Klabjan, D., Almada-Lobo, B., 2014. Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups. European Journal of Operational Research 239 (3), 644 – 662.

[26] Arbib, C., Marinelli, F., 2014. On cutting stock with due dates. Omega 46, 11 – 20.

[27] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem", Operations Research, Vol. 9, No. 2 (1961), 849 - 859.

[28] Gilmore PC, Gomory RE. A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem – Part II. Operations Research. 1963; 11(6):8 63–888.

[29] Saad M. A Suliman, "Pattern generating procedure for the cutting stock problem", International Journal of Production Economics 74 (2001) 293-301Ivan C.

[30] Agostinho, G. T., Cherri, A. C., de Araujo, S. A., Nascimento, D. N., 2016. The multiperiod cutting stock problem with usable leftover. In: Annals of Latin-Iberian-American Conference on Operations Research(CLAIO).

[31] Aktin, T., O¨ zdemir, R. G., 2009. An integrated approach to the one-dimensional cutting stock problem in coronary stent manufacturing. European Journal of Operational Research 196 (2), 737 – 743.

[32] Classification and Literature Review of Integrated Lot-Sizing and Cutting Stock Problems CIRRELT-2017.

[33] Alem, D., Morabito, R., 2013. Risk-averse two-stage stochastic programs in furniture plants. OR Spectrum 35 (4), 773–806.

[34] Alem, D. J., Morabito, R., 2012. Production planning in furniture settings via robust optimization. Computers & Operations Research 39 (2), 139 – 150.

[35] Alves, C., Valerio de Carvalho, J. M., 2008. A stabilized branch-and-price-and-cut algorithm for the multiple length cutting stock problem. Computers & Operations Research 35 (4), 1315 – 1328.

[36] Andrade, R., Birgin, E. G., Morabito, R., Ronconi, D. P., 2014. Mip models for two-dimensional nonguillotine cutting problems with usable leftovers. Journal of the Operational Research Society 65 (11), 1649 –1663.

[37] Arbib, C., Marinelli, F., 2005. Integrating process optimization and inventory planning in cutting-stock with skiving option: An optimization model and its application. European Journal of Operational Research 163 (3), 617 – 630.

[38] Arbib, C., Marinelli, F., 2014. On cutting stock with due dates. Omega 46, 11 – 20.

[39] I. C. Mustakerov is with the Institute of Information and Communication Technology at the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia – 1113, Bulgaria, Department of Information Processes and Decision Support Systems (phone: 3952 9793241; e-mail: mustakerov@iit.bas.bg). D. I. Borissova is with the Institute of Information and Communica-

tion Technologies at Bulgarian Academy of Sciences, Sofia – 1113, Bulgaria, Department of Information Processes and Decision Support Systems (phone: 3952 9792055; e-mail: dborissova@iit.bas.bg).

[40] Thiago, A. de Queiroz, Flávio K. Miyazawa, Algorithm for 3D guillotine cutting problems: Unbounded Knapsack, cutting stock and stripe paking, 1-6.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

. . . .

ب

. . . .

بحث در مورد مسأله اندازه‌گیری لات . . . . Discussion of the Lot-Sizing Problem

پ

ف

ک

م

ن

. . . .

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

C

Column Gilmore and Gomory .... مدل تولید ستون گیلمور و گوموری

constrant .... محدودیت‌ها

D

....

Discussion of the Lot-Sizing Problem .... بحث در مورد مسأله اندازه‌گیری لات

F

. . . .

M

Mathematical Models . . . . مدل های ریاضی

N

. . . .

O

One-cut models . . . . مدل‌های برش

Other Models from the Literature . . . . مدل‌های دیگر از پژوهش‌ها

P

Position-indexed formulations . . . . فرمولاسیون نمایه با موقعیت

S

. . . .

T

The Model of Kantorovich . . . . مدل کانتوروویچ

نمایه

In the name of God
Graduate Studies Thesis Information
Ferdowsi University of Mashhad

Sub optimal cutting stocks problem in one-dimensional , two-dimensional , there-dimensional

---

Author: Ali Hashoosh

Supervisor: Dr. A. Vahidian

Faculty: Faculty of Mathematical Sciences

Department: Applied Mathematics Specialization: Control theory and optimization

---

Approval Date: 2017-11-07 Defence Date: 2018-02-18

M.Sc. Number of Pages: 89

Abstract: One of the known issues in the planning of production is the cutting problem. This problem becomes more important when the cutting material is cut in a large volume. This problems until now is an open problem but many researcher solved this
problem as optimization problem with near optimal solution. Also, most studies in this field have been without regard to the demand. In this thesis, using an optimization method and a new approach, we transform the one-dimensional cutting problem into an diophontine equation with n variables and then we obtain all the solutions of this equation with the Pascal algorithm. We also generalized this problem in order to reduce the number of cuts and reduce the waste of raw materials for more bars. In the next chapter, for cutting issues in dimension two, given that the cut is based on the length and width of the orders or the original length and width of the rectangle, the problem is divided into four sub-issues, and in each case the optimal answer We got. In the following, we will generalize the method described above and give examples to prove the correctness of the method.

Key Words: sub optimal, cutting stocks, optimization, diophontine equation

---

Signature of Supervisor: Date:

Ferdowsi University of Mashhad
Faculty of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Science in
Applied Mathematics

Title

Sub optimal cutting stocks problem in one-dimensional , two-dimensional , there-dimensional

Supervisor

Dr. A. Vahidian

by

Ali Hashoosh

2018