

Ministry of Education and Science of the Russian Federation
Federal state autonomous educational institute of higher education
"NORTH CAUCASUS FEDERAL UNIVERSITY"

As the manuscript

ALAA AL-SAEDI HUSSAIN

THREE-DIMENSIONAL VORTEX STRUCTURE OF THE WIND AS MAIN
CONDITION OF THE ATMOSPHERE

Abstract of the master thesis

Research supervisor:

Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Associate Professor

R.G. Zakinyan

Stavropol – 2016

GENERAL CHARACTERISTIC OF WORK

Relevance of a problem. Work is devoted to research of questions of stability of atmospheric circulation. In spite of the fact that by this time there is enough great number of the observational and theoretical works devoted to studying of atmospheric circulation, many problems remain without the answer. In atmosphere exclusively major variety of wave and vortex motions is observed, the mechanism of formation and which dynamics of development are not to the full clear. Therefore working out of mathematical model of vortex motions in atmosphere taking into account a baroclinicity is an actual problem of physics of atmosphere.

Now for the description of dynamics of atmosphere representation about its basic states is used:

- Atmosphere statics;
- Geostrophic state of atmosphere;
- State of Ekman of atmosphere.

In the specified two last basic states it is neglected vertical velocity of air. In other words, these models of atmosphere are two-dimensional. Even the spiral of Ekman, in spite of the fact that it represents rotational displacement of a geostrophic wind with height, is not the description of a three-dimensional vortex. Therefore it is represented actual to develop the mathematical model of atmosphere featuring a three-dimensional vortex as its basic state.

Thus, the work purpose is build-up of mathematical model of a three-dimensional atmospheric vortex.

For purpose achievement following **problems** have been put and solved:

- To make the analytical review of the mathematical models featuring geostrophic and Ekman's states of atmosphere;
- To gain the equations, featuring three-dimensional vortex motion in atmosphere;
- To find the solution of the gained equations;
- To find atmosphere stability criterions.

Object of research is atmospheric air circulation.

Research problem is the mathematical model of a three-dimensional atmospheric vortex.

Scientific novelty of the dissertation:

1. The mathematical model of a stationary three-dimensional atmospheric vortex taking into account dependence of density of air on overheat function is developed.
2. Expression for critical number of Rayleigh characterising the vortex state of atmosphere is gained
3. It is shown that while air particle in the low level on a spiral converges to center, air rises upwards, being in a labile state. After air particle reaches some level, air particle starts to disperse on a spiral. From the gained figure it is visible that the motion of an air particle accepts three-dimensional spiral structure.
4. It is gained that if horizontal air motion is converging in the low stratus of atmosphere the vortex has a cyclonic vorticity in the low stratus of atmosphere, thus the center of a cyclonic vortex has low pressure.
5. It is shown that the center of a cyclonic vortex is warm center.
6. It is gained that if the motion field has a cyclonic vorticity in lower level from this it follows that a motion field the anticyclonic vorticity at top level will have. Lower level has low pressure at center, and top level – more a high pressure at center.

The scientific and practical importance. The results gained in work, improve existing representations about the physicist and dynamics of air circulation in atmosphere and can be used in practice of forecasting of parameters of atmospheric circulation.

The positions which are taken out for the proof:

1. Criteria of occurrence of a three-dimensional atmospheric vortex
2. The established laws of distribution of parameters of a three-dimensional atmospheric vortex.

The personal contribution of the author of dissertation

The author personally conducts the analytical review of existing mathematical models of circulation of atmosphere. The author took active part in working out of mathematical model of a three-dimensional atmospheric vortex. The basic conclusions and positions of dissertational work are formulated personally by the author.

Publications. On dissertation materials 1 scientific article is published.

Structure and work volume. The dissertation consists of the introduction, two heads, the conclusion and the list of the references containing 60 names. The dissertation material contains 90 pages, including 24 drawings.

THE BASIC CONTENT OF THE DISSERTATION

In introduction the relevance of a developed theme is proved, the work purpose, solved problems, object and content of research, scientific novelty and the substantive provisions which are taken out on protection is formulated.

In chapter 1 analytical review of existing mathematical methods of the analysis of stability of air circulation in atmosphere is carried out. The special attention is given the analysis of the equations of dynamics of atmosphere in various simplifications. Chapter is finished by the analysis of the literary review and allocation of the actual problems demanding the solution.

In the second chapter the mathematical model of a three-dimensional atmospheric vortex is developed. In local system of co-ordinates (x, y, z) the atmosphere condition is described by system of the equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \nabla^2 u + 2\omega_{0z} v - 2\omega_{0y} w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + v \nabla^2 v - 2\omega_{0z} u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - g + v \nabla^2 w + 2\omega_{0y} u, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \Delta T = \kappa \nabla^2 \Delta T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Here $\Delta T = T_i - T_e$. The statics equation:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) - g = 0.$$

Let's present atmosphere parameters in a view:

$$p = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t), \quad \Delta T = \overline{\Delta T}(z) + \theta(x, y, z, t),$$

$$\overline{\Delta T} = \Delta_0 T - \Delta \gamma \cdot z, \quad \Delta \gamma = \gamma_a - \gamma.$$

Let's write down expression for density $\rho_i = \rho_e (1 - \alpha \theta)$. Then the system of the equations will write in a view:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) + v \nabla^2 u + 2\omega_{0z} v - 2\omega_{0y} w, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial y} \right) + v \nabla^2 v - 2\omega_{0z} u, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \alpha g \theta + v \nabla^2 w + 2\omega_{0y} u, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \theta = \Delta \gamma \cdot w + \kappa \nabla^2 \theta, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (5a)$$

Let's write down the equations in the dimensionless view. For horizontal and vertical directions as scales of length we will choose L and H , the characteristic value of velocity in a horizontal direction – U , characteristic time – L/U , scale of vertical velocity – HU/L , scale for pressure – $\rho_e U^2$, scale for temperature θ – $\Delta_z T = \Delta_0 T - \Delta T(H) = \Delta \gamma \cdot H$.

At the same time, we establish dimensionless parameters: $\delta = H/L$; $\text{Re} = UL/\nu$ (Reynolds number); $\text{Ri} = H\kappa N^2/U^3$ (Richardson number); N – Brunt – Vaisala frequency, $N^2 = \alpha g \Delta \gamma$; $\text{Pr} = \nu/\kappa$ (Prandtl Number); $\text{Ro}_L = U/2\omega_{0z}L$ (Rossby number), $\text{Ro}_H = \frac{U}{2\omega_{0y}H}$. Then the dimensionless form for the equations

will become

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\text{Ro}_L}v - \frac{1}{\text{Ro}_H}w + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}_L}u + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right). \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Ro}_H}u + \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right). \quad (8)$$

$$\frac{1}{\text{PrRe}} \frac{d\theta}{dt} = w + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

After transformations we receive system

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{D}{\text{Ro}_L} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\Omega}{\text{Ro}_L} = -\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 D - \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \frac{1}{\text{Ro}_H} u. \quad (13)$$

$$\frac{1}{\text{PrRe}} \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \nabla^2 \theta. \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

where is

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

– horizontal divergence and vertical vortex, accordingly. We will consider an atmosphere steady state, for this equation we will write down in a view

$$\frac{D}{\text{Ro}_L} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (17)$$

$$-\frac{\Omega}{\text{Ro}_L} = -\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 D - \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (18)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \frac{1}{\text{Ro}_H} u. \quad (19)$$

$$0 = w + \nabla^2 \theta. \quad (20)$$

$$D + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

The necessary differential equation in partial differential coefficients we will gain, excepting variables Ω , D , θ and p' :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \left(\nabla^2 \nabla^2 - \text{Ra} \right) w + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \nabla^2 u \right\} + \\ & + \left(\nabla^2 \nabla^2 + \text{Ta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial z \partial x} = -\frac{\text{Re}^2}{\text{Ro}_L \text{Ro}_H} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}, \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\text{Ra} = \text{Ri} \cdot \text{Re} = \frac{\kappa H^2 N^2}{\nu U^2}, \quad \text{Ta} = \frac{\text{Re}^2}{(\text{Ro}_L)^2}, \quad (23)$$

and Ra – Rayleigh number, but Ta – Taylor number.

The solution of system of the equations featuring a three-dimensional atmospheric vortex, we will search in a view

$$w = X(x)Y(y)W(z),$$

$$X(x) = \cos kx, \quad Y(y) = \cos ky, \quad W(z) = W_0 \cdot \sin(n\pi z).$$

Thus,

$$u = -W_0 \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \sin kx \cdot \cos ky - \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k(2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot \cos kx \cdot \sin ky \right) \cos(n\pi z) \quad (24)$$

$$v = -W_0 \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \cos kx \cdot \sin ky + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k(2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot \sin kx \cdot \cos ky \right) \cos(n\pi z) \quad (25)$$

$$w = W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \sin(n\pi z). \quad (26)$$

In Fig. 1 the field of the velocities made on gained expressions for projections of velocities is given. From drawing it is visible that while the air particle in the bottom level on a spiral converges to center, air raises upwards, being in a labile state. After the air particle reaches some level, the air particle starts to disperse on a spiral. From Fig. 1 we see that the motion of an air particle accepts three-dimensional spiral structure.

As a result, vortex motion is the basic state of atmosphere.

Let's find critical Rayleigh number for value of a wave number $k = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Ra}_{\text{cr}} = \frac{(2k^2 + n^2\pi^2)^3 + n^2\pi^2\text{Ta}}{2k^2} = 2 \left[\left(\frac{1}{2} + n^2 \right)^3 \pi^4 + n^2\text{Ta} \right].$$

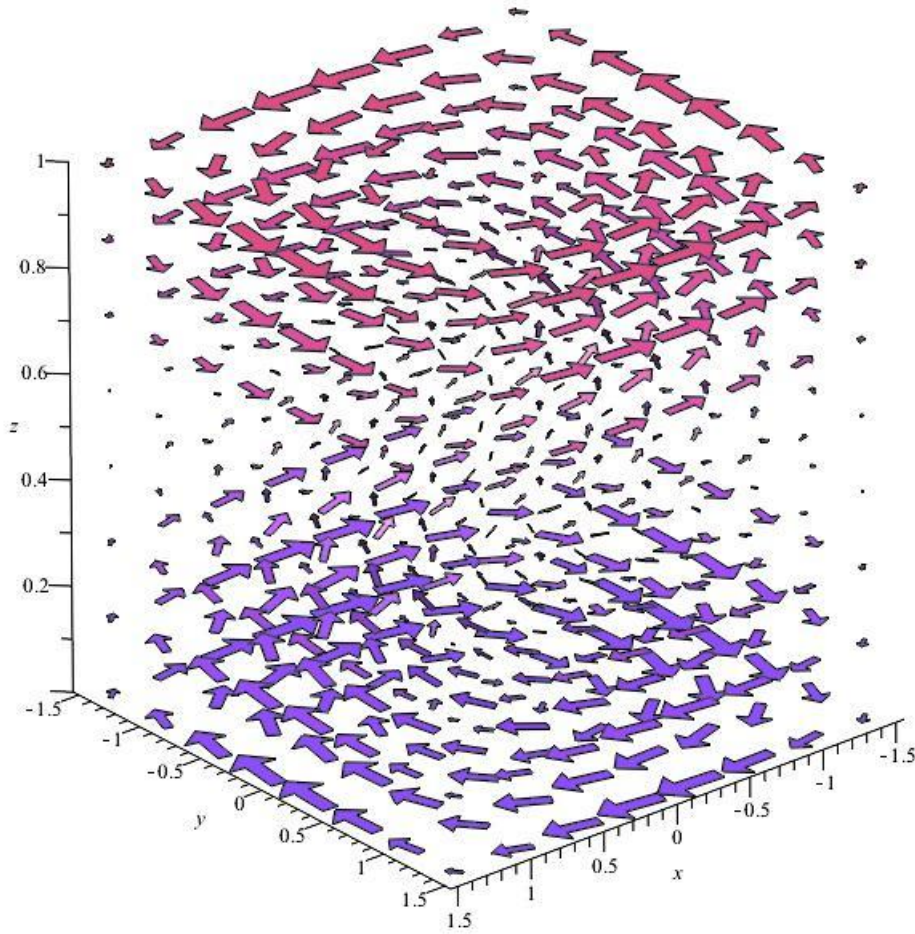


Fig 1. Spiral structure of vortex motion.

Under a condition $n = 1$ let's receive

$$2 \left(\frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \right)^2 = \frac{2 \left(\frac{UL}{v} \right)^2}{\left(\frac{U}{2\omega_{0z}L} \right)^2} = \frac{8\omega_{0z}^2 L^4}{v^2}.$$

From here it is visible that for scales $L \ll \left(\frac{v^2}{8\omega_{0z}^2} \right)^{1/4}$ we receive known result from the theory of Rayleigh.

Let's return to system of the equations (17) – (21). From the equation (21) let's find expression for a velocity divergence

$$D = -\frac{\partial w}{\partial z} = -n\pi W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z).$$

From the equation (20) let's find expression for a temperature perturbations

$$\theta = \frac{1}{(2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \sin(n\pi z).$$

From the equation (19) let's find expression for a pressure perturbations

$$p' = \frac{W_0}{n\pi} \left[\frac{1}{\text{Re}} (2k^2 + n^2\pi^2) - \frac{\text{Ri}}{2k^2 + n^2\pi^2} \right] \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) -$$

$$- \frac{W_0}{n\pi \text{Ro}_H} \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \sin kx \cdot \cos ky - \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\cos kx \cdot \sin ky}{2k^2 (2k^2 + n^2\pi^2)} \right) \sin(n\pi z).$$

From the equation (18) let's find expression for a vortex

$$\Omega = -\frac{W_0}{n\pi} \frac{\text{Ro}_L}{\text{Re}} \left\{ (2k^2 + n^2\pi^2)^2 - \text{Ra} \frac{2k^2}{2k^2 + n^2\pi^2} \right\} \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) -$$

$$- W_0 \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \frac{1}{n\pi (2k^2 + n^2\pi^2)} \cos kx \cdot \sin ky \cdot \sin(n\pi z).$$

Fig. 2 and Fig. 3 show fields of a vortex, temperatures and pressures at height $z = 0.5$ (characteristic for lower height) and $z = 1.5$ (Characteristic for top level).

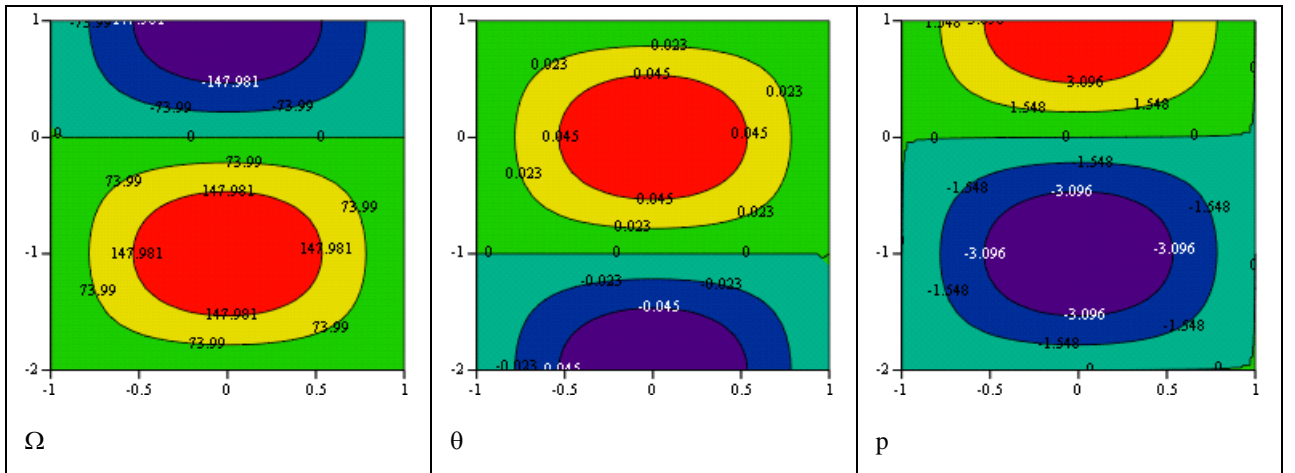


Fig. 2. Are figured fields of a vortex (Ω), temperatures (θ) and pressures (p') at height ($z = 0.5$), on a low level.

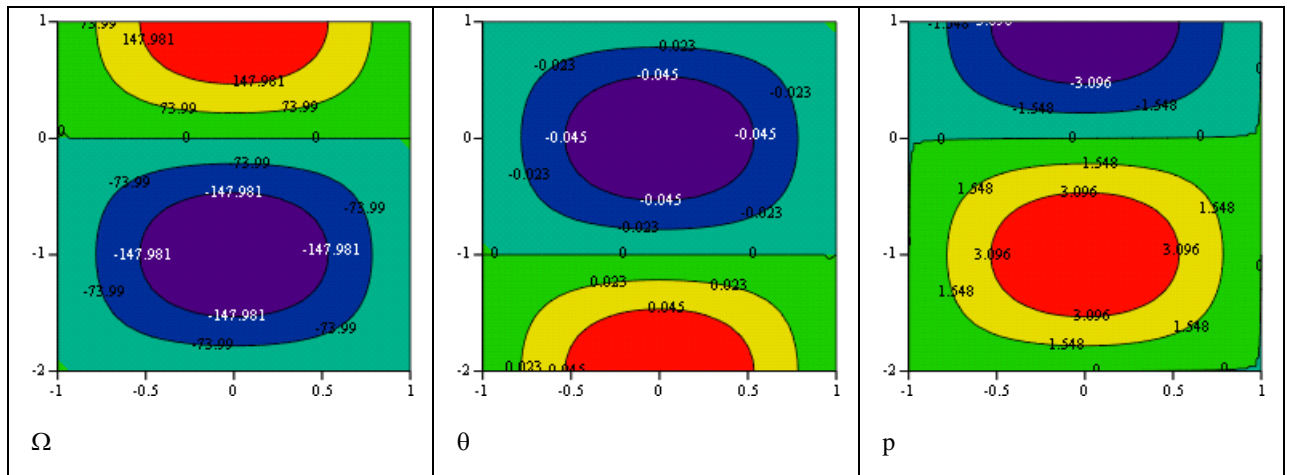


Fig 3. The same as in drawing 2, but at high level ($z = 1.5$).

From Fig. 2 and 3, we see that if the motion field in lower level has cyclonic vortex, that movement field at top level has anticyclonic vortex. Lower level corresponds to low pressure in the center, and top level – higher to pressure in the center.

Conclusion

Let's formulate the basic results and conclusions of dissertational work:

1. The mathematical model of a stationary three-dimensional atmospheric vortex taking into account dependence of density of air on overheat function is developed.
2. Expression for critical number of Rayleigh characterising the vortex state of atmosphere is gained.
3. It is shown that while the air particle in the bottom level on a spiral converges to center, air rises upwards, being in a labile state. After the air particle reaches some level, the air particle starts to disperse on a spiral. From the gained Fig. it is visible that the motion of an air particle accepts three-dimensional spiral structure.

4. It is established that if horizontal air motion is converging in the bottom layers of atmosphere the vortex has cyclonic character in the bottom layers of atmosphere, thus the center of a cyclonic vortex has low pressure.
5. It is shown that the center of a cyclonic whirlwind is the warm center.
6. It is established that if the motion field in lower level has a cyclonic vortex, that movement field at top level has an anticyclonic vortex. Lower level corresponds to low pressure in the center, and top level – higher to pressure in the center.

Recommendations and prospects of the further working out of a theme of research. Results of work can be used in practice of forecasting of a condition of large-scale atmospheric circulation.

The list of works,

Published by the author on a dissertation theme

1. Alaa Al-Saedi Hussain, Semenova Yu.A., Postelnaya A.Ye. Three-dimensional vortex structure of a wind as the basic state of atmosphere // Conference materials NCFU, Stavropol, 2016.

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Институт математики и естественных наук
Кафедра общей и теоретической физики**

Утверждена распоряжением по институту
от 04.09.2015 г. № 76 - С

Допущена к защите
«20» июня 2016 г.
зав. кафедрой общей и
теоретической физики,
д. ф.-м. н., профессор
Диканский Ю.И.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**ТРЕХМЕРНАЯ ВИХРЕВАЯ СТРУКТУРА ВЕТРА КАК ОСНОВНОЕ
СОСТОЯНИЕ АТМОСФЕРЫ**

Рецензенты:
Хучунаев Бузигит Муссаевич
д. ф.-м. н.,
заведующий лабораторией
микрофизики облаков
Высокогорного геофизического
института

Выполнил:
Аль-Саеди Алаа Хуссейн
студент 2 курса,
группы Физ-м-о-14-2
направления 03.04.02 «Физика»
очной формы обучения

Нормоконтролер:
Волкова В.И.
к. ф.-м. н., доцент

Руководитель:
Закиян Р.Г.
д. ф.-м. н., доцент, профессор
кафедры

Дата защиты
«23» июня 2016 г.

Оценка _____

Ставрополь, 2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ АТМОСФЕРЫ	8
1.1. Уравнения статики атмосферы	10
1.2. Геоострофическое состояния атмосферы	10
1.3. Экмановское состояние атмосферы	26
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО АТМОСФЕРНОГО ВИХРЯ	45
2.1. Система уравнений, описывающая трехмерный атмосферный вихрь	45
2.2. Решения системы уравнений, описывающей трехмерный атмосферный вихрь	51
2.3. Критерии устойчивости атмосферы	56
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	63
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	64

ВВЕДЕНИЕ

Движение воздушных масс в атмосфере носит сложный, меняющийся с течением времени характер [1, 5, 52, 54, 58, 58, 110]. Но, несмотря на сложный характер движения, основные особенности этих движений из года в год повторяются, то есть носят сезонный характер [5, 44, 52, 53, 102]. В этом и заключается сложность процедуры прогноза состояния атмосферы. Для анализа движения воздушных масс в атмосфере Земли их классифицируют по масштабу, охватываемому тем или иным движением. В частности, рассматривают общую циркуляцию атмосферы, под которой понимают совокупность воздушных течений такой горизонтальной протяженности, которая сравнима с размерами материков и океанов [78, 88]. К общей циркуляции атмосферы относят следующие системы воздушных потоков: западный перенос в умеренных широтах обоих полушарий, пассатные ветры субтропиков, муссоны, струйные течения, системы движения в планетарных волнах, циклонах или антициклонах [10, 37, 44, 71, 72, 76, 77, 78, 84, 104, 105]. Но, несмотря на указанную определенную структуру глобальной атмосферной циркуляции, в чистом виде она не реализуется, а проявляется в виде сложной внешне хаотической системы воздушных потоков. Поэтому разработка теорий, позволяющих понять общую закономерность развития крупномасштабной циркуляции, остается актуальной задачей физики атмосферы.

Именно этим объясняется тот факт, что наряду с традиционными для метеорологии статистическими методами анализа общей циркуляции атмосферы широкое развитие получили методы математического моделирования общей циркуляции атмосферы, также как процессов и явлений меньшего масштаба [96, 98, 107]. Такой подход к анализу крупномасштабной циркуляции позволяет понять физику этих процессов, механизм их формирования и динамику развития. Основу этих методов составляют уравнения движения воздуха, уравнение неразрывности, а также

уравнения переноса лучистой энергии, тепла и влаги в атмосфере [19, 25, 35, 37, 38, 70, 127]. При анализе атмосферных явлений обращаются к некоторым модельным представлениям, являющимся идеализацией реальных процессов. Для этого при анализе уравнений динамики атмосферы, ввиду их математической сложности, делаются допущения, которые позволяют отразить основные особенности исследуемого явления, упростить задачу и решить ее аналитически или численно [25, 62, 70, 122]. Однако, принимая те или иные допущения, необходимо помнить о границах их применимости, круг задач, к которым эти допущения применимы. Одним из таких модельных представлений о динамике атмосферы является вихревой характер крупномасштабной атмосферной циркуляции.

Актуальность проблемы. Работа посвящена исследованию вопросов устойчивости атмосферной циркуляции. Несмотря на то, что к настоящему времени имеется достаточно большое число экспериментальных и теоретических работ, посвященных изучению атмосферной циркуляции, многие проблемы остаются открытыми. В атмосфере наблюдается исключительно большое разнообразие волновых и вихревых движений, механизм формирования и динамика развития которых не в полной мере ясны. Поэтому разработка математической модели вихревых движений в атмосфере с учетом бароклинности являются актуальными проблемами физики атмосферы.

В настоящее время для описания динамики атмосферы используется представление об основных её состояниях:

- статика атмосферы;
- геострофическое состояние атмосферы;
- экмановское состояние атмосферы.

В указанных двух последних основных состояниях пренебрегается вертикальная скорость воздуха. Другими словами, эти модели атмосферы являются двумерными. Даже спираль Экмана, несмотря на то, что она представляет собой поворот геострофического ветра с высотой, не является описанием трехмерного вихря. Поэтому представляется актуальным разработать математическую модель атмосферы, описывающую трехмерный вихрь в качестве основного её состояния.

Таким образом, целью работы является построение математической модели трехмерного атмосферного вихря.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

- провести аналитический обзор математических моделей, описывающих геострофическое и экмановское состояния атмосферы;
- получить систему уравнений, описывающих трехмерное вихревое движение в атмосфере;
- найти решение полученной системы уравнений;
- определить критерии устойчивости атмосферы.

Объектом исследования является атмосферная циркуляция воздуха.

Предметом исследования является математическая модель трехмерного атмосферного вихря.

Научная новизна диссертации:

1. Разработана математическая модель стационарного трехмерного атмосферного вихря с учетом зависимости плотности воздуха от функции перегрева.
2. Получено выражение для критического числа Рэлея, характеризующего вихревое состояние атмосферы.
3. Показано, что в то время как воздушная частица в нижнем уровне по

спирали сходятся к центру, воздух поднимается вверх, находясь в неустойчивом состоянии. После того, как воздушная частица достигает некоторого уровня, воздушная частица начинает по спирали расходиться. Из построенного графика видно, что движение воздушной частицы принимает трехмерную спиральную структуру.

4. Установлено, что, если горизонтальное воздушное движение является сходящимся в нижних слоях атмосферы, то вихрь имеет циклоническую завихренность в нижних слоях атмосферы, при этом центр циклонического вихря имеет низкое давление.
5. Показано, что центр циклонического вихря является нагретым центром.
6. Установлено, что если поле движения в более низком уровне имеет циклоническую завихренность, то поле движения на верхнем уровне имеет антициклоническая завихренность. Более низкий уровень соответствует низкому давлению в центре, а верхний уровень – более высокий давлению в центре.

Научная и практическая значимость. Результаты, полученные в работе, уточняют существующие представления о физике и динамике циркуляции воздуха в атмосфере и могут быть использованы в практике прогнозирования параметров атмосферной циркуляции.

Положения, выносимые на защиту:

1. Критерии возникновения трехмерного атмосферного вихря.
2. Установленные закономерности распределения параметров трехмерного атмосферного вихря.

Публикации. По материалам диссертации опубликована 1 научная статья.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 60

наименований. Материал диссертации содержит 90 страниц, включая 24 рисунка.

Во введении обоснована актуальность разрабатываемой темы, сформулирована цель работы, решаемые задачи, объект и предмет исследования, научная новизна и основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе проведен аналитический обзор существующих математических методов анализа устойчивости циркуляции воздуха в атмосфере. Особое внимание уделено анализу уравнений динамики атмосферы в различных приближениях. Глава закончена анализом литературного обзора и выделением актуальных проблем, требующих решения.

Во второй главе разработана математическая модель трехмерного атмосферного вихря. Получено его решение и проведен анализ полученного решения.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Личный вклад соискателя

Автором лично проведен аналитический обзор существующих математических моделей циркуляции атмосферы. Автор принимал активное участие в разработке математической модели трехмерного атмосферного вихря.

Основные выводы и положения диссертационной работы сформулированы лично автором.

ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ АТМОСФЕРЫ

1.1. Уравнения статики атмосферы

Запишем уравнение динамики атмосферы в векторном виде (рис. 1.2.4):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g}_0 - \frac{1}{\rho_1} \nabla p + 2[\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_0] + \omega_0^2 \mathbf{R} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.1.1)$$

где \mathbf{g}_0 – ускорение силы тяготения; ∇p – градиент давления; $2[\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_0]$ – кориолисово ускорение; $\omega_0^2 \mathbf{R}$ – центробежное ускорение, $\mathbf{f}_{\text{тр}} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$ – удельная сила вязкого трения.

В состоянии статики атмосферы, когда $\mathbf{v} = 0$, уравнение запишется в виде

$$0 = \mathbf{g}_0 - \frac{1}{\rho_e} \nabla \bar{p} + \omega_0^2 \mathbf{R}. \quad (1.1.2)$$

Удобнее ввести вектор ускорения силы тяжести (ускорение свободного падения), равный векторной сумме ускорения силы тяготения \mathbf{g}_0 и центробежного ускорения:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \omega_0^2 \mathbf{R}. \quad (1.1.3)$$

Таким образом, геоидальная поверхность Земли перпендикулярна ускорению силы тяжести \mathbf{g} .

Тогда уравнение статики атмосферы запишется в виде

$$0 = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_e} \nabla \bar{p}. \quad (1.1.4)$$

Возьмем проекции уравнения статики атмосферы на оси координат (рис. 1.1.1):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho_e g. \quad (1.1.5)$$

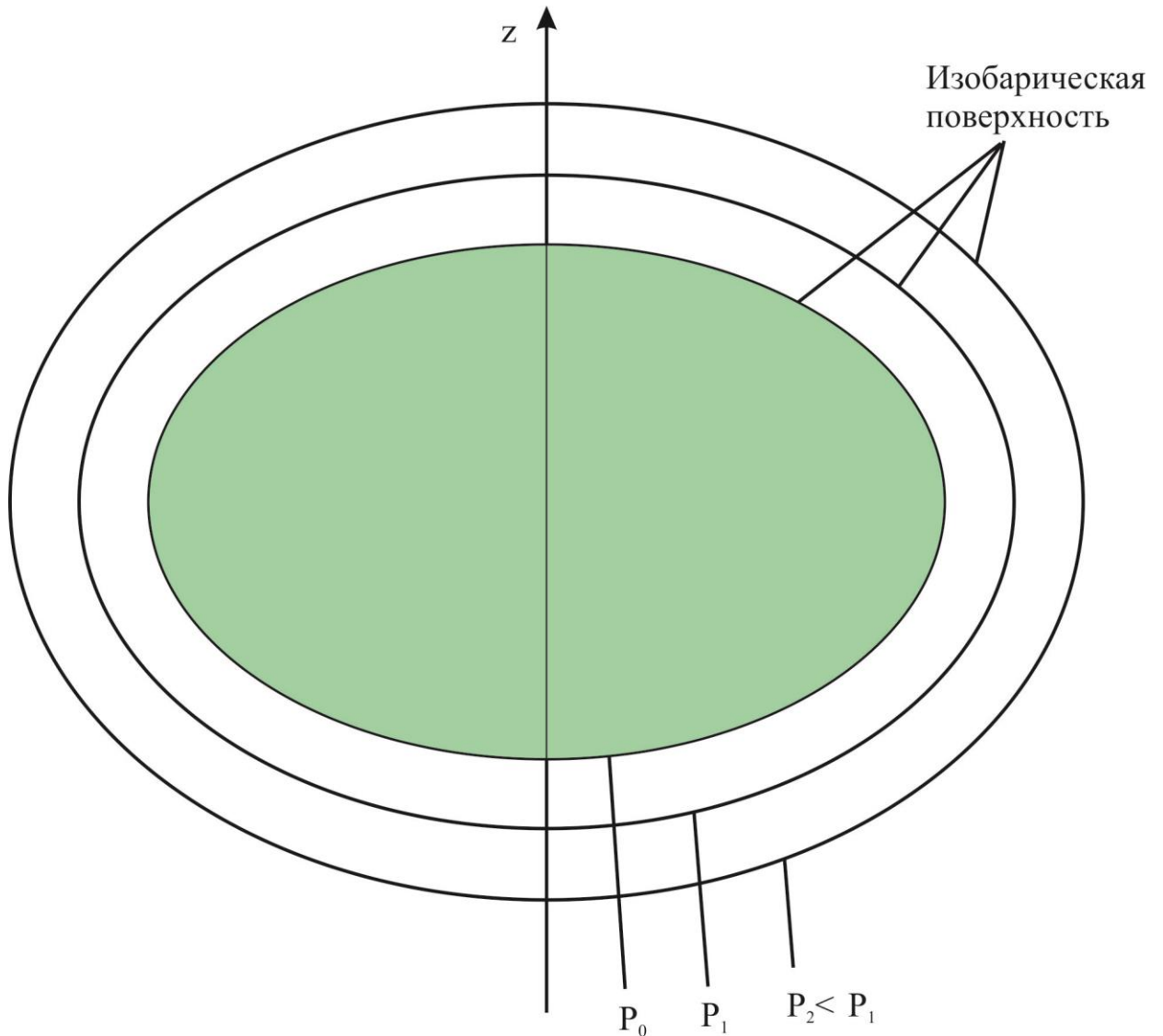


Рисунок 1.1.1. Изобарические поверхности в состоянии статики атмосферы

Отсюда следует, что в состоянии статики изобарические поверхности перпендикулярны вектору ускорения свободного падения, то есть параллельны геоидальной поверхности Земли.

Далее будем считать, что

$$\frac{\partial(\rho_e T_e)}{\partial x} = \rho_e \frac{\partial T_e}{\partial x} + T_e \frac{\partial \rho_e}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(\rho_e T_e)}{\partial y} = \rho_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + T_e \frac{\partial \rho_e}{\partial y} = 0, \quad -\frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial y} = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y}. \quad (1.1.6)$$

1.2. Описание геострофического состояния атмосферы с учетом геоидальной формы Земли

При установившемся движении $d\mathbf{v}/dt = 0$ изобарические поверхности, имеющие геоидальную форму, возмущаются, поэтому давление можно представить в виде

$$p = \bar{p} + p_s. \quad (1.1.7)$$

Поэтому уравнение установившегося движения в отсутствии трения $\mathbf{f}_{\text{тр}} = 0$ запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{g}_0 - \frac{1}{\rho_i} \nabla(\bar{p} + p_s) + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0] + \omega_0^2 \mathbf{R} = \\ &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_i} \nabla \bar{p} - \frac{1}{\rho_i} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0]. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

С учетом уравнения статики атмосферы запишем

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{g} - \frac{\rho_e}{\rho_i} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0], \\ 0 &= \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_i}\right) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0]. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Из уравнения состояния сухого воздуха при условии $p_i = p_e$

$$\rho_i R_d T_i = \rho_e R_d T_e,$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_i} = \frac{T_i}{T_e}. \quad (1.1.10)$$

Поэтому

$$0 = \left(1 - \frac{T_i}{T_e}\right) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0]. \quad (1.1.11)$$

Введем функцию перегрева

$$\Delta T = T_i - T_e. \quad (1.1.12)$$

Тогда запишем

$$0 = -\frac{\Delta T}{T_e} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0]. \quad (1.1.13)$$

Для условий атмосферы удовлетворительным является приближение

$$\frac{1}{T_e} \cong \frac{1}{\overline{T_e}} \cong \frac{1}{T_0} = \alpha.$$

Тогда

$$0 = -\alpha \Delta T \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0]. \quad (1.1.14)$$

Отсюда вектор скорости геострофического ветра равен

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0] &= \frac{1}{2} \alpha \Delta T \mathbf{g} + \frac{1}{2\rho_e} \nabla p_s, \\ [\mathbf{v}, \mathbf{k}_0] &= \frac{1}{2\omega_0} \left(\alpha \Delta T \mathbf{g} + \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s \right), \\ [[\mathbf{v}, \mathbf{k}_0], \mathbf{k}] &= \frac{1}{2\omega_0} \left[\left(\alpha \Delta T \mathbf{g} + \frac{1}{\rho_e} \nabla p_s \right), \mathbf{k} \right], \\ [[\mathbf{v}, \mathbf{k}_0], \mathbf{k}] &= \left[\frac{1}{2\omega_0 \rho_e} \nabla p_s, \mathbf{k} \right], \\ -[[\mathbf{k}_0, \mathbf{v}], \mathbf{k}] &= \left[\frac{1}{2\omega_0 \rho_e} \nabla p_s, \mathbf{k} \right], \\ [\mathbf{k}, [\mathbf{k}_0, \mathbf{v}]] &= \left[\frac{1}{2\omega_0 \rho_e} \nabla p_s, \mathbf{k} \right], \\ [\mathbf{k}, [\mathbf{k}_0, \mathbf{v}]] &= \mathbf{k}_0(\mathbf{k}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \left[\frac{1}{2\omega_0 \rho_e} \nabla p_s, \mathbf{k} \right], \\ -\mathbf{v}_g &= \left[\frac{1}{2\omega_0 \rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} \nabla p_s, \mathbf{k} \right], \\ \mathbf{v}_g &= \frac{1}{2\omega_0 \rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} [\mathbf{k}, \nabla p_s], \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

где \mathbf{k} – единичный вектор, направленный вертикально вверх по

направлению оси z , перпендикулярной геоидальной поверхности Земли; \mathbf{k}_0 – единичный вектор, направленный по направлению угловой скорости вращения Земли. Отсюда видно, что геострофический ветер перпендикулярен градиенту давления, а значит, направлен вдоль изобарической поверхности (рис. 1.1.2).

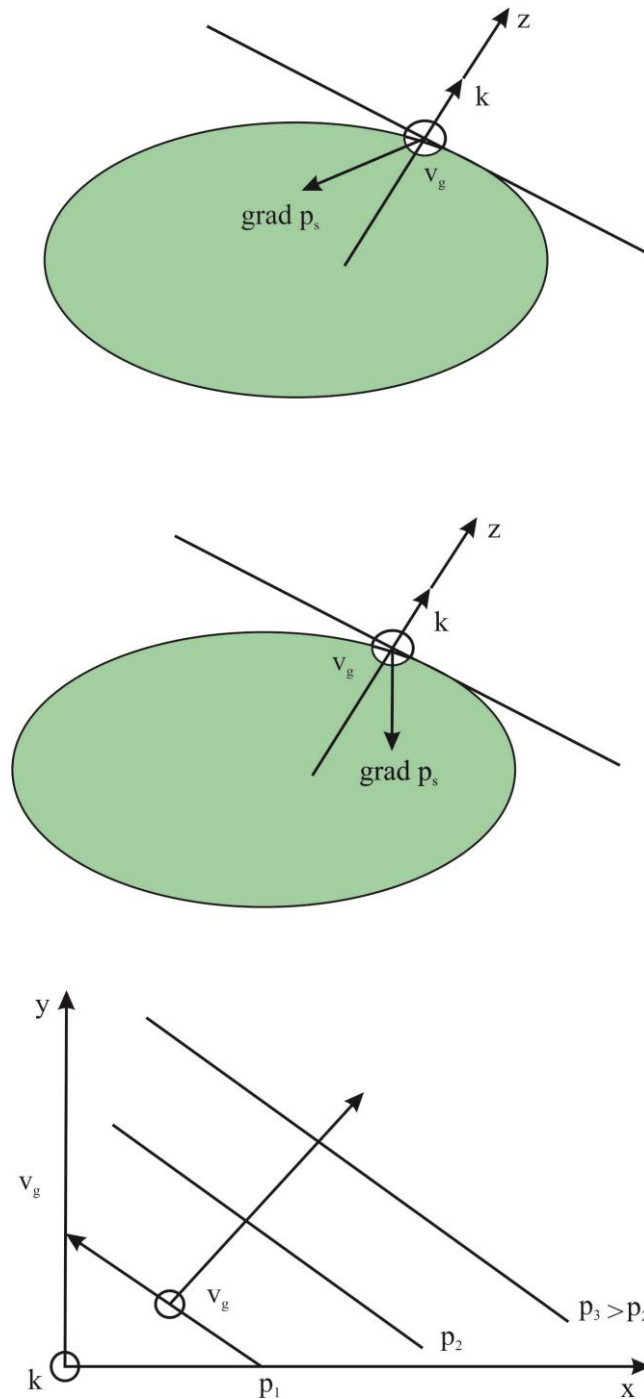


Рисунок 1.1.2. Направление геострофического ветра

Проекция угловой скорости вращения Земли определяются выражениями (1.1.2). Запишем проекции уравнения движения в стационарном состоянии в системе координат, в которой горизонтальная плоскость является касательной к геоиду:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial x} + 2v\omega_0 \sin \varphi - 2w\omega_0 \cos \varphi, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial y} - 2u\omega_0 \sin \varphi, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial z} + \alpha \Delta T g + 2u\omega_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Вертикальную скорость в геострофической модели атмосферы принимают равной нулю: $w = 0$. Аналогично, допустим пока, что $\frac{\partial p_s}{\partial z} = 0$. Тогда из системы (1.1.16) получаем горизонтальные проекции скорости геострофического ветра и уравнение статики атмосферы:

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial x}, \\ u_g &= -\frac{\alpha g}{2\omega_0 \cos \varphi} \Delta T. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Первые две формулы можно было получить непосредственно из выражения (1.1.15).

Рассматривая частный случай, при $-\partial p_s / \partial y > 0$, $\partial p_s / \partial x = 0$ вдоль оси y возмущение давления при установившемся движении будет падать в направлении от экватора к полюсу (в глобальном масштабе это наблюдается в атмосфере), геострофический ветер будет направлен с запада на восток, т.е. будет наблюдаться западный поток. Следовательно, направление геострофического ветра обосновывает преобладание западного переноса в атмосфере. Из (1.1.17) следует,

что для возникновения зонального западного переноса холодного воздуха ($\Delta T < 0$) градиент возмущения давления вдоль меридиана должен быть равен:

$$\left(-\frac{\partial p_s}{\partial y} \right)_{\text{кр}} = -\rho_e \alpha g \cdot \text{tg} \varphi \cdot \Delta T . \quad (1.1.18)$$

Если же $\frac{\partial p_s}{\partial z} \neq 0$, а $\Delta T = 0$, то из (1.1.16) получим выражение для

широтной проекции геострофического ветра

$$u_g = \frac{1}{2\omega_0 \rho_e \cos \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial z} . \quad (1.1.19)$$

Сравнивая это выражение с (1.1.17), получим

$$\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \cos \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial z} = -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} ,$$

$$\text{tg} \varphi \frac{\partial p_s}{\partial z} = -\frac{\partial p_s}{\partial y} ,$$

$$\frac{\partial p_s / \partial y}{\partial p_s / \partial z} = -\text{tg} \varphi ,$$

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_s = -\text{tg} \varphi . \quad (1.1.20)$$

Но с другой стороны,

$$\left(\frac{dz}{dy} \right)_s = \text{tg} \alpha_p , \quad (1.1.21)$$

где α_p – угол наклона касательной к изобарической поверхности с меридианом; $\alpha_s = 180^\circ - \alpha_p$ – угол наклона возмущенной изобарической поверхности p_s к меридиану. Сравнивая, получаем

$$\text{tg} \alpha_p = -\text{tg} \varphi = \text{tg}(180^\circ - \varphi), \quad \alpha_p = 180^\circ - \varphi, \quad \alpha_s = \varphi . \quad (1.1.22)$$

Отсюда следует, что при рассматриваемом установившемся состоянии

касательная к возмущенной изобарической поверхности на полюсе перпендикулярна меридиану, и параллельна ему на экваторе (рис. 1.1.2).

Полученные формулы для проекций геострофического ветра отличаются от известных выражений тем, что величина p_s есть отклонение от геопотенциальной поверхности, то есть ее возмущение.

Дивергенция, лапласиан и вихрь геострофического ветра.

Применяя уравнение неразрывности к геострофическому ветру, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} &= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) - \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\sin \varphi) - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) - \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\sin \varphi) \right\} = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \left[\frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right] + \frac{1}{\rho_e} \left[\frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\sin \varphi) - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\sin \varphi) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ -\frac{1}{\rho_e^2 \sin \varphi} \left(\frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \right) - \frac{\cos \varphi}{\rho_e \sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \right) + \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial p_s}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} = 0. \quad (1.1.23)
\end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (1.1.24)$$

то получим

$$\frac{\partial p_s}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} = 0. \quad (1.1.25)$$

Отсюда следует, что для геострофического режима атмосферы, необходимо выполнение следующего условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s / \partial x}{\partial p_s / \partial y} &= \frac{\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}}{\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}}, \\ \frac{\partial p_s / \partial x}{\partial p_s / \partial y} &= \frac{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial x}}{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} + \frac{\partial \ln \sin \varphi}{\partial y}}, \\ \frac{\partial p_s / \partial x}{\partial p_s / \partial y} &= \frac{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial x}}{\frac{\partial \ln(\rho_e \sin \varphi)}{\partial y}}, \\ \left(\frac{dy}{dx} \right)_g &= \frac{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial x}}{\frac{\partial \ln(\rho_e \sin \varphi)}{\partial y}}. \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

Следовательно, тангенс угла наклона касательной к изобаре по отношению к параллели определяется горизонтальными градиентами плотности воздуха по параллели и меридиану (рис. 1.1.3). Или, выразив плотность воздуха через температуру из уравнения состояния, получим

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_g = - \frac{\partial \ln T / \partial x}{\partial \ln \left(\frac{\sin \varphi}{T} \right) / \partial y}, \quad (1.1.27)$$

т.е. тангенс угла наклона к параллели касательной к изобарам (а значит и геострофической скорости) определяется горизонтальными градиентами

температуры вдоль параллели и меридиана. На экваторе изобары параллельны параллелям.

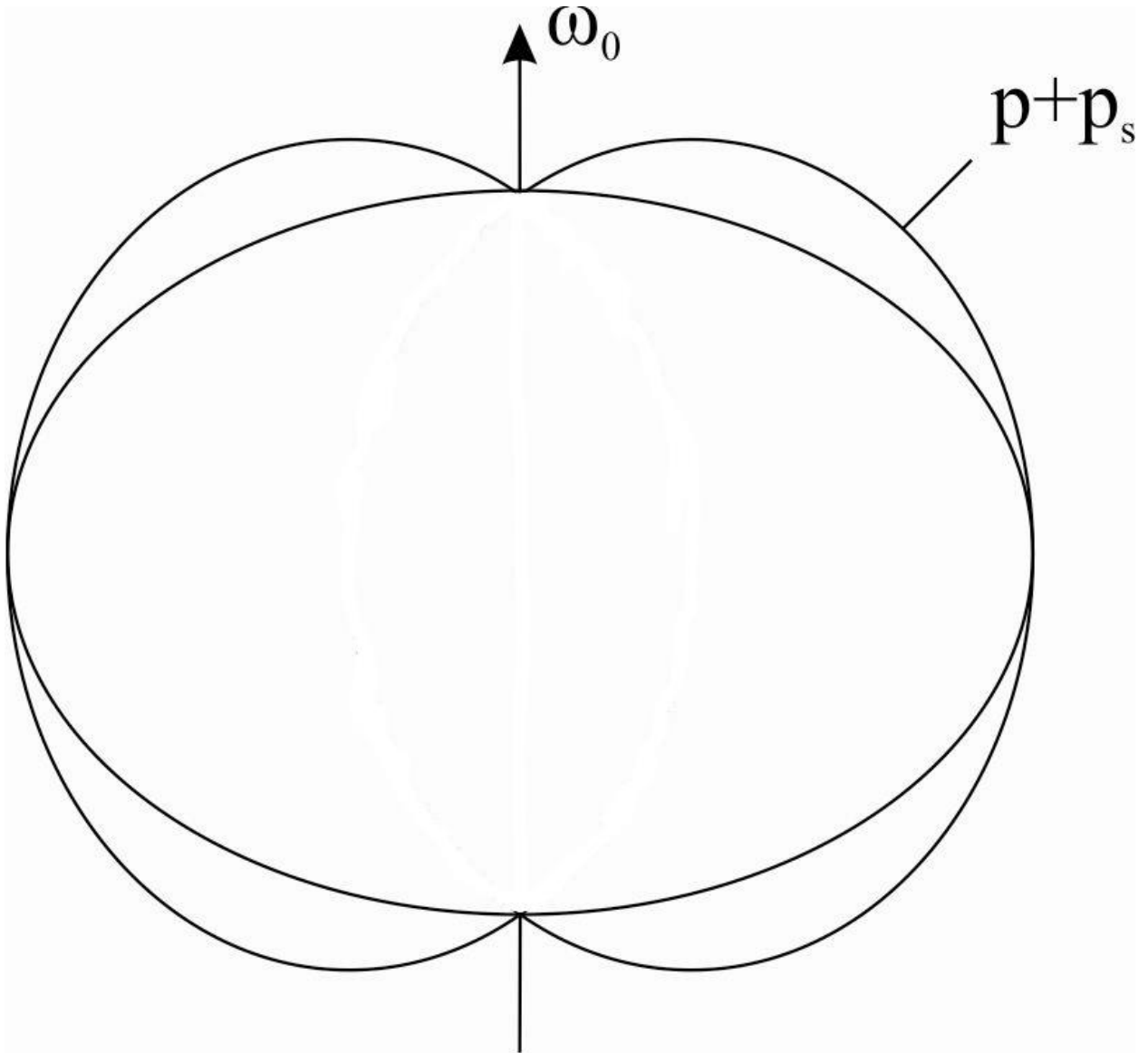


Рисунок 1.1.3. Возмущенная в изобарическая поверхность в геострофической модели атмосферы

Или найдем дивергенция геострофического ветра в векторном виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_g &= \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} [\mathbf{k}, \nabla p_s] \right) = \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} \operatorname{div} [\mathbf{k}, \nabla p_s] + \left(\nabla \frac{1}{\rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}, [\mathbf{k}, \nabla p_s] \right) \right), \\ \operatorname{div} [\mathbf{k}, \nabla p_s] &= (\nabla p_s, \operatorname{rot} \mathbf{k}) - (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \nabla p_s) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{rot } \mathbf{k} = 0, \text{ rot } \nabla p_s = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{v}_g = \frac{1}{2\omega_0} \left(\nabla \frac{1}{\rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)}, [\mathbf{k}, \nabla p_s] \right),$$

$$\nabla \frac{1}{\rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} = \frac{1}{(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} \nabla \frac{1}{\rho_e} + \frac{1}{\rho_e} \nabla \frac{1}{(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)},$$

$$\nabla \frac{1}{(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} = \nabla \frac{1}{\sin \varphi} = -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \nabla \varphi = -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j},$$

$$\nabla \frac{1}{\rho_e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)} = \frac{1}{\sin \varphi} \nabla \frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_e} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j},$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v}_g &= \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \nabla \frac{1}{\rho_e} - \frac{1}{\rho_e} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j}, [\mathbf{k}, \nabla p_s] \right) = \\ &= \frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left(\nabla \frac{1}{\rho_e}, [\mathbf{k}, \nabla p_s] \right) - \frac{\cos \varphi}{2\omega_0 \rho_e \sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\mathbf{j}, [\mathbf{k}, \nabla p_s]), \end{aligned}$$

$$[\mathbf{k}, \nabla p_s] = -\frac{\partial p_s}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \mathbf{j},$$

$$(\mathbf{j}, [\mathbf{k}, \nabla p_s]) = \frac{\partial p_s}{\partial x},$$

$$\left(\nabla \frac{1}{\rho_e}, [\mathbf{k}, \nabla p_s] \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p_s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p_s}{\partial x},$$

$$\text{div } \mathbf{v}_g = \frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) - \frac{\cos \varphi}{2\omega_0 \rho_e \sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p_s}{\partial x},$$

$$\text{div } \mathbf{v}_g = \frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) - \frac{\text{ctg } \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right\}. \quad (2.1.28)$$

Отсюда найдем условие равенства нулю дивергенции геострофического ветра:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) - \frac{\text{ctg } \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p_s}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s}{\partial y} &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p_s}{\partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial p_s / \partial y}{\partial p_s / \partial x} &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\
\frac{\partial p_s / \partial y}{\partial p_s / \partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right)}, \\
\left(\frac{dy}{dx} \right)_g &= \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right)}{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{-\frac{1}{\rho_e^2} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}}{-\frac{1}{\rho_e^2} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \\
&= \frac{\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}}{\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial x}}{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} + \frac{\partial \ln \sin \varphi}{\partial y}}, \\
\left(\frac{dy}{dx} \right)_g &= \frac{\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial x}}{\frac{\partial \ln \rho_e \sin \varphi}{\partial y}}. \tag{1.1.29}
\end{aligned}$$

Кроме того, как было выше указано, в геострофической модели предполагается, что сила вязкого трения обращается в нуль. Но так как при этом вязкость не может обращаться в нуль, потому что в противном случае наблюдалось бы проскальзывание атмосферы у поверхности земли, то отсюда следует, что лапласиан от геострофического ветра должен обращаться в нуль. Чтобы проверить это условие, найдем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_g}{\partial x} &= -\frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) - \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \right) \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right\}, \\
\frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right] \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \frac{\partial^2 p_s}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) \right\}. \quad (1.1.30)
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_g}{\partial y} &= \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \right\}, \\
\frac{\partial^2 v_g}{\partial y^2} &= \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} + \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \right\} = \quad (1.1.31) \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} + \\
&+ \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) + \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) = \\
&= \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} + \frac{2}{2\omega_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_g}{\partial y^2} = \\
& = -\frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2\omega_0 \sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) + \quad (1.1.32) \\
& + \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} + \frac{2}{2\omega_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) \frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2\omega_0} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда, приравняв к нулю коэффициенты при частных производных от p_s , получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\rho_e} \right) &= 0, & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) &= 0; \\
\frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} &= 0. \quad (1.1.33)
\end{aligned}$$

Из первого равенства следует, что плотность невозмущенной атмосферы можно представить в виде

$$\rho_e(x, y, z) = \rho_0(z) + \gamma_\rho x + \rho_{ey}(y, z). \quad (1.1.34)$$

Из второго равенства следует:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{(\rho_e \sin \varphi)^2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_e \sin \varphi) \right] = \\
& = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\sin \varphi \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \rho_e \frac{\partial \sin \varphi}{\partial y}}{(\rho_e \sin \varphi)^2} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\frac{\partial \rho_e}{\partial y}}{\rho_e^2 \sin \varphi} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\frac{\partial \sin \varphi}{\partial y}}{\rho_e \sin^2 \varphi} \right] = \\
& = -\frac{1}{\rho_e^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho_e}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e^2 \sin \varphi} \right) - \\
& - \frac{1}{\rho_e \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \sin \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \sin \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e \sin^2 \varphi} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho_e^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} - \frac{\partial \rho_e}{\partial y} \left(-\frac{2}{\rho_e^3 \sin \varphi} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} - \frac{\cos \varphi}{\rho_e^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \\
&- \frac{1}{\rho_e \sin^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\cos \varphi}{\rho_e^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \frac{2 \cos^2 \varphi}{\rho_e \sin^3 \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \\
&= -\frac{1}{\rho_e^2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_e^2 \sin \varphi} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} \left(\frac{2}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \\
&+ \frac{1}{\rho_e \sin \varphi} \left(1 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\cos \varphi}{\rho_e^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} = 0, \\
&\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{R_E \operatorname{tg} \varphi} \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} - \left(1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right) \frac{1}{R_E^2} = 0. \quad (1.1.35)
\end{aligned}$$

Если пренебречь третьим и четвертым слагаемым в этом уравнении, то получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} - \frac{2}{\rho_e} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right)^2 \cong 0, \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_e^2} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{\rho_e} \left[\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial y^2} - \frac{2}{\rho_e} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right)^2 = \rho_e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial y} \right)^2 = \rho_e \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \\
&\frac{\partial^2 \ln \rho_e}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (1.1.36)
\end{aligned}$$

Введем обозначение $\frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} = f$, тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial y} - f^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f^2, \quad \frac{\partial f}{f^2 \partial y} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{f} \right) = 1. \quad (1.1.37)$$

Отсюда

$$-\frac{1}{f} = y + F(x, z), \quad (1.1.38)$$

или

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{y + F(x)}, \quad \frac{\partial \ln \rho_e}{\partial y} = -\frac{1}{y + F(x)}, \\ \ln \rho_e &= -\ln(y + F(x, z)) + \ln C(x, z), \\ \rho_e - \rho_0(z) - \gamma_{\rho} x &= \frac{C(z)}{y + F(z)}, \\ \rho_e &= \rho_0(z) + \gamma_{\rho} x + \frac{C(z)}{y + F(z)}. \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial x} = 0 \quad (1.1.40)$$

следует, что

$$p_s = p_{sx}(x, z) + p_{sy}(y, z). \quad (1.1.41)$$

Найдем проекции **вихря геострофической скорости**

$$\begin{aligned} \Omega_{gx} &= \frac{\partial w_g}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p_s}{\partial x}, \\ \Omega_{gy} &= \frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\partial w_g}{\partial x} = \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p_s}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

Отсюда следует, что $\Omega_{gx} = \Omega_{gy} = 0$, т.е. вихрь геострофической скорости имеет только вертикальную составляющую при условии

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = f(z), \quad (1.1.43)$$

что вертикальный градиент возмущения давления является произвольной функцией высоты.

Найдем вертикальную проекцию вихря геострофического ветра:

$$\Omega_{gz} = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{2\omega_0 \rho_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\omega_0\rho_e \sin\varphi} \left(\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2\omega_0\rho_e} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial p_s}{\partial y} = \\
&= \frac{1}{2\omega_0\rho_e \sin\varphi} \nabla_{\perp}^2 p_s + \frac{1}{R_E \operatorname{tg}\varphi} u_g = \\
&= \frac{1}{2\omega_0\rho_e \sin\varphi} \nabla_{\perp}^2 p_s - \frac{1}{2\rho_e\omega_0 R_E \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y}. \tag{1.1.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_s / \partial y}{\partial p_s / \partial z} &= -\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{\partial p_s}{\partial y} = -\frac{\partial p_s}{\partial z} \operatorname{tg}\varphi, \\
\frac{\partial^2 p_s}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial z} \operatorname{tg}\varphi - \frac{\partial p_s}{\partial z} \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \\
&= -\frac{\partial^2 p_s}{\partial y \partial z} \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{R_E \cos^2\varphi} \frac{\partial p_s}{\partial z} \xrightarrow{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \infty.
\end{aligned}$$

При условии

$$\nabla_{\perp}^2 p_s = 0, \tag{1.1.45}$$

для вихря скорости геострофического ветра получим

$$\Omega_{gz} = \frac{1}{R_E \operatorname{tg}\varphi} u_g. \tag{1.1.46}$$

Отсюда следует, что на экваторе вихрь геострофического ветра принимает бесконечно большие значения, а полюсах равен нулю.

Таким образом, в данном разделе установлено, что:

– для возникновения зонального западного переноса холодного воздуха ($\Delta T < 0$) градиент возмущения давления вдоль меридиана должен быть больше некоторого критического значения, определяемого формулой (1.1.18). Из этой формулы следует, что градиент возмущения давления растет с увеличением широты места;

– если $\frac{\partial p_s}{\partial z} \neq 0$, а функция перегрева равна нулю $\Delta T = 0$, т.е.

распределение температуры вдоль поверхности Земли соответствует состоянию статики атмосферы, касательная к возмущенной изобарической

поверхности на полюсе перпендикулярна меридиану, и параллельна ему на экваторе, т.е. имеет «вид яблока»;

– из равенства нулю дивергенции геострофической скорости следует, что тангенс угла наклона к параллели касательной к изобарам (а значит и геострофической скорости) определяется горизонтальными градиентами температуры вдоль параллели и меридиана;

– при геострофическом состоянии атмосферы лапласиан геострофической скорости должен быть равен нулю;

– из равенства нулю лапласиана геострофической скорости следует, что плотность невозмущенной атмосферы изменяется с расстоянием вдоль параллели по линейному закону, а вдоль меридиана – обратно пропорционально расстоянию;

– вихрь геострофической скорости имеет только вертикальную составляющую при условии, что вертикальный градиент возмущения давления является произвольной функцией высоты.

1.3. Экмановское состояние атмосферы

Запишем уравнение динамики атмосферы для установившегося случая, но, в отличие от геострофического состояния, с учетом сил вязкого трения, в векторном виде:

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho_1} \nabla p + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_0] + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = 0. \quad (1.3.1)$$

Представим входящие в это уравнение величины в виде:

$$p = \bar{p} + p_s + p_e, \quad (1.3.2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_e. \quad (1.3.3)$$

Здесь индекс «e» обозначает вклад в возмущение, возникающее при экмановском состоянии атмосферы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_1} \nabla(\bar{p} + p_s + p_e) + 2[\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_e, \boldsymbol{\omega}_0] + \nu \nabla^2(\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_e) &= 0, \\ \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_1} \nabla \bar{p} - \frac{1}{\rho_1} \nabla p_s - \frac{1}{\rho_1} \nabla p_e + 2[\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}_0] + 2[\mathbf{v}_e, \boldsymbol{\omega}_0] + \nu \nabla^2(\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_e) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

С учетом уравнения статики

$$\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_1}\right) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_1} \nabla p_s + 2[\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}_0] - \frac{1}{\rho_1} \nabla p_e + 2[\mathbf{v}_e, \boldsymbol{\omega}_0] + \nu \nabla^2(\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_e) = 0. \quad (1.3.5)$$

С учетом геострофического состояния запишем

$$-\frac{1}{\rho_1} \nabla p_e + 2[\mathbf{v}_e, \boldsymbol{\omega}_0] + \nu \nabla^2(\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_e) = 0. \quad (1.3.6)$$

Примем, что при геострофическом состоянии атмосферы имеет место соотношение:

$$\nabla^2 \mathbf{v}_g = 0. \quad (1.3.7)$$

Тогда для экмановского состояния атмосферы получим

$$-\frac{1}{\rho_e} \nabla p_e + 2[\mathbf{v}_e, \boldsymbol{\omega}_0] + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_e = 0. \quad (1.3.8)$$

Запишем это уравнения в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + 2(v_e \omega_{0z} - w_e \omega_{0y}) + \nu \nabla^2 u_e &= 0, \\ -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} + 2(w_e \omega_{0x} - u_e \omega_{0z}) + \nu \nabla^2 v_e &= 0, \\ -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial z} + 2(u_e \omega_{0y} - v_e \omega_{0x}) + \nu \nabla^2 w_e &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

С учетом $\omega_{0x} = 0$ и принимая $w_e = 0$, получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + 2v_e \omega_{0z} + \nu \nabla^2 u_e &= 0, \\ -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} - 2u_e \omega_{0z} + \nu \nabla^2 v_e &= 0, \\ -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial z} + 2u_e \omega_{0y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Кроме того, допустим, что

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0, \quad (1.3.11)$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_e}{\partial y^2} = 0. \quad (1.3.12)$$

Тогда уравнения для экмановского состояния атмосферы запишутся в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + 2v_e \omega_{0z} + \nu \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} &= 0, \\ -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} - 2u_e \omega_{0z} + \nu \frac{\partial^2 v_e}{\partial z^2} &= 0, \\ -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_e}{\partial z} + 2u_e \omega_{0y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Умножим второе уравнение системы на мнимую единицу i , сложим с первым уравнением, получим

$$-\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) - 2i\omega_{0z} (u_e + iv_e) + \nu \frac{\partial^2 (u_e + iv_e)}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3.14)$$

Введем комплексную скорость $c = u + iv$. Тогда полученное уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \frac{2i\omega_{0z}}{\nu} c = \frac{1}{\nu\rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right). \quad (1.3.15)$$

Решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2} - \frac{2i\omega_{0z}}{\nu} c_0 = 0 \quad (1.3.16)$$

имеет вид

$$c_0 = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (1.3.17)$$

где $k = \sqrt{\frac{2i\omega_{0z}}{\nu}}$. Комплексную переменную $\xi = x + iy$ в полярных координатах

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, можно представить в тригонометрической форме

$$\xi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.3.18)$$

или с учетом формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$\xi = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.3.19)$$

Тогда мнимую единицу i можно представить в виде $\xi = 0 + i \cdot 1$ ($x = 0$, $y = 1$) с

модулем $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, отсюда

$$\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}. \quad (1.3.20)$$

Поэтому выражение для коэффициента k можно представить в виде

$k = \sqrt{\frac{\omega_0 z}{\nu}} (1+i) = (1+i)k_0$, где $k_0 = \sqrt{\frac{\omega_0 z}{\nu}}$. Тогда решение однородного уравнения можно представить в виде

$$c_0 = A_0 e^{(1+i)k_0 z} + B_0 e^{-(1+i)k_0 z}. \quad (1.3.21)$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$c_1(z) = A(z) e^{(1+i)k_0 z} + B(z) e^{-(1+i)k_0 z}. \quad (1,3,22)$$

Отсюда

$$c_1' = A' e^{(1+i)k_0 z} + A(1+i)k_0 e^{(1+i)k_0 z} + B' e^{-(1+i)k_0 z} - (1+i)k_0 B e^{-(1+i)k_0 z}. \quad (1.3.23)$$

Так как функции $A(z)$ и $B(z)$ произвольные, то на них можно наложить дополнительное условие

$$A' e^{(1+i)k_0 z} + B' e^{-(1+i)k_0 z} = 0. \quad (1.3.24)$$

Тогда

$$c_1' = A(1+i)k_0 e^{(1+i)k_0 z} - (1+i)k_0 B e^{-(1+i)k_0 z}. \quad (1.3.25)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_1'' &= A'(1+i)k_0 e^{(1+i)k_0 z} + A(1+i)^2 k_0^2 e^{(1+i)k_0 z} - (1+i)k_0 B' e^{-(1+i)k_0 z} + (1+i)^2 k_0^2 B e^{-(1+i)k_0 z} = \\ &= (1+i)k_0 \left(A' e^{(1+i)k_0 z} - B' e^{-(1+i)k_0 z} \right) + (1+i)^2 k_0^2 \left(A e^{(1+i)k_0 z} + B e^{-(1+i)k_0 z} \right). \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Подставляя полученное выражение в неоднородное уравнение, получим

$$c_1'' - 2ik_0^2 c_1 = \frac{1}{\nu \rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right), \quad (1.3.27)$$

$$\begin{aligned} &(1+i)k_0 \left(A' e^{(1+i)k_0 z} - B' e^{-(1+i)k_0 z} \right) + (1+i)^2 k_0^2 \left(A e^{(1+i)k_0 z} + B e^{-(1+i)k_0 z} \right) - \\ &- 2ik_0^2 \left(A e^{(1+i)k_0 z} + B e^{-(1+i)k_0 z} \right) = \frac{1}{\nu \rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Так как $(1+i)^2 = 2i$, то получаем

$$(1+i)k_0 \left(A' e^{(1+i)k_0 z} - B' e^{-(1+i)k_0 z} \right) = \frac{1}{\nu \rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right), \quad (1.3.29)$$

или

$$A'e^{(1+i)k_0z} - B'e^{-(1+i)k_0z} = \frac{1}{(1+i)\nu k_0\rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right). \quad (1.3.30)$$

Таким образом, для неизвестных функций $A(z)$ и $B(z)$ получим систему уравнений:

$$A'e^{(1+i)k_0z} + B'e^{-(1+i)k_0z} = 0, \quad (1.3.31)$$

$$A'e^{(1+i)k_0z} - B'e^{-(1+i)k_0z} = \frac{1}{(1+i)\nu k_0\rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right). \quad (1.3.32)$$

Определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{(1+i)k_0z} & e^{-(1+i)k_0z} \\ e^{(1+i)k_0z} & -e^{-(1+i)k_0z} \end{vmatrix} = -2. \quad (1.3.33)$$

Заменяя первый столбец столбцом свободных членов системы уравнений, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-(1+i)k_0z} \\ f(z) & -e^{-(1+i)k_0z} \end{vmatrix} = -e^{-(1+i)k_0z} f(z), \quad (1.3.34)$$

где для краткости введено обозначение $f(z) = \frac{1}{(1+i)\nu k_0\rho_e} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right)$.

Аналогично,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{(1+i)k_0z} & 0 \\ e^{(1+i)k_0z} & f(z) \end{vmatrix} = e^{(1+i)k_0z} f(z). \quad (1.3.35)$$

Следовательно, по формулам Крамера запишем решения системы уравнений:

$$A' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2} e^{-(1+i)k_0z} f(z), \quad (1.3.36)$$

$$B' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2} e^{(1+i)k_0z} f(z). \quad (1.3.37)$$

Отсюда

$$A(z) = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-(1+i)k_0 z'} f(z') dz', \quad (1.3.38)$$

$$B(z) = -\frac{1}{2} \int_0^z e^{(1+i)k_0 z'} f(z') dz'. \quad (1.3.39)$$

Поэтому частное решение неоднородного уравнения представится в виде

$$c_1(z) = \frac{1}{2} \int_0^z e^{(1+i)k_0(z-z')} f(z') dz' - \frac{1}{2} \int_0^z e^{-(1+i)k_0(z-z')} f(z') dz',$$

$$c_1(z) = \int_0^z \frac{e^{(1+i)k_0(z-z')} - e^{-(1+i)k_0(z-z')}}{2} f(z') dz'. \quad (1.3.40)$$

Или, подставляя выражение для $f(z)$, запишем

$$c_1(z) = \frac{1}{(1+i)\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \frac{e^{(1+i)k_0(z-z')} - e^{-(1+i)k_0(z-z')}}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz', \quad (1.3.41)$$

или

$$c_1(z) = \frac{1-i}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \frac{e^{(1+i)k_0(z-z')} - e^{-(1+i)k_0(z-z')}}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz'. \quad (1.3.42)$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} & \frac{e^{(1+i)k_0(z-z')} - e^{-(1+i)k_0(z-z')}}{2} = \frac{e^{k_0(z-z')} e^{ik_0(z-z')} - e^{-k_0(z-z')} e^{-ik_0(z-z')}}{2} = \\ & = \frac{e^{k_0(z-z')} (\cos k_0(z-z') + i \sin k_0(z-z')) - e^{-k_0(z-z')} (\cos k_0(z-z') - i \sin k_0(z-z'))}{2} = \\ & = \frac{\left[e^{k_0(z-z')} - e^{-k_0(z-z')} \right] \cos k_0(z-z') + i \left[e^{k_0(z-z')} + e^{-k_0(z-z')} \right] \sin k_0(z-z')}{2} = \\ & = \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') + i \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z'). \quad (2.3.43) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для комплексной скорости, получим

$$c_1(z) = \frac{1-i}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') + i \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \right] \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz' =$$

$$c_1(z) = \frac{1-i}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') + i \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \right] \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz' =$$

(1.3.44)

Преобразуем выражение

$$(1-i) \left[\operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') + i \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \right] =$$

$$= \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') + \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') +$$

$$+ i \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right]. \quad (1.3.45)$$

Тогда выражение для скорости можно представить в виде

$$c_1(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') + \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right] \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz' +$$

$$+ \frac{i}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right] \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz' =$$

$$= \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') + \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right] \left(\frac{\partial p_e}{\partial x} + i \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz' +$$

$$+ \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right] \left(i \frac{\partial p_e}{\partial x} - \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz' =$$

$$= \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') + \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right] \frac{\partial p_e}{\partial x} dz' +$$

$$- \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \right] \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z [\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') + \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z')] \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' + \\
& + \frac{i}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z [\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z')] \frac{\partial p_e}{\partial x} dz'. \quad (1.3.46)
\end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение для комплексной скорости с его представлением в виде

$$c_1(z) = u_{1e}(z) + i v_{1e}(z), \quad (1.3.47)$$

приходим к выражениям для компонент возмущения скорости в экмановской модели атмосферы

$$\begin{aligned}
u_{1e}(z) &= \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z [\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') + \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z')] \frac{\partial p_e}{\partial x} dz' - \\
& - \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z [\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z')] \frac{\partial p_e}{\partial y} dz', \quad (2.3.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{1e}(z) &= \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z [\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') + \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z')] \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' + \\
& + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z [\operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z')] \frac{\partial p_e}{\partial x} dz'. \quad (1.3.49)
\end{aligned}$$

Удобно ввести вронскиан

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{1}{k_0} \begin{vmatrix} \cos k_0(z-z') & \operatorname{ch} k_0(z-z') \\ \cos' k_0(z-z') & \operatorname{ch}' k_0(z-z') \end{vmatrix} = \\
& = \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') + \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z'), \quad (1.3.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{1}{k_0} \begin{vmatrix} \sin k_0(z-z') & \operatorname{sh} k_0(z-z') \\ \sin' k_0(z-z') & \operatorname{sh}' k_0(z-z') \end{vmatrix} = \\
& = \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') - \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z'). \quad (1.3.51)
\end{aligned}$$

Тогда выражения для компонент скорости можно будет записать в виде

$$u_{1e}(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left(W_1 \frac{\partial p_e}{\partial x} - W_2 \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) dz', \quad (1.3.52)$$

$$v_{1e}(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \int_0^z \left(W_1 \frac{\partial p_e}{\partial y} + W_2 \frac{\partial p_e}{\partial x} \right) dz'. \quad (1.3.53)$$

Представим решение однородного уравнения в виде

$$\begin{aligned} c_0 &= A_0 e^{(k_0 z + ik_0 z)} + B_0 e^{-(k_0 z + ik_0 z)} = \\ &= A_0 e^{k_0 z} e^{ik_0 z} + B_0 e^{-k_0 z} e^{-ik_0 z} = \\ &= A_0 e^{k_0 z} (\cos k_0 z + i \sin k_0 z) + B_0 e^{-k_0 z} (\cos k_0 z - i \sin k_0 z) = \\ &= A_0 e^{k_0 z} \cos k_0 z + i A_0 e^{k_0 z} \sin k_0 z + B_0 e^{-k_0 z} \cos k_0 z - i B_0 e^{-k_0 z} \sin k_0 z = \\ &= (A_0 e^{k_0 z} + B_0 e^{-k_0 z}) \cos k_0 z + i (A_0 e^{k_0 z} - B_0 e^{-k_0 z}) \sin k_0 z. \end{aligned} \quad (1.3.54)$$

Из условия, что у поверхности земли ветер равен нулю, найдем

$$A_0 + B_0 = 0, \quad B_0 = -A_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_0 &= A_0 (e^{k_0 z} - e^{-k_0 z}) \cos k_0 z + i A_0 (e^{k_0 z} + e^{-k_0 z}) \sin k_0 z = \\ &= 2A_0 \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z + 2i A_0 \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z. \end{aligned} \quad (1.3.55)$$

Отсюда решения однородного уравнения запишем в виде

$$u_{0e} = 2A_0 \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z, \quad (1.3.56)$$

$$v_{0e} = 2A_0 \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z. \quad (1.3.57)$$

Тогда решение искомого неоднородного уравнения представятся в виде

$$u_e(z) = 2A_0 \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 dz' \frac{\partial p_e}{\partial x} - \int_0^z W_2 dz' \frac{\partial p_e}{\partial y} \right), \quad (1.3.58)$$

$$v_e(z) = 2A_0 \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 dz' \frac{\partial p_e}{\partial y} + \int_0^z W_2 dz' \frac{\partial p_e}{\partial x} \right). \quad (1.3.59)$$

Константу A_0 найдем из условия, что при $z \rightarrow \infty$ скорость ветра стремится к

геострофическому значению, а значит $u_e(z) \rightarrow 0$, $v_e(z) \rightarrow 0$:

$$0 = 2A_0 \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 dz' \frac{\partial p_e}{\partial x} - \int_0^\infty W_2 dz' \frac{\partial p_e}{\partial y} \right). \quad (1.3.60)$$

Отсюда $A_0 = 0$, что очевидно, так как в противном случае скорость стремилась бы к бесконечности при $z \rightarrow \infty$. Следовательно

$$u_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p_e}{\partial x} dz' - \int_0^z W_2 \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' \right), \quad (1.3.61)$$

$$v_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' + \int_0^z W_2 \frac{\partial p_e}{\partial x} dz' \right). \quad (1.3.62)$$

Причем, функции $\frac{\partial p_e}{\partial x}$ и $\frac{\partial p_e}{\partial y}$ таковы, что

$$u_e(\infty) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p_e}{\partial x} dz' - \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' \right) = 0, \quad (1.3.63)$$

$$v_e(\infty) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p_e}{\partial y} dz' + \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p_e}{\partial x} dz' \right) = 0. \quad (1.3.64)$$

Представим проекции экмановского возмущения скоростей в виде

$$u_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 dz' \overline{\frac{\partial p_e}{\partial x}} - \int_0^z W_2 dz' \overline{\frac{\partial p_e}{\partial y}} \right), \quad (1.3.65)$$

$$v_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 dz' \overline{\frac{\partial p_e}{\partial y}} + \int_0^z W_2 dz' \overline{\frac{\partial p_e}{\partial x}} \right). \quad (1.3.66)$$

Найдем интеграл

$$\int_0^z W_2 dz' = \int_0^z \left[\operatorname{ch} k_0 (z - z') \sin k_0 (z - z') - \operatorname{sh} k_0 (z - z') \cos k_0 (z - z') \right] dz' =$$

$$= \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') dz' - \int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') dz'. \quad (1.3.67)$$

Найдем в отдельности каждый из интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') dz' &= - \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') d(z-z') = \\ &= \frac{1}{k_0} \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') d \cos k_0(z-z') = \\ &= \frac{1}{k_0} \operatorname{ch} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \int_0^z \cos k_0(z-z') \operatorname{sh} k_0(z-z') d(z-z') = \\ &= \frac{1}{k_0} \operatorname{ch} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \frac{1}{k_0} \int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') d \sin k_0(z-z') = \\ &= \frac{1}{k_0} \operatorname{ch} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \frac{1}{k_0} \operatorname{sh} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} + \\ &\quad + \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') d(z-z'). \end{aligned} \quad (1.3.68)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') dz' &= \\ &= \frac{1}{2k_0} \left[\operatorname{ch} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \operatorname{sh} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} \right] = \\ &= \frac{1}{2k_0} (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z + \operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z). \end{aligned} \quad (1.3.69)$$

Аналогично, находим второй интеграл

$$\begin{aligned}
\int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') dz' &= - \int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') d(z-z') = \\
&= - \frac{1}{k_0} \int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') d \sin k_0(z-z') = \\
&= - \frac{1}{k_0} \operatorname{sh} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} + \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') d(z-z') = \\
&= - \frac{1}{k_0} \operatorname{sh} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \frac{1}{k_0} \int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') d \cos k_0(z-z') = \\
&= - \frac{1}{k_0} \operatorname{sh} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \frac{1}{k_0} \operatorname{ch} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} + \\
&\quad + \int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') d(z-z'). \tag{1.3.70}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') dz' &= \\
&= - \frac{1}{2k_0} \operatorname{sh} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} - \frac{1}{2k_0} \operatorname{ch} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} = \\
&= \frac{1}{2k_0} (\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z + \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z - 1). \tag{1.3.71}
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^z \operatorname{ch} k_0(z-z') \sin k_0(z-z') dz' - \int_0^z \operatorname{sh} k_0(z-z') \cos k_0(z-z') dz' &= \\
&= \frac{1}{2k_0} (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z + \operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z) - \frac{1}{2k_0} (\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z + \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z - 1) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k_0} (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z). \quad (1.3.72)$$

Или

$$\begin{aligned} \int_0^z W_2 dz' &= \int_0^z [\operatorname{ch} k_0 (z - z') \sin k_0 (z - z') - \operatorname{sh} k_0 (z - z') \cos k_0 (z - z')] dz' = \\ &= \frac{1}{k_0} \int_0^z \frac{d}{dz'} (\operatorname{ch} k_0 (z - z') \cos k_0 (z - z')) dz' = \frac{1}{k_0} (\operatorname{ch} k_0 (z - z') \cos k_0 (z - z')) \Big|_{z'=0}^{z'=z} = \\ &= \frac{1}{k_0} (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z). \end{aligned} \quad (1.3.73)$$

Аналогично, находим

$$\begin{aligned} \int_0^z W_1 dz' &= \int_0^z [\operatorname{sh} k_0 (z - z') \cos k_0 (z - z') + \operatorname{ch} k_0 (z - z') \sin k_0 (z - z')] dz' = \\ &= -\frac{1}{k_0} \int_0^z \frac{d}{dz'} [\operatorname{sh} k_0 (z - z') \sin k_0 (z - z')] dz' = -\frac{1}{k_0} \operatorname{sh} k_0 (z - z') \sin k_0 (z - z') \Big|_{z'=0}^{z'=z} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z}{k_0}. \end{aligned} \quad (1.3.74)$$

Таким образом, окончательно для проекций возмущения скорости ветра в экмановской модели атмосферы запишем

$$u_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} \left(\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \overline{\frac{\partial p_e}{\partial x}} - (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \overline{\frac{\partial p_e}{\partial y}} \right), \quad (1.3.75)$$

$$v_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} \left(\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \overline{\frac{\partial p_e}{\partial y}} + (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \overline{\frac{\partial p_e}{\partial x}} \right). \quad (1.3.76)$$

В частности, если $\overline{\frac{\partial p_e}{\partial x}} = 0$, получим

$$u_e(z) = -\frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \overline{\frac{\partial p_e}{\partial y}}, \quad (1.3.77)$$

$$v_e(z) = \frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} \operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \overline{\frac{\partial p_e}{\partial y}}. \quad (1.3.78)$$

Повторив выкладки для полной скорости и полного давления, получим

$$u(z) = 2A_0 \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_0^z W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right), \quad (1.3.79)$$

$$v(z) = 2A_0 \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p}{\partial y} dz' + \int_0^z W_2 \frac{\partial p}{\partial x} dz' \right). \quad (1.3.80)$$

Так как на бесконечности полная скорость должна стремиться к геострофическому значению, запишем

$$u_g = 2A_0 \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right), \quad (1.3.81)$$

$$v_g = 2A_0 \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial y} dz' + \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial x} dz' \right). \quad (1.3.82)$$

Отсюда

$$u(z) = u_g - \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right) + \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_0^z W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right)$$

$$u(z) = u_g - \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_z^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_z^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right) \quad (1.3.83)$$

$$v(z) = v_g - \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_z^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial y} dz' + \int_z^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial x} dz' \right). \quad (1.3.84)$$

Так как скорость на земле равна нулю, то

$$u_g = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right) \quad (1.3.85)$$

$$v_g = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^\infty W_1 \frac{\partial p}{\partial y} dz' + \int_0^\infty W_2 \frac{\partial p}{\partial x} dz' \right). \quad (1.3.86)$$

Отсюда

$$u(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p}{\partial x} dz' - \int_0^z W_2 \frac{\partial p}{\partial y} dz' \right), \quad (1.3.87)$$

$$v(z) = \frac{1}{2\nu k_0 \rho_e} \left(\int_0^z W_1 \frac{\partial p}{\partial y} dz' + \int_0^z W_2 \frac{\partial p}{\partial x} dz' \right), \quad (1.3.88)$$

и

$$\frac{u(z)}{u_g} = \frac{\int_0^z \left(W_1 \frac{\partial p}{\partial x} - W_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) dz'}{\int_0^\infty \left(W_1 \frac{\partial p}{\partial x} - W_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) dz'} \quad (1.3.89)$$

$$\frac{v(z)}{v_g} = \frac{\int_0^z \left(W_1 \frac{\partial p}{\partial y} + W_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) dz'}{\int_0^\infty \left(W_1 \frac{\partial p}{\partial y} + W_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) dz'} \quad (1.3.90)$$

Приближенно выражения для полной скорости можно представить в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} \left(\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} - (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} \right), \quad (1.3.91)$$

$$v(z) = \frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} \left(\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} + (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} \right). \quad (1.3.92)$$

Если $\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} = 0$, то

$$u(z) = -\frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y}, \quad (1.3.93)$$

$$v(z) = \frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} \operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial y}. \quad (1.3.94)$$

Оценим высоту, на которой состояние атмосферы можно считать геострофическим. Так как

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_0\rho_e \sin\varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y}, \quad (1.3.95)$$

$$v_g = \frac{1}{2\omega_0\rho_e \sin\varphi} \frac{\partial p_s}{\partial x}. \quad (1.3.96)$$

Из сравнения этих выражений можно записать

$$-\frac{1}{2\nu k_0^2 \rho_e} (1 - \operatorname{ch}k_0 z \cos k_0 z) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \cong -\frac{1}{2\omega_0 \rho_e \sin\varphi} \frac{\partial p_s}{\partial y}, \quad (1.3.97)$$

$$1 - \frac{\nu k_0^2}{\omega_0 \sin\varphi} \cong \operatorname{ch}k_0 z, \quad (1.3.98)$$

$$\frac{e^{k_0 z}}{2} \cong \frac{1 + k_0 z}{2} \cong 1 - \frac{\nu k_0^2}{\omega_0 \sin\varphi}, \quad (2.3.99)$$

$$k_0 z \cong 1 - \frac{2\nu k_0^2}{\omega_0 \sin\varphi}, \quad (1.3.100)$$

$$z_* \cong \frac{1}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_{0z}}{\nu}}} = \sqrt{\frac{\nu}{\omega_{0z}}}, \quad (1.3.101)$$

При $\nu \sim 1 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $\omega_{0z} \sim 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$, получим $z_* \approx \sqrt{10^5} \text{ м} \approx 300 \text{ м}$.

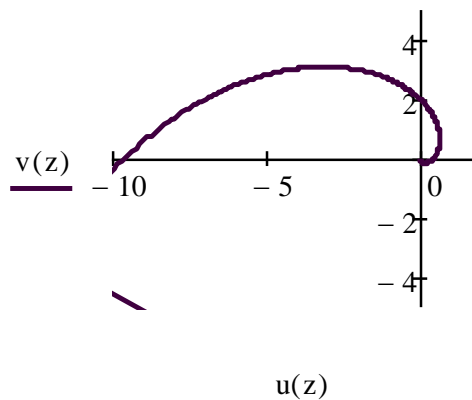


Рисунок 1.3.1. Распределение скорости ветра с высотой в экмановской модели атмосферы

Найдем тангенс угла наклона геострофического ветра по отношению к параллели

$$\operatorname{tg} \alpha(z) = \frac{v(z)}{u(z)} = \frac{\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} + (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x}}{\operatorname{sh} k_0 z \sin k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} - (1 - \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y}}, \quad (1.3.102)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} - (\operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z - \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x}}{(\operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} + (\operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z - \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y}} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} - (\operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z - \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x}}{(\operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z + \operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} + (\operatorname{sh} k_0 z \cos k_0 z - \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z) \frac{\overline{\partial p}}{\partial y}} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{ch} k_0 z \sin k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial p}}{\partial x}}{2 \operatorname{ch} k_0 z \cos k_0 z \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} + \frac{\overline{\partial p}}{\partial y}}. \quad (1.3.103)$$

Отсюда следует, что ветер у земли будет направлен вдоль изобар, а угол наклона к параллели зависит от значений горизонтальных градиентов давления по соответствующим осям x и y .

Таким образом, в данном разделе установлено, что:

- экмановское состояние атмосферы можно рассматривать как возмущение геострофического состояния, вносимое силами вязкого трения;
- возмущение геострофической скорости, названное нами экмановское возмущение скорости, зависит от градиентов возмущения давления;
- толщина экмановского слоя, в котором силы вязкого трения играют важную роль, зависит от коэффициента турбулентной вязкости и широты места;
- ветер у земли будет направлен вдоль изобар, а угол наклона к параллели зависит от значений горизонтальных градиентов давления по соответствующим осям x и y .

Выводы к главе 1

1. Для возникновения зонального западного переноса холодного воздуха ($\Delta T < 0$) градиент возмущения давления вдоль меридиана должен быть больше некоторого критического значения, определяемого формулой (1.1.18). Из этой формулы следует, что градиент возмущения давления растет с увеличением широты места.

2. Возмущенная относительно статического равновесия изобарическая поверхность при геострофическом состоянии атмосферы имеет форму «яблока».

3. Из равенства нулю дивергенции геострофической скорости следует, что тангенс угла наклона к параллели касательной к изобарам (а значит и геострофической скорости) определяется горизонтальными градиентами температуры вдоль параллели и меридиана.

4. При геострофическом состоянии атмосферы лапласиан геострофической скорости должен быть равен нулю.

5. Из равенства нулю лапласиана геострофической скорости следует, что плотность невозмущенной атмосферы изменяется с расстоянием вдоль параллели по линейному закону, а вдоль меридиана – обратно пропорционально расстоянию.

6. Вихрь геострофической скорости имеет только вертикальную составляющую при условии, что вертикальный градиент возмущения давления является произвольной функцией высоты.

7. Все последующие геопотенциальные поверхности разной высоты параллельны друг другу.

8. Геострофическое состояние атмосферы определяется условиями (1.1.17) и (1.1.21), т.е. радиальная составляющая геострофической скорости намного меньше меридианальной и широтной составляющих, которые, в свою очередь, намного меньше скорости движения точек поверхности Земли.

9. Геострофическое состояние атмосферы описывается системой уравнений (1.1.22) – (1.1.24), записанных в сферических координатах.

10. В сферической системе координат проекции геострофического ветра с достаточной в геофизической гидродинамике точностью можно определять по формулам (1.1.28) – (1.1.30).

14. Экмановское состояние атмосферы можно рассматривать как возмущение геострофического состояния, вносимое силами вязкого трения.

15. Возмущение геострофической скорости, названное нами экмановское возмущение скорости, зависит от градиентов возмущения давления.

16. Толщина экмановского слоя, в котором силы вязкого трения играют важную роль, зависит от коэффициента турбулентной вязкости и широты места.

17. Ветер у земли будет направлен вдоль изобар, а угол наклона к параллели зависит от значений горизонтальных градиентов давления по соответствующим осям x и y .

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО АТМОСФЕРНОГО ВИХРЯ

В главе выводятся дифференциальные уравнения в частных производных, удовлетворяющие основному состоянию трехмерного вихревого движения атмосферы. Показано, что существуют такие основные состояния атмосферы, когда сходимость низкого давления ведет к восходящему движению, а дивергенция высокого давления приводит к нисходящему потоку в вихревом движении (смерч). Эти основные состояния поля трехмерной скорости могут быть описаны с помощью разложения скорости конвекции через функции тока и потенциала, которые и описывают спиральные структуры этого движения. Когда $Re \rightarrow \infty$, вихревое движение вырождается в геострофический ветер, и соответствующее состояние вихревого движения заменяется геострофическим состоянием.

2.1. Система уравнений, описывающая трехмерный атмосферный вихрь

В локальной системе координат (x, y, z) состояние атмосферы описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \nu \nabla^2 u + 2\omega_{0z} v - 2\omega_{0y} w, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \nabla^2 v - 2\omega_{0z} u, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - g + \nu \nabla^2 w + 2\omega_{0y} u, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \Delta T = \kappa \nabla^2 \Delta T, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1.5)$$

Здесь

$$\Delta T = T_i - T_e.$$

Уравнение статики:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) - g = 0.$$

Представим параметры атмосферы в виде:

$$p = \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t), \quad \Delta T = \overline{\Delta T}(z) + \theta(x, y, z, t),$$

$$\overline{\Delta T} = \Delta_0 T - \Delta \gamma \cdot z, \quad \Delta \gamma = \gamma_a - \gamma.$$

Запишем выражение для плотности

$$\rho_i = \rho_e (1 - \alpha \theta).$$

Тогда система уравнений запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \nu \nabla^2 u + 2\omega_{0z} v - 2\omega_{0y} w, \quad (2.1.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial y} \right) + \nu \nabla^2 v - 2\omega_{0z} u, \quad (2.1.2a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} \right) + \alpha g \theta + \nu \nabla^2 w + 2\omega_{0y} u, \quad (2.1.3a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \theta = \Delta \gamma \cdot w + \kappa \nabla^2 \theta, \quad (2.1.4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1.5a)$$

Запишем уравнения в безразмерном виде. Для горизонтальных и вертикальных направлений в качестве масштабов длины выберем L и H , характерное значение скорости в горизонтальном направлении – U , характерное время – L/U , шкала вертикальной скорости – HU/L , шкала для давления $\rho_e U^2$, шкала для θ – $\Delta_z T = \Delta_0 T - \Delta T(H) = \Delta \gamma \cdot H$.

В то же самое время, мы устанавливаем безразмерные параметры: $\delta = H/L$; $Re = UL/\nu$ (число Рейнольдса); $Ri = H\kappa N^2/U^3$ (число Ричардсона); N – частота Брента – Вайсяля, $N^2 = \alpha g \Delta \gamma$; $Pr = \nu/\kappa$ (число Прандтля); $Ro_L = U/2\omega_{0z}L$ (число Россби), [9], $Ro_H = \frac{U}{2\omega_{0y}H}$. Тогда безразмерная

форма для уравнений примет вид

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Ro_L} \tilde{v} - \frac{1}{Ro_H} \tilde{w} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right). \quad (2.1.6)$$

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{y}} - \frac{1}{Ro_L} \tilde{u} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right). \quad (2.1.7)$$

$$\delta^2 \frac{d\tilde{w}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{z}} + Ri \cdot \tilde{\theta} + \frac{1}{Ro_H} \tilde{u} + \frac{\delta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right), \quad (2.1.8)$$

$$\frac{1}{PrRe} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} = \tilde{w} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}^2}. \quad (2.1.9)$$

Таким образом, опуская знак «тильда» над безразмерными величинами, запишем:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Ro_L} v - \frac{1}{Ro_H} w + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.6a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{Ro_L} u + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.7a)$$

$$\delta^2 \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Ro}_H} u + \frac{\delta}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.8a)$$

$$\frac{1}{\text{PrRe}} \frac{d\theta}{dt} = w + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (2.1.9a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1.10a)$$

Если адвективные члены в уравнениях (2.1.6) – (2.1.9) опустить, и принять $O(\delta)=1$, т.е. $L=H$, то уравнения (2.1.6) – (2.1.9) могут быть преобразованы к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\text{Ro}_L} v - \frac{1}{\text{Ro}_H} w + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.6b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}_L} u + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.7b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Ro}_H} u + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.8b)$$

$$\frac{1}{\text{PrRe}} \frac{d\theta}{dt} = w + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (2.1.9b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1.10b)$$

Берем производную по переменной y от (2.1.6b) и производную по переменной x от (2.1.7b), и, вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{1}{\text{Ro}_L} D + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Аналогично, взяв производную по переменной x от (2.1.6b) и производную по переменной y от (2.1.7b), и складывая уравнения, получим

$$\frac{\partial D}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + \frac{\Omega}{\text{Ro}_L} - \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 D.$$

Таким образом, получаем систему

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{D}{\text{Ro}_L} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\Omega}{\text{Ro}_L} = - \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 D - \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \frac{1}{\text{Ro}_H} u. \quad (2.1.13)$$

$$\frac{1}{\text{PrRe}} \frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \nabla^2 \theta. \quad (2.1.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.1.15)$$

где

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1.16)$$

– горизонтальная дивергенция и вертикальная завихренность, соответственно.

Рассмотрим стационарное состояние атмосферы, для этого уравнения запишем в виде

$$\frac{D}{\text{Ro}_L} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.1.17)$$

$$-\frac{\Omega}{\text{Ro}_L} = -\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 D - \frac{1}{\text{Ro}_H} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.1.18)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w + \frac{1}{\text{Ro}_H} u. \quad (2.1.19)$$

$$0 = w + \nabla^2 \theta. \quad (2.1.20)$$

$$D + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1.21)$$

Уравнения (2.1.17), (2.1.18) подразумевают, что сумма силы градиента давления, силы инерции Кориолиса и вязкой силы равна нулю.

Необходимое дифференциальное уравнение в частных производных получим, исключая переменные Ω , D , θ и p' :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left\{ (\nabla^2 \nabla^2 - \text{Ra}) w + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \nabla^2 u \right\} + \\ & + (\nabla^2 \nabla^2 + \text{Ta}) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial z \partial x} = -\frac{\text{Re}^2}{\text{Ro}_L \text{Ro}_H} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}, \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

где

$$\text{Ra} = \text{Ri} \cdot \text{Re} = \frac{\kappa H^2 N^2}{\nu U^2}, \quad \text{Ta} = \frac{\text{Re}^2}{(\text{Ro}_L)^2}, \quad (2.1.23)$$

где Ra – число Релея, а Ta – число Тейлора.

2.2. Решения системы уравнений, описывающей трехмерный атмосферный вихрь

Будем w искать в виде

$$w = X(x)Y(y)W(z),$$

$$X(x) = \cos kx, \quad Y(y) = \cos ky, \quad W(z) = W_0 \cdot \sin(n\pi z).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.1.22), получим

$$\begin{aligned} & \left(2k^2 \text{Ra} - (2k^2 + n^2 \pi^2)^3 - n^2 \pi^2 \text{Ta} \right) w + \\ & + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 u - \\ & + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} (2k^2 + n^2 \pi^2) W_0 k n \pi \cdot \sin kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) = \\ & = W_0 \frac{\text{Re}^2}{\text{Ro}_L \text{Ro}_H} k n \pi \cdot \cos kx \cdot \sin ky \cdot \cos(n\pi z). \end{aligned}$$

Выражение для величины u ищем в виде

$$u = -W_0 \cdot (A \cdot \sin kx \cdot \cos ky + B \cdot \cos kx \cdot \sin ky) \cdot \cos(n\pi z).$$

Подставляя это выражение в уравнение, получаем

$$\left[2k^2 \text{Ra} - n^2 \pi^2 \text{Ta} - (2k^2 + n^2 \pi^2)^3 \right] W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \sin(n\pi z) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} k (2k^2 + n^2 \pi^2) W_0 (n\pi - 2kA) \cdot \sin kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) = \\
& = W_0 \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} k \left(\frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \pi n + 2k (2k^2 + n^2 \pi^2) B \right) \cdot \cos kx \cdot \sin ky \cdot \cos(n\pi z).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$n\pi - 2kA = 0, \quad A = \frac{n\pi}{2k};$$

$$\frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \pi n + 2k (2k^2 + n^2 \pi^2) B = 0,$$

$$B = - \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k (2k^2 + n^2 \pi^2)};$$

$$2k^2 \text{Ra} - n^2 \pi^2 \text{Ta} - (2k^2 + n^2 \pi^2)^3 = 0,$$

$$\text{Ra}_{\text{cr}} = \frac{(2k^2 + n^2 \pi^2)^3 + n^2 \pi^2 \text{Ta}}{2k^2}.$$

Таким образом,

$$u = -W_0 \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \sin kx \cdot \cos ky - \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k (2k^2 + n^2 \pi^2)} \cdot \cos kx \cdot \sin ky \right) \cos(n\pi z)$$

Отсюда

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= -n\pi W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) +$$

$$+ W_0 \left(\frac{n\pi}{2} \cdot \cos kx \cdot \cos ky + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2 (2k^2 + n^2 \pi^2)} \cdot \sin kx \cdot \sin ky \right) \cos(n\pi z),$$

$$v = -W_0 \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \cos kx \cdot \sin ky + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k(2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot \sin kx \cdot \cos ky \right) \cos(n\pi z)$$

Таким образом,

$$u = -W_0 \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \sin kx \cdot \cos ky - \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k(2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot \cos kx \cdot \sin ky \right) \cos(n\pi z) \quad (2.2.1)$$

$$v = -W_0 \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \cos kx \cdot \sin ky + \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\pi n}{2k(2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot \sin kx \cdot \cos ky \right) \cos(n\pi z) \quad (2.2.2)$$

$$w = W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \sin(n\pi z). \quad (2.2.3)$$

На рисунке приведено поле скоростей, построенное по полученным выражениям для проекций скоростей.

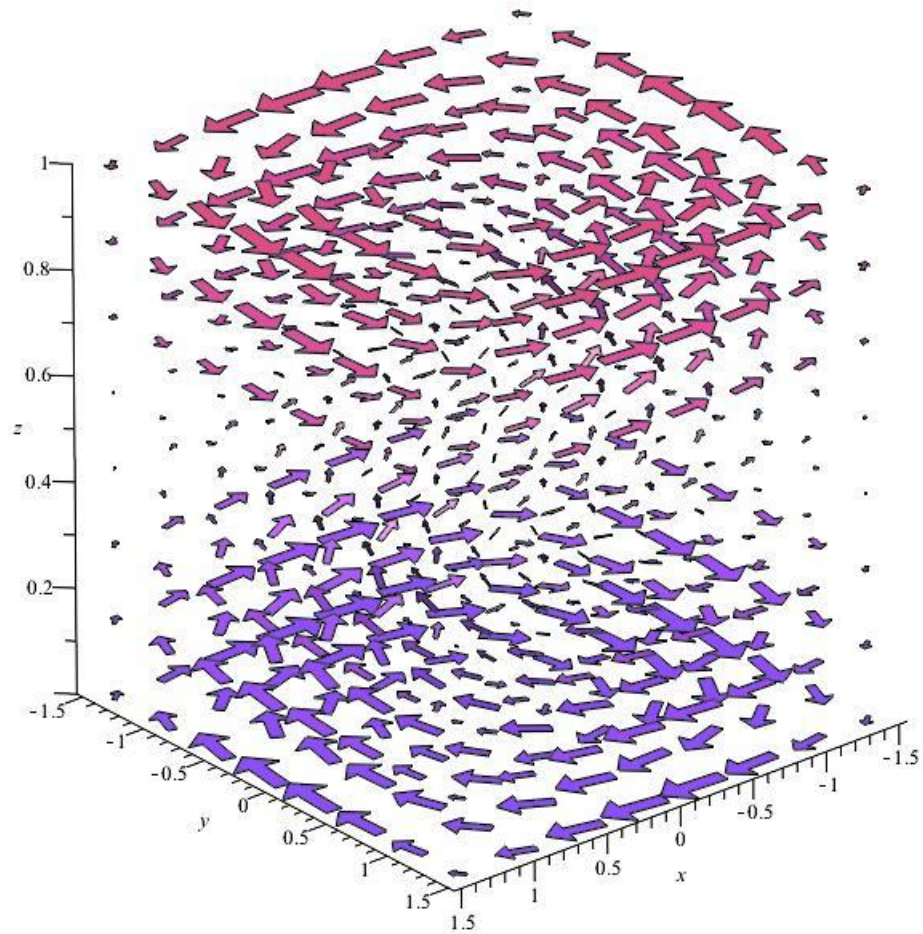


Рисунок 2.1. Спиральная структура вихревого движения.

Из рисунка видно, что в то время как воздушная частица в нижнем уровне по спирали сходится к центру, воздух поднимается вверх, находясь в неустойчивом состоянии. После того, как воздушная частица достигает некоторого уровня, воздушная частица начинает по спирали расходиться. Из рисунка 2.1 мы видим, что движение воздушной частицы принимает трехмерную спиральную структуру.

Уравнение (2.1.22) является дифференциальным уравнением в частных производных, удовлетворяющему стационарному трехмерному вихревому состоянию атмосферы. Рассмотрим основные характеристики трехмерного вихревого состояния атмосферы. Уравнения (2.1.17) и (2.1.18)

означают, что движение воздуха носит вихревой характер. Из уравнения (2.1.21), мы видим, что, если горизонтальное движение является сходящимся в нижних слоях атмосферы $D < 0$, то $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$. Поскольку w равен нулю у поверхности земли, то $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$ означает, что воздух движется вверх. Из уравнения (2.1.11) мы видим, что, если горизонтальное воздушное движение является сходящимся в нижних слоях атмосферы $D < 0$, то $\frac{\partial \Omega}{\partial t} > 0$, значит и $\Omega > 0$. Это означает, что вихрь имеет циклоническую завихренность в нижних слоях атмосферы. Из (2.1.18) следует, что, если $\Omega > 0$, то $\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} > 0$. Это означает, что центр циклонического вихря имеет низкое давление (вторая производная от давления больше нуля).

Уравнение (2.1.19) и (2.1.20) связывают трехмерную структуру потока и поле температуры.

Из уравнения (2.1.20), так как вертикальная скорость положительна ($w > 0$), следует, что $\nabla^2 \theta < 0$. Это означает, что центр циклонического вихря является нагретым центром.

В результате вихревое движение является основным состоянием атмосферы.

Когда $Re \rightarrow \infty$, то есть вязкая сила незначительно, и $w = 0$, из уравнения (2.1.17), мы получаем, что $D \rightarrow 0$.

Из уравнения (2.1.19) следует:

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Ro}_H} u.$$

В этих приближениях из уравнений (2.1.6b) для стационарного состояния атмосферы получим:

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\text{Ro}_L} v,$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\text{Ro}_L} u,$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \text{Ri} \cdot \theta + \frac{1}{\text{Ro}_H} w,$$

$$0 = w + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Отсюда получаем компоненты геострофической скорости:

$$u_g = -\text{Ro}_L \frac{\partial p'}{\partial y},$$

$$v_g = \text{Ro}_L \frac{\partial p'}{\partial x},$$

$$w_g = \text{Ro}_H \frac{\partial p'}{\partial z} - \text{Ro}_H \text{Ri} \cdot \theta.$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0.$$

При условии $\text{Re} \rightarrow \infty$ из уравнения (2.1.18) следует:

$$\Omega = \text{Ro}_L \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right).$$

Это показывает, что изобарические линии коррелируют с полем завихренности.

2.3. Критерии устойчивости атмосферы

Найдем критическое число Рэлея для значения волнового числа $k = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{\text{cr}} &= \frac{(2k^2 + n^2\pi^2)^3 + n^2\pi^2\text{Ta}}{2k^2} = \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{2} + n^2 \right)^3 \pi^4 + n^2\text{Ta} \right]. \end{aligned}$$

При условии $n = 1$ получим

$$\text{Ra}_{\text{cr}} = \frac{27}{4} \pi^4 + 2\text{Ta},$$

$$\text{Ra}_{\text{cr}} = \frac{27}{4} \pi^4 + 2 \left(\frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \right)^2,$$

$$2 \left(\frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \right)^2 = \frac{2 \left(\frac{UL}{v} \right)^2}{\left(\frac{U}{2\omega_{0z}L} \right)^2} = \frac{8\omega_{0z}^2 L^4}{v^2}.$$

Отсюда видно, что для масштабов $L \ll \left(\frac{v^2}{8\omega_{0z}^2} \right)^{1/4}$ получаем известный

результат из теории Рэлея.

Найдем критическое значение волнового числа из условия:

$$\frac{\partial \text{Ra}_{\text{cr}}}{\partial k} = \frac{12k^3 (2k^2 + n^2\pi^2)^2 - 2k \left[(2k^2 + n^2\pi^2)^3 + n^2\pi^2\text{Ta} \right]}{2k^4} = 0,$$

$$6k^2(2k^2 + n^2\pi^2)^2 - (2k^2 + n^2\pi^2)^3 - n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$(2k^2 + n^2\pi^2)^2(4k^2 - n^2\pi^2) - n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$2(2k^2 + n^2\pi^2)^2\left(2k^2 + n^2\pi^2 - n^2\pi^2 - \frac{n^2\pi^2}{2}\right) - n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$2(2k^2 + n^2\pi^2)^2\left(2k^2 + n^2\pi^2 - \frac{3n^2\pi^2}{2}\right) - n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$2\kappa^2\left(\kappa - \frac{3n^2\pi^2}{2}\right) - n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$2\kappa^3 - 3n^2\pi^2\kappa^2 - n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$\kappa^3 - \frac{3}{2}n^2\pi^2\kappa^2 - \frac{1}{2}n^2\pi^2\text{Ta} = 0.$$

$$(\kappa + \alpha)^3 - \frac{3}{2}n^2\pi^2(\kappa + \alpha)^2 - \frac{1}{2}n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$\kappa^3 + 3\left(\alpha - \frac{1}{2}n^2\pi^2\right)\kappa^2 + 3\left(\alpha - n^2\pi^2\right)\alpha\kappa + \alpha^3 - \frac{3}{2}n^2\pi^2\alpha^2 - \frac{1}{2}n^2\pi^2\text{Ta} = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}n^2\pi^2,$$

$$\kappa^3 + 3\left(\frac{1}{2}n^2\pi^2 - n^2\pi^2\right)\frac{1}{2}n^2\pi^2\kappa + \left(\frac{1}{2}n^2\pi^2\right)^3 - \frac{3}{2}n^2\pi^2\left(\frac{1}{2}n^2\pi^2\right)^2 - \frac{1}{2}n^2\pi^2\text{Ta} = 0$$

$$\kappa^3 - \frac{3}{4}n^4\pi^4\kappa - \frac{n^2\pi^2}{2}\left(\frac{1}{2}n^4\pi^4 + \text{Ta}\right) = 0.$$

Корни уравнения:

$$p = -\frac{3}{4}n^4\pi^4, \quad q = -\frac{n^2\pi^2}{2}\left(\frac{1}{2}n^4\pi^4 + \text{Ta}\right),$$

$$\tilde{\omega}_1 = A + B,$$

$$\tilde{\omega}_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (A-B),$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}},$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2;$$

$$Q = \frac{n^4 \pi^4}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{n^4 \pi^4}{2} + \text{Ta} \right)^2 - \left(\frac{n^4 \pi^4}{4} \right)^2 \right],$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{n^2 \pi^2}{4} \left(\frac{1}{2} n^4 \pi^4 + \text{Ta} \right) + \frac{n^2 \pi^2}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{n^4 \pi^4}{2} + \text{Ta} \right)^2 - \left(\frac{n^4 \pi^4}{4} \right)^2}},$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{n^2 \pi^2}{4} \left(\frac{1}{2} n^4 \pi^4 + \text{Ta} \right) - \frac{n^2 \pi^2}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{n^4 \pi^4}{2} + \text{Ta} \right)^2 - \left(\frac{n^4 \pi^4}{4} \right)^2}},$$

Вернемся к системе уравнений (2.1.17) – (2.1.21). Из уравнения (2.1.21) найдем выражение для дивергенции скорости

$$D = -\frac{\partial w}{\partial z} = -n\pi W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z).$$

Из уравнения (2.1.20) найдем выражение для возмущения температуры

$$\theta = \frac{1}{(2k^2 + n^2 \pi^2)} \cdot W_0 \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \sin(n\pi z).$$

Из уравнения (2.1.19) найдем выражение для возмущения давления

$$p' = \frac{W_0}{n\pi} \left[\frac{1}{\text{Re}} (2k^2 + n^2\pi^2) - \frac{\text{Ri}}{2k^2 + n^2\pi^2} \right] \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) -$$

$$- \frac{W_0}{n\pi \text{Ro}_H} \left(\frac{n\pi}{2k} \cdot \sin kx \cdot \cos ky - \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{\cos kx \cdot \sin ky}{2k^2 (2k^2 + n^2\pi^2)} \right) \sin(n\pi z).$$

Из уравнения (2.1.18) найдем выражение для завихренности

$$\Omega = -\frac{W_0}{n\pi} \frac{\text{Ro}_L}{\text{Re}} \left\{ (2k^2 + n^2\pi^2)^2 - \text{Ra} \frac{2k^2}{2k^2 + n^2\pi^2} \right\} \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z) -$$

$$- W_0 \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_H} \frac{1}{n\pi (2k^2 + n^2\pi^2)} \cos kx \cdot \sin ky \cdot \sin(n\pi z).$$

Рисунки 2.2 и рисунок 2.3 показывают поля завихренности, температуры и давления на высоте $z = 0.5$ (характерные для более низкой высоты) и $z = 1.5$ (характерные для верхнего уровня) вихревого движения.

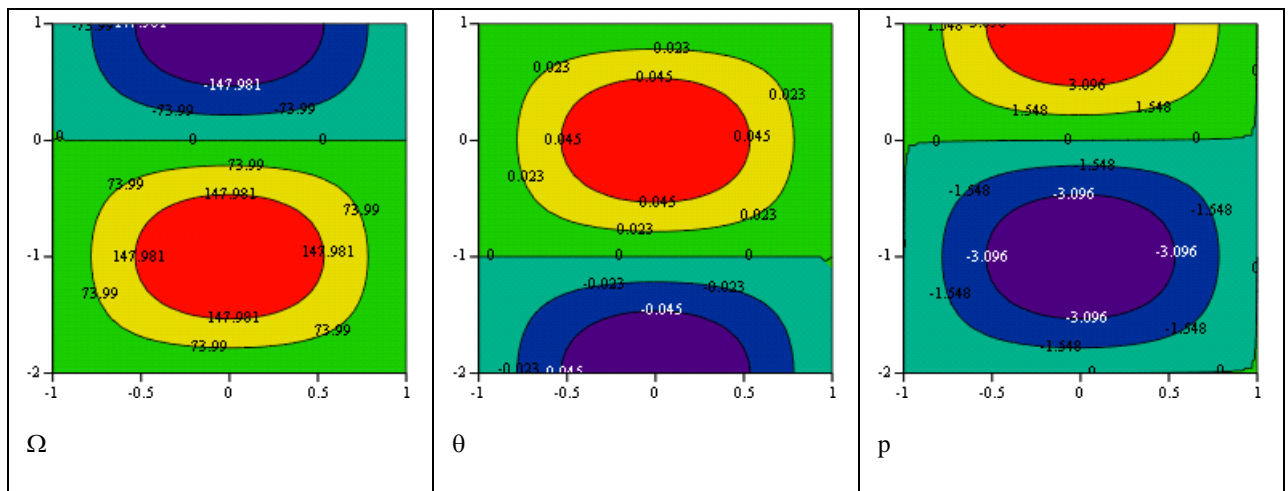


Рисунок 2.2. Поля завихренности (Ω), температуры (θ) и давления (p') на низком уровне ($z = 0.5$).

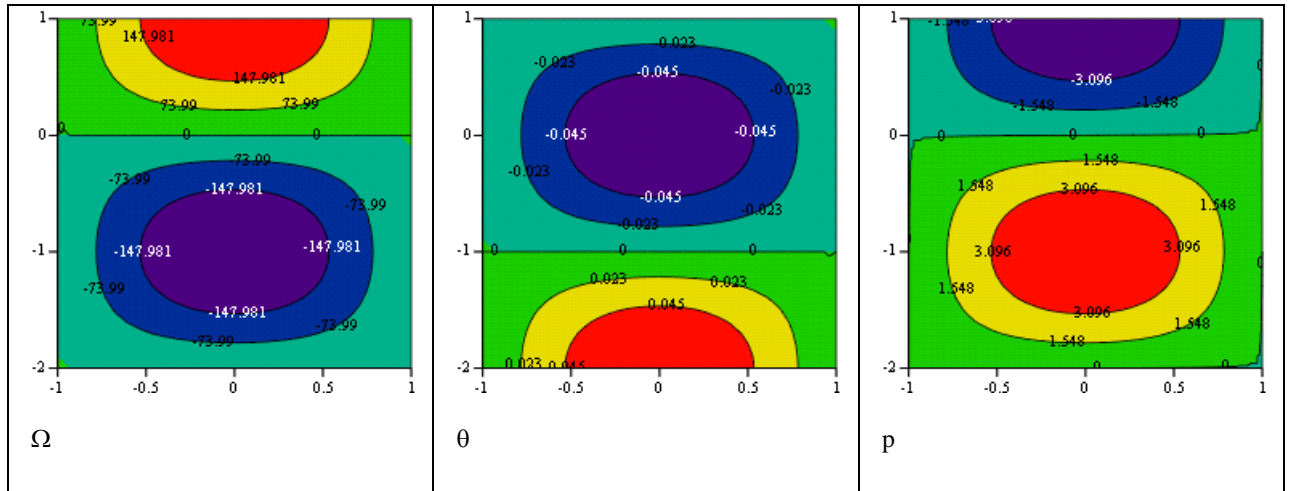


Рисунок 2.3. То же самое как рисунке 2.2, но на высоком уровне ($z = 1.5$).

Из рисунков 2.2 и 2.3, мы видим что, если поле движения в более низком уровне имеет циклоническую завихренность, то поле движения на верхнем уровне имеет антициклоническая завихренность. Более низкий уровень соответствует низкому давлению в центре, а верхний уровень – более высокий давлению в центре.

Декомпозиция (разложение) трехмерного вихревого движения

Известно что, если скорость $\mathbf{v}(u, v)$ является двумерной, то u и v могут быть представлены через функцию тока ψ и потенциал скоростей ϕ :

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (2.3.1)$$

Теперь мы знаем, что трехмерное вихревое движение $\mathbf{v}(x, y, z)$ удовлетворяет трехмерному уравнению неразрывности, из которого мы получим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -D = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\Delta_2\phi, \quad (2.3.2)$$

где

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (2.3.3)$$

Интегрирование уравнения (2.3.2) по переменной z даст

$$\int \frac{\partial w}{\partial z} dz = w = \Delta_2 \left(- \int \varphi dz \right) = \Delta_2 \chi, \quad (2.3.4)$$

где χ удовлетворяет соотношению

$$\chi = - \int \varphi dz,$$

или

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = -\varphi, \quad (2.3.5)$$

где χ называют конвективным потенциалом скоростей.

Из уравнений (2.3.1) и (2.3.5) трехмерное поле скоростей представляется в виде

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right), \quad (2.3.6)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right), \quad (2.3.7)$$

$$w = \Delta_2 \chi. \quad (2.3.8)$$

Разложение трехмерного ветра получим, сравнивая уравнения (2.3.6) – (2.3.8) с уравнением (2.2.1) – (2.2.3)

$$\chi = - \frac{W_0}{2k^2} \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \sin(n\pi z), \quad (2.3.9)$$

$$\varphi = W_0 \frac{n\pi}{2k^2} \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z), \quad (2.3.10)$$

$$\psi = W_0 \frac{\text{Re}}{\text{Ro}_L} \frac{1}{2k^3 (2k^2 + n^2\pi^2)} \cdot \cos kx \cdot \cos ky \cdot \cos(n\pi z). \quad (2.3.11)$$

Составляющую с конвективным потенциалом скоростей в уравнениях (2.3.6) – (2.3.8) называют конвективной частью, а с величиной ψ называют геострофической частью.

Выводы к главе 2

1. Разработана математическая модель стационарного трехмерного атмосферного вихря с учетом зависимости плотности воздуха от функции перегрева.
2. Получено выражение для критического числа Рэля, характеризующего вихревое состояние атмосферы.
3. Показано, что в то время как воздушная частица в нижнем уровне по спирали сходится к центру, воздух поднимается вверх, находясь в неустойчивом состоянии. После того, как воздушная частица достигает некоторого уровня, воздушная частица начинает по спирали расходиться. Из построенного графика видно, что движение воздушной частицы принимает трехмерную спиральную структуру.
4. Установлено, что, если горизонтальное воздушное движение является сходящимся в нижних слоях атмосферы, то вихрь имеет циклоническую завихренность в нижних слоях атмосферы, при этом центр циклонического вихря имеет низкое давление.
5. Показано, что центр циклонического вихря является нагретым центром.
6. Установлено, что если поле движения в более низком уровне имеет циклоническую завихренность, то поле движения на верхнем уровне имеет антициклоническая завихренность. Более низкий уровень соответствует низкому давлению в центре, а верхний уровень – более высокий давлению в центре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе исследований, проведенных в диссертационной работе, получены следующие основные выводы и результаты.

1. Разработана математическая модель стационарного трехмерного атмосферного вихря с учетом зависимости плотности воздуха от функции перегрева.
2. Получено выражение для критического числа Рэля, характеризующего вихревое состояние атмосферы.
3. Показано, что в то время как воздушная частица в нижнем уровне по спирали сходится к центру, воздух поднимается вверх, находясь в неустойчивом состоянии. После того, как воздушная частица достигает некоторого уровня, воздушная частица начинает по спирали расходиться. Из построенного графика видно, что движение воздушной частицы принимает трехмерную спиральную структуру.
4. Установлено, что, если горизонтальное воздушное движение является сходящимся в нижних слоях атмосферы, то вихрь имеет циклоническую завихренность в нижних слоях атмосферы, при этом центр циклонического вихря имеет низкое давление.
5. Показано, что центр циклонического вихря является нагретым центром.
6. Установлено, что если поле движения в более низком уровне имеет циклоническую завихренность, то поле движения на верхнем уровне имеет антициклоническая завихренность. Более низкий уровень соответствует низкому давлению в центре, а верхний уровень – более высокий давлению в центре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атмосфера. Справочник. Под редакцией Седунова Ю.С. – Л.: Гидрометеиздат, 1991, 509 с.
2. Ашабоков Б.А. Калажоков Х.Х. Нестационарная трехмерная модель градовых облаков с учетом микрофизических процессов. //Материалы Всесоюзного семинара по физике образования градовых процессов и активным воздействиям на них, 1988, с. 3 – 12.
3. Борисова В. В., Шакина Н. П. Использование потенциального вихря для расчета высоты и температуры тропопаузы. //Труды Гидрометцентра СССР, 1989, вып. 305, С. 98 – 117.
4. Волочай М.А., Грицаева М.Н., Ларченко И.Н., Закинян Р.Г. Основные факторы, влияющие на развитие крупномасштабных вихревых процессов на Северном Кавказе. Материалы 54-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2009, С. 64 – 66.
5. Волочай М.А. Грицаева М.Н. Причины возникновения вихревых и вращательных движений в атмосфере. //Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2010, № 2, С. 39 – 41.
6. Волочай М.А., Грицаева М.Н., Закинян Р.Г. Свободная конвекция влажного воздуха. Материалы 55-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2010, С. 16 – 19.
7. Воробьев В.И. Струйные течения в высоких и умеренных широтах. – Л.: Гидрометеиздат, 1960, 234 с.
8. Воробьев В.И. Высотные фронтальные зоны Северного полушария. – Л.: Гидрометеиздат, 1968, 230 с.

9. Воробьева Е.В. Сопряженность атмосферных процессов в Северном полушарии. – Л.: Гидрометеиздат, 1962, 116 с.
10. Геохланян Т. Х., Шакина Н.П. Атмосферные фронты. – М.: Знание, 1978, 56 с.
11. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость жидкости. – М.: Наука, 1972, 320 с.
12. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. – М.: Мир, 1986, Т. 1, 399 с.; Т. 2, 416 с.
13. Гинзбург Э. И., Гуляев В. Т., Жалковская Л. В. Динамические модели свободной атмосферы. – Новосибирск: Наука, 1987, 290 с.
14. Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Пономарев В.М. Режимы Хэдли и Россби в простейшей модели конвекции вращающейся жидкости. //Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2006, т. 42, № 4, С. 435 – 459.
15. Голицын Г.С. Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. – Л.: Гидрометеиздат, 1980, 55 с.
16. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981, 367 с.
17. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1991, 222 с.
18. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Аналитические аспекты. – Л.: Гидрометеиздат, 1987, 255 с.
19. Грицаева М.Н. Разработка математической модели и методика расчета параметров атмосферной циркуляции. /Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Нальчик, 2011.
20. Грицаева М.Н., Волочай М.А. Влияние центробежной силы инерции в геострофической модели атмосферы //Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2010, № 1, С. 41 – 44.

21. Грицаева М.Н., Волочай М.А., Закинян Р.Г. Влияние центробежной силы инерции на градиентный ветер в крупномасштабных вихревых процессах. Материалы 54-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2009, С. 78 – 79.
22. Грицаева М.Н., Волочай М.А., Закинян Р.Г. Возникновение свободной конвекции вязкого воздуха. Материалы 55-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2010, С. 23 – 26.
23. Грицаева М.Н. Волочай М.А., Закинян Р.Г. Геострофическая модель атмосферы с учетом центробежной силы инерции // Вестник Ставропольского Государственного Университета, 2009, № 63, С. 100 – 106.
24. Грицаева М.Н., Волочай М.А., Закинян Р.Г. Оценка влияния центробежной силы инерции в геострофической модели атмосферы. Материалы 54-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2009, С. 102 – 103.
25. Грицаева М.Н., Волочай М.А., Закинян Р.Г. Поворот геострофического ветра в тропосфере при учете центробежной силы инерции. Материалы 54-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2009, С. 80 – 81.
26. Дзердзеевский Б.Л. Общая циркуляция атмосферы и климат. – М.: Наука, 1975, 288 с.
27. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1976, 108 с.

28. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1969, 196 с.
29. Динамика погоды (под ред. С. Манабе). – Л.: Гидрометеоздат, 1988, 418 с.
30. Динамическая метеорология. Теоретическая метеорология. /Под ред. Д. Л. Лайхтмана. – Л.: Гидрометеоздат, 1976, 607 с.
31. Добрышман Е.М. Влияние возмущений поля давления на структуру поля ветра в центральной части тайфуна. // Метеорология и гидрология, 2000, № 1, С. 5 – 21.
32. Довгалюк Ю. А., Веремей Н. Е., Владимиров С. А., Дрофа А. С., Затевахин М. А., Игнатьев А. А., Морозов В. Н., Пастушков Р. С., Синькевич А. А., Стасенко В. Н., Степаненко В. Д., Шаповалов А. В., Щукин Г. Г. Концепция разработки трехмерной модели осадкообразующего конвективного облака. I. Структура модели и основные уравнения гидротермодинамического блока //Труды ГГО им. А.И.Воейкова Выпуск 558. – СПб.: 2008, С. 102–142.
33. Должанский Ф.В. Лекции по геофизической гидродинамике. М.: ИВМ РАН, 2006, 378 с.
34. Дымников В.П. Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов. – М.: ИВМ РАН, 2007, 283 с.
35. Закинян Р.Г., Атабиев М.Д., Волочай М.А., Грицаева М.Н. Изменение параметров поднимающегося подоблачного воздуха //Естественные и технические науки, 2010, № 2, С. 297 – 303.
36. Захаровская Н.Н., Ильинич В.В. Метеорология и климатология: учебное пособие для ВУЗов. - М.: Колос, 2004, 127 с.
37. Зверев А.С. Синоптическая метеорология. – Л.: Гидрометеоздат, 1977, 712 с.
38. Иванов М.И. Волновые движения жидкости в сложных областях с учетом вращения. /Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Москва, 2008.

39. Иванова А. Р. Методика расчета карты максимального ветра. Метеорология и гидрология, 1989, № 4, С. 59-64.
40. Ингель Л.Х. К теории конвективных восходящих струй. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2008, т. 44, № 2, С. 178 – 185.
41. Интенсивные атмосферные вихри. Под редакцией Бенгтсона Л.И., Лайтхила Дж. – М.: Мир, 1985, 368 с.
42. Кононова Н.К. Изменение характера циркуляции атмосферы в последние десятилетия как фактор изменения климатических и ледовых условий Арктики. //Материалы гляциологических исследований, вып. 100, 2006, С. 191–199.
43. Кононова Н.К., Луценко О.В., Макарова М.Е., Орлов И.А. Циркуляция атмосферы в Антарктике в конце XX – начале XXI веков //Материалы гляциологических исследований, Вып. 103, 2007, С. 142 – 147.
44. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1. – М.: Физматгиз, 1963, 584 с.
45. Красовский В.И. Штили и штормы в верхней атмосфере. – М.: Наука, 1971, 136 с.
46. Крупкин А.А., Грицаева М.Н., Ларченко И.Н., Закинян Р.Г. Линейная теория волн в атмосфере. Материалы 55-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2010, С. 38 – 42.
47. Крупномасштабные динамические процессы в атмосфере (под ред. Б. Хоскинса, Р. Пирса). – М.: Мир, 1988, 428 с.
48. Ларченко И.Н., Волочай М.А., Грицаева М.Н., Закинян Р.Г. Система уравнений боковой конвекции Материалы 55-й научно-методической конференции преподавателей и студентов Ставропольского государственного университета «Университетская наука – региону». – Ставрополь: СГУ, 2010, С. 45 – 48.

49. Лоренц Э.Н. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1970, 259 с.
50. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974, 303 с.
51. Матвеев Л.Т. Динамика облаков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981, 311 с.
52. Матвеев Л.Т. Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991, 295 с.
53. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. – СПб: Гидрометеоиздат, 2000, 779 с.
54. Макоско А.А., Панин Б.Д. Динамика атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. – СПб: РГГМУ, 2002, 245 с.
55. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988, 424 с.
56. Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. – Л.: Наука, 1969, 487 с.
57. Облака и облачная атмосфера. Справочник. / Под ред. И.П.Мазина и А.Х. Хргиана // . – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
58. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988, 408 с.
59. Палкин С. Н. Струи и вихри в природе и технике. – Л.: Знание, 1984, 32 с.
60. Пальмен Э., Ньютон Ч. Циркуляционные системы атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973, 616 с.
61. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. – М.: Мир, 1984, т.1, т.2, 811 с.
62. Петвиашвили В. И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. – М.: Энергоатомиздат, 1989, 200 с.
63. Петросянц М.А., Гущина Д.Ю. Крупномасштабное взаимодействие глобальной циркуляции атмосферы с температурой поверхности экваториальной части Тихого океана. //Метеорология и гидрология, 1998, № 5, С. 5 – 24.

64. Погорельцев А. И. Моделирование планетарных волн и их влияния на зонально усредненное обращение в средней атмосфере. /*Pogoreltsev A.I. Simulation of planetary waves and their influence on the zonally averaged circulation in the middle atmosphere // Earth, Planets and Space, 1999, V. 51, № 7/8, P. 773–784.*
65. Погосян Х. П., Циклоны. – Л.: Гидрометеиздат, 1976, 148 с.
66. Погосян Х.П. Общая циркуляция атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1972, 394 с.
67. Погосян Х.П., Павловская А.А. Аномалии атмосферной циркуляции, приземного давления и температуры в связи с квазидвухлетней цикличностью. – Л.: Гидрометеиздат, 1977.
68. Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан - атмосфера /Под ред. А.С. Дубова. – Л.: Гидрометеиздат, 1974, 239 с.
69. Ракипова Л.Р., Ефимова Л.К. Динамика верхних слоев атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1975, 256 с.
70. Региональные атмосферные процессы Закавказья /Под ред. И. В. Чоговадзе. – Л.: Гидрометеиздат, 1982, 103 с.
71. Роджерс Р.Р. Краткий курс физики облаков /Пер. с англ. – Л.: Гидрометеиздат, 1979, 231 с.
72. Рубинштейн К.Г., Егорова Е.Н. Влияние межгодовых аномалий температуры поверхности океана на изменчивость циркуляции атмосферы. Результаты численных экспериментов. //Метеорология и гидрология, 2002, № 2, С. 5 – 15.
73. Сальникова М.Г., Самсонов В.А. О движении вязкой несжимаемой жидкости на вращающемся шаре в центральном поле ньютоновского притяжения // Изв. РАН. МЖГ. 1995. №2. С. 133-141
74. Семенченко Б.А. Физическая метеорология. – М.: Аспект Пресс, 2002, 415с.

75. Скриптунова Е. Н., Шакина Н. П. Автоматизированный метод прогноза зон активной конвекции. Метеорология и гидрология, 1991, № 5, с. 15 – 19.
76. Сонечкин Д.М. Стохастичность в модели общей циркуляции атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1984, 280 с.
77. Столыпина Н.В. Сезонные изменения интенсивности циркуляции в стратосфере северного полушария. – Л.: Гидрометеиздат, 1981, 78 с.
78. Сулаквелидзе Г.К. Ливневые осадки и град. – Л.: Гидрометеиздат, 1967, 412 с
79. Тараканов Г.Г. Конвекция и системы движения в тропиках.– Л.: Гидрометеиздат, 1986, 66 с.
80. Тарасенко Д.А. Структура и циркуляция стратосферы и мезосферы северного полушария. – Л.: Гидрометеиздат, 1988, 288 с.
81. Угрюмов А. И., Харьковская Н. В. Современные изменения климата Санкт-Петербурга и колебания циркуляции атмосферы. //Метеорология и гидрология, 2008, № 1, С. 24 – 30.
82. Федченко Л.М. Беленцова В.А. О способах расчета некоторых параметров конвекции //Труды ВГИ, вып. 34, 1977, С. 76 – 87.
83. Фролов А. В., Важник А. И., Цветков В. И., Астахова Е. Д. Глобальная спектральная модель атмосферы с высоким разрешением по вертикали. //Метеорология и гидрология, 2000, № 2, С. 10 – 21.
84. Хаин А.П., Сутырин Г.Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. – Л.: Гидрометеиздат, 1983, 272 с.
85. Хайруллин, Р. Р. Структура и динамика циклогенеза в северном полушарии. – Казань, 1989, 165 с.
86. Холтон Дж. Р. Динамическая метеорология стратосферы и мезосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1979, 222 с
87. Хргиан А.Х. Физика атмосферы. – М.: изд-во МГУ, 1986, 328 с.
88. Хук У.Х., Госсард Э.Э. Волны в атмосфере. – М.: Мир, 1978, 532 с.

89. Чон В.Х., Мохов И.И. Модельные оценки чувствительности центров действия атмосферы к глобальным климатическим изменениям. //Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2006, т. 42, № 6, С. 749 – 756.
90. Шакина Н. П. Иванова А. Р., Скриптунова Е. Н., Борисова В. В. Новый подход к представлению информации о максимальном ветре на картах струйных течений. Метеорология и гидрология, 1993, № 12, С. 40 – 47.
91. Шакина Н. П. Динамика атмосферных фронтов и циклонов. – Л.: Гидрометеиздат, 1985, 260 с.
92. Шакина Н. П., Скриптунова Е. Н., Иванова А. Р., Беркович Л. В., Ткачева Ю. В. Диагностические исследования и моделирование процессов циклогенеза, фронтогенеза и погодных условий на различных стадиях развития циклонов. //Труды Гидрометцентра России, 2000, вып. 335, С. 3 – 25.
93. Шмелер С.М. Физика конвективных облаков. – Л.: Гидрометеиздат, 1972, 230 с.
94. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. – М.: Научный мир, 2004, 328 с.
95. Ярошевич М.И. Некоторые взаимосвязи этапов развития тропических циклонов. //Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2007, т. 43, № 1, С. 61 – 68.
96. Haurwitz B. The motion of atmospheric disturbances on the spherical Earth // J.Mar. Res. 1940. V. 3. P. 254-267.
97. Holl P. Die vollständigkeit des orthogonalsystems der Houghfunktionen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (2). 1970. V. 7. P. 159-168.
98. Homer M.S. Boundary value problem for the Laplace tidal wave equation // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1990. V. 428. №1874. P. 157-180.
99. Hough S.S. On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, part I. On Laplace's "Oscillations of the first species" and on the

- dynamics of ocean currents // *Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A)*. 1897. V. 189. P. 201-257.
100. Kasahara A. Normal modes of ultralong waves in the atmosphere // *Mon. Wea. Rev.* 1976. V. 104. P. 669-690.
101. Kasahara A. Numerical integration of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions // *J. Atm. Sci.* 1977. V. 34. P. 687-701
102. Kasahara A., Qian J.-H. Normal modes of a global nonhydrostatic atmospheric model // *Mon. Wea. Rev.* 2000. V. 128. №10. P. 3357-3375.
103. Longuet-Higgins M.S. The eigenfunctions of Laplace's tidal equations over a sphere // *Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A)*. 1968. V. 262. P. 511-607.
104. Neamtan S.M. The motion of harmonic waves in the atmosphere // *J. Meteorol.* 1946. V. 3. P. 53-56.
105. Margules M. Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale // *Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa*. 1892. B. 101. S. 597-626.
106. Margules M. Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale, Teil II // *Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa*. 1893. B. 102. S. 11-56.
107. Margules M. Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale, Teil III // *Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa*. 1893. B. 102. S. 1369-1421.
108. Rossby C.-G. et coll. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action // *J. Mar. Res.* 1939. V. 2. P. 38-55.
109. Rubinstein K., Egorova E. "Estimation of Season Change of characteristics of Atmosphere and Surface in model of General Circulation of Atmosphere of Hydrometcentre of Russia." *Proceeding of Hydrometcentre of Russia*, N 333, 1998, p. 34 – 68.

110. Rubinstein K., Shmakin A. Changes of hydrological cycles in land and atmosphere in Europe and Asia in case of deforestation Siberia (results of GCM numerical experiment) Proceedings of The Second International Conference on Climate and Water, Espoo, Finland, 17 – 20 August, 1998, V. 1, p. 233 – 241.
111. Rubinstein K., Bardin M. “Investigation of low resolution general circulation model capabilities in describing statistical properties of Mediterranean region cyclones (within framework of downscaling technique)”, Proceedings of INM/WMO International Symposium on Cyclones and Hazardous Weather in the Mediterranean. Symposium Palma 97, p. 68 –71.
112. Schwarztrauber P.N., Kasahara A. The vector harmonic analysis of Laplace’s tidal equations // Siam J. Sci. Stat. Comput. 1985. V. 6. P. 464-491.
113. www.climate101.com/Atmospheric_circulation_Общая_циркуляция_атмосферы.mht
114. Zdunkowski W., Bott A. Dynamics of the Atmosphere: a Course in Theoretical Meteorology. – Cambridge University Press, 2003, p. 719.